

X  
18-19  
ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLII

1955

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XVIII

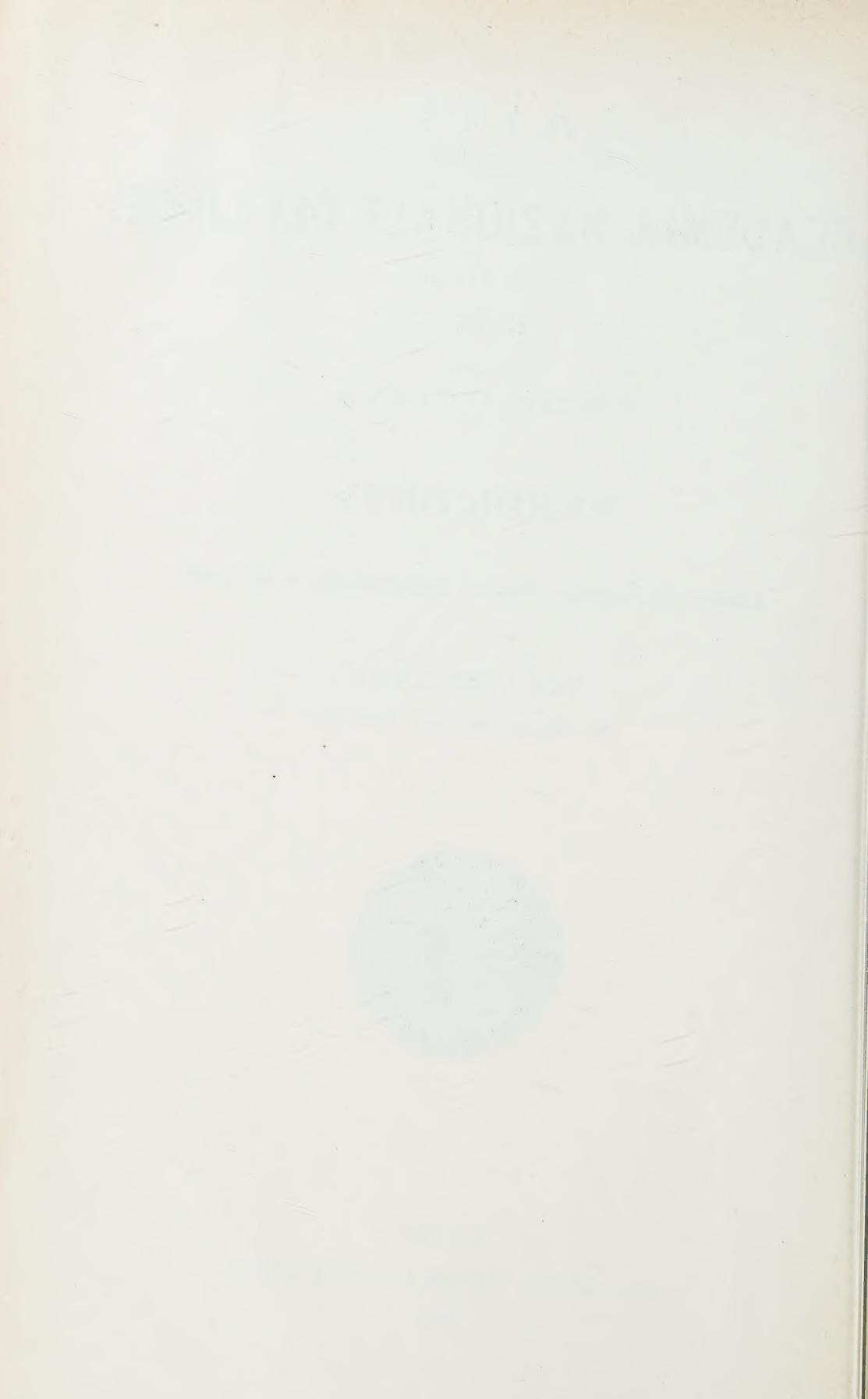
(1° semestre 1955)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1955





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 15 gennaio 1955*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Analisi matematica.** — *Sull'inversione dell'ordine di integrali « principali » nel senso di Cauchy.* Nota (\*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. La questione dell'inversione dell'ordine di integrali di cui è da considerare il *valor principale* nel senso di Cauchy (qui indicato sovrapponendo un *asterisco* all'ordinario segno d'integrazione), è una questione non facile, che non sembra aver ancora ricevuta, tranne in alcuni casi particolari, una soddisfacente sistemazione.

Precisamente, definito il valor principale dell'integrale di una funzione  $f(x)$  avente un infinito del prim'ordine in un punto  $c$  dell'intervallo d'integrazione  $(a, b)$  nel modo seguente

$$\int_a^{*b} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

quel che più preme, soprattutto per le applicazioni alla teoria delle equazioni integrali « con asterisco », è di determinare il valore del « residuo »

$$(1) \quad \Delta[F(x, y, z)] \equiv \int_a^{*b} \frac{dz}{z-x} \int_a^{*b} \frac{F(x, y, z)}{y-z} dy - \int_a^{*b} dy \int_a^{*b} \frac{F(x, y, z)}{(y-z)(z-x)} dz,$$

sotto le ipotesi meno restrittive possibili nei confronti della funzione  $F(x, y, z)$ .

(\*) Presentata nella seduta del 15 gennaio 1955.

Una celebre formula, che si suole attribuire ad H. Poincaré perché compare (però col segno sbagliato, poi corretto da G. Bertrand), nel t. III (1910) delle sue famose *Leçons de Mécanique Céleste*, ma che si trova già (col giusto segno) in un lavoro anteriore di due anni di G. H. Hardy<sup>(1)</sup>, asserisce che, sotto certe ipotesi per la funzione  $F$ , è

$$(2) \quad \Delta [F(x, y, z)] = -\pi^2 F(x, x, x).$$

Però tanto le dimostrazioni di Hardy e Poincaré-Bertrand, quanto una analoga che, senza conoscere le precedenti, diedi io stesso in un'ormai molto nota Memoria pubblicata nel 1923 presso la nostra Accademia<sup>(2)</sup>, sono lungi dall'essere del tutto soddisfacenti, sia perché non semplici, sia perché impongono restrizioni troppo forti alla funzione  $F$  (continuità della funzione e delle sue derivate prime rispetto a  $y$  e a  $z$ ).

Veramente, vi è un caso particolare: quello in cui è

$$(3) \quad F(x, y, z) = \varphi_1(y) \varphi_2(z)$$

in cui si ha una semplice dimostrazione della (2), sotto le poco restrittive ipotesi che le funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  appartengano rispettivamente alle classi lebesghiane  $L_{p_1}$  e  $L_{p_2}$  con  $1/p_1 + 1/p_2 < 1$ ; ma questo speciale risultato - da me ottenuto marginalmente nel 1950, durante una ricerca sulla trasformazione finita di Hilbert<sup>(3)</sup> - è spesso insufficiente.

Nella presente Nota mi propongo di far vedere come, con metodi non molto diversi da quelli usati nel caso (3), si può dominare anche il caso generale, pervenendo a dimostrare la (2) sotto le ipotesi seguenti:

*Posto*

$$(4) \quad \frac{F(x, y, z) - F(x, z, z)}{y - z} = \Phi(x, y, z) \quad , \quad \frac{F(x, z, z) - F(x, x, x)}{z - x} = \Psi(x, z),$$

1° la funzione  $\Phi(x, y, z)$  deve essere una funzione sommabile sia di  $y$  sia di  $z$  tale che esista (nel senso di Lebesgue) e sia finito l'integrale

$$(5) \quad \int_a^b \frac{\Phi(x, y, z) - \Phi(x, y, x)}{z - x} dz = \\ = \int_a^b \left[ \frac{F(x, y, z) - F(x, z, z)}{y - z} - \frac{F(x, y, x) - F(x, x, x)}{y - x} \right] \frac{dz}{z - x};$$

2° la funzione  $\Psi(x, z)$  dev'essere una funzione di  $z$  di classe  $L_p$ , con  $p < 1$ .

Più ancora che il guadagno di generalità, mi sembra degna di nota la semplicità della dimostrazione che segue.

(1) « Proc. London Math. Soc. » (2), 7, 181-208 (1908).

(2) « Mem. Accad. Naz. Lincei » (5), 14, 133-247 (1923). Vedi a p. 222 e seg.

(3) « Quartl. Journ. Math. (Oxford) », (2), 2, 199-211 (1951).

2. Prima di cimentarci con la dimostrazione della (2) occorre che ci soffermiamo un momento su di una questione con quella connessa, ma più semplice: la « libera invertibilità » o no di un'integrazione ordinaria e di una « con asterisco ».

Questa questione ha diversi aspetti. In particolare nel mio citato lavoro di Oxford si dimostra che

$$(6) \quad \int_a^b \varphi_1(z) dz \int_a^{*b} \frac{\varphi_2(y)}{y-z} dy = \int_a^b \varphi_2(y) dy \int_a^{*b} \frac{\varphi_1(z)}{y-z} dz$$

sotto le poco restrittive ipotesi  $\varphi_1 \in L_{p_1}$ ,  $\varphi_2 \in L_{p_2}$  con  $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1$ .

Più generalmente possiamo dimostrare che

$$(7) \quad \int_a^b dz \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, z)}{y-z} dy = \int_a^b dy \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, z)}{y-z} dz$$

se  $\Phi(y, y) \in L_p$  con  $p > 1$  e se l'integrale doppio

$$(8) \quad \iint_a^{*b} \frac{\Phi(y, z) - \Phi(y, y)}{y-z} dy dz$$

esiste (nel senso di Lebesgue) ed è finito, di guisa che possa ad esso applicarsi il classico teorema di Fubini, che assicura l'invertibilità dell'ordine delle due singole integrazioni rispetto ad  $y$  e a  $z$ .

Infatti, si ha identicamente

$$\int_a^b dz \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, z)}{y-z} dy = \iint_a^{*b} \frac{\Phi(y, z) - \Phi(y, y)}{y-z} dy dz + \int_a^b dz \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, y)}{y-z} dy,$$

epperò, per invertire l'ordine delle due integrazioni, non c'è che da servirsi del teorema di Fubini e della (6) nel caso  $\varphi_1 \equiv 1$ ,  $\varphi_2 = \Phi(y, y)$ , ciò che è certo possibile, perché, essendo  $\varphi_1$  limitata, si può prendere  $p_1$  tanto grande quanto si vuole e la condizione  $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1$  con  $p_2 = p$  è certo soddisfatta se si prende

$$p_1 \geq p/(p-1).$$

3. Un'altra formula analoga alle precedenti ma da esse distinta, è

$$(9) \quad \int_a^b dz \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, z)}{y-c} dy = \int_a^{*b} \frac{dy}{y-c} \int_a^b \Phi(y, z) dz$$

dove  $c$  denota un qualsiasi numero compreso fra  $a$  e  $b$ , ma indipendente da  $y$  e  $z$ .



Essa può facilmente dimostrarsi sotto le poco restrittive ipotesi che  $\Phi(y, z)$  sia una funzione sommabile di entrambe le variabili  $y$  e  $z$ , e che l'integrale

$$(10) \quad I = \int_a^b \frac{\Phi(y, z) - \Phi(c, z)}{y - c} dy$$

esista (nel senso di Lebesgue) e sia finito.

Infatti, detta  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  una qualsiasi successione di numeri positivi tendente a zero e posto per brevità

$$\int_a^{c-\varepsilon_n} + \int_{c+\varepsilon_n}^b \frac{\Phi(y, z)}{y - c} dy = \varphi_n(z),$$

è anzitutto chiaro che potrà scriversi

$$\int_a^b dz \int_a^{*b} \frac{\Phi(y, z)}{y - c} dy = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) dz$$

e così pure

$$\int_a^{*b} \frac{dy}{y - c} \int_a^b \Phi(y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{c-\varepsilon_n} + \int_{c+\varepsilon_n}^b \frac{dy}{y - c} \int_a^b \Phi(y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(z) dz,$$

il che mostra come tutto sia ridotto a far vedere che esiste il limite di  $\varphi_n(z)$  per  $n \rightarrow \infty$  e che si può applicare al calcolo del limite del suo integrale il teorema fondamentale di Lebesgue. Ora entrambe le cose sono immediata conseguenza dell'identità

$$\varphi_n(z) = \int_a^{c-\varepsilon_n} + \int_{c+\varepsilon_n}^b \frac{\Phi(y, z) - \Phi(c, z)}{y - c} dy + \Phi(c, z) \log \frac{b - c}{c - a}$$

da cui si trae subito che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = I + \Phi(c, z) \log \frac{b - c}{c - a}$$

e che

$$|\varphi_n(z)| \leq \int_a^b \left| \frac{\Phi(y, z) - \Phi(c, z)}{y - c} \right| dy + \left| \Phi(c, z) \log \frac{b - c}{c - a} \right|.$$

4. Siamo ora in grado di dimostrare rapidamente la (2), sotto le condizioni indicate in principio; cominciando con l'osservare che, utilizzando la prima delle (4), può scriversi

$$\Delta [F(x, y, z)] = \Delta [F(x, z, z)] + \int_a^{*b} \frac{dz}{z-x} \int_a^b \Phi(x, y, z) dy - \int_a^b dy \int_a^{*b} \frac{\Phi(x, y, z)}{z-x} dz.$$

Pertanto — supposto che la funzione  $\Phi(x, y, z)$  soddisfi alle condizioni di validità della (9) in cui sia stato posto  $c = x$  ed  $y$  e  $z$  siano scambiate fra loro, cioè supposto che  $\Phi(x, y, z)$  sia una funzione sommabile tanto di  $y$  quanto di  $z$  e che esista e sia finito l'integrale (5), ciò che fa parte delle nostre ipotesi — gli ultimi due termini dell'ultima uguaglianza si distruggeranno a vicenda e resterà semplicemente

$$\Delta [F(x, y, z)] = \Delta [F(x, z, z)].$$

Ciò premesso osserviamo che, utilizzando anche la seconda delle (4), potrà porsi

$$\Delta [F(x, z, z)] = F(x, x, x) \Delta [I] + \int_a^b \Psi(x, z) dz \int_a^{*b} \frac{dy}{y-z} - \int_a^b dy \int_a^{*b} \frac{\Psi(x, z)}{y-z} dz,$$

ma, servendosi della (6) con  $\varphi_1(x) \equiv \Psi(x, z)$ ,  $\varphi_2(y) \equiv 1$  si vede che, nelle nostre ipotesi, anche gli ultimi due termini della precedente uguaglianza si distruggono a vicenda; mentre, d'altro lato, si ha

$$\Delta [I] = -\pi^2$$

come è facile controllare con un calcolo diretto o, più semplicemente, servendosi del risultato già conseguito nel caso particolare (3); dunque in definitiva si ha

$$\Delta [F(x, y, z)] = \Delta [F(x, z, z)] = -\pi^2 F(x, x, x),$$

come volevasi dimostrare.

È superfluo indugiarsi ad illustrare l'importanza del risultato ora così semplicemente raggiunto. All'uopo può bastare l'osservazione retrospettiva che la teoria, oggi già tanto sviluppata (Giraud, Mikhlin, ecc.) delle equazioni integrali col valor principale di un integrale *multiplo*, s'iniziò non appena io ebbi mostrato come la (2) poteva venire estesa anche (sia pure con notevoli modificazioni) agli integrali doppi « con asterisco » <sup>(4)</sup>.

(4) Questi « Rendiconti » (6), 3, 535-539 (1926) e « Mathematische Zeitschrift », 27, 87-133 (1927).

**Geometria.** — *Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche.*  
 Nota III <sup>(\*)</sup> del Socio OSCAR CHISINI.

CONSIDERAZIONI TOPOLOGICHE.

16. *Treccia ampliata.* — La treccia algebrica è stata fino ad ora costruita (dai geometri che se ne sono occupati) in relazione ad una curva  $\gamma$  (del piano  $\pi_x$  rappresentativo della variabile complessa  $x$ ) composta coi successivi cappi che vanno ai punti di diramazione (propria ed impropria) della funzione algebrica  $y(x)$  definita dalla curva  $f(x, y) = 0$  di cui si considera la treccia <sup>(1)</sup>. Abitualmente si riferiva la curva  $f$  ad un sistema di assi tale che il punto improprio dell'asse  $y$  non appartenesse alla curva. Con questo la  $y(x)$  aveva un numero di valori uguale all'ordine della  $f$ , e quindi la treccia aveva anche lei questo stesso numero di fili.

Nella questione che trattiamo in questo lavoro hanno la maggior importanza le curve  $C_n^r$  che passano  $r$  volte per il punto  $Y_\infty$ , sicché i fili della relativa treccia sono  $n$ , anziché  $n + r$  quale è l'ordine della  $C_n^r$ , e quindi alcuni di essi hanno ordine maggiore di 1 <sup>(2)</sup>.

Convien pertanto ampliare la treccia della  $C_n^r$  considerando che la curva  $\gamma$  comprenda anche  $r$  cappi che vadano ai poli della  $y(x)$  collocati al finito. (Essi sono i punti  $x_i$  tali che la retta  $x = x_i$  sia tangente a un ramo della  $C_n^r$  passante per il punto  $Y_\infty$ ).

Così la treccia verrà ampliata contenendo  $r$  tratti (corrispondenti ai detti cappi), per ciascuno dei quali avviene che il filo, rappresentativo della determinazione che acquista il polo, fa un giro negativo intorno al complesso degli altri <sup>(3)</sup>.

La forma canonica della treccia così ampliata, che indichiamo con  $T_n^r$ , è presto ottenuta riferendosi ad una  $C_n^r$  prossima ad altra  $C_n^r$  spezzata in una  $C_n$  ed in  $r$  rette,  $a_1, a_2, \dots, a_r$  passanti per il punto  $Y_\infty$  (vedi figura 1). Si passa da questa curva spezzata alla  $C_n^r$  irriducibile sciogliendo — con piccola variazione — gli  $r$  punti doppi  $D_{i1}$  costituiti dalle intersezioni di ciascuna retta  $a_i$  con un determinato ramo (ramo 1) della  $C_n$  e conservando come doppi gli altri punti di intersezione delle rette con la  $C_n$  (e come  $r$ -plo il punto

(\*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1954.

(1) Cfr. O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane* (« Rend. Ist. Lombardo », 23, XI, 1933), in particolare §§ 3 e 4. In questa Nota la treccia è chiamata fascio caratteristico.

(2) Ibidem, § 4.

(3) Infatti: se il punto  $x_1$  è un polo nel quale diviene infinito il valore  $y = y_1$  relativo al primo filo della treccia, esso è un polo anche per ciascuna delle differenze  $y_1 - y_i$ , con  $i = 2, 3, \dots, n$ , e quindi un giro in  $(\pi_x)$  del punto  $x$  intorno ad  $x_1$  produce un incremento di  $-2\pi$  nell'argomento di  $y_1 - y_i$ , cioè per esso il filo 1 fa un giro negativo intorno al complesso degli altri (Cfr. Nota sopra citata, § 2).



$Y_\infty$ ). Per avere poi la treccia  $T_n^r$  si assumeranno successivi il cappio che va al polo  $z_i$  (ascissa del punto  $Z_i$  dell'asse  $x$  tagliato dall'asintoto della  $C_n^r$  prossimo alla retta  $a_i$ ): e poi, ordinatamente, i cappi che vanno alle ascisse dei punti doppi  $D_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $j = 2, 3, \dots, n$ ) intersezioni della retta  $a_i$  col ramo  $j$  della  $C_n^r$ .

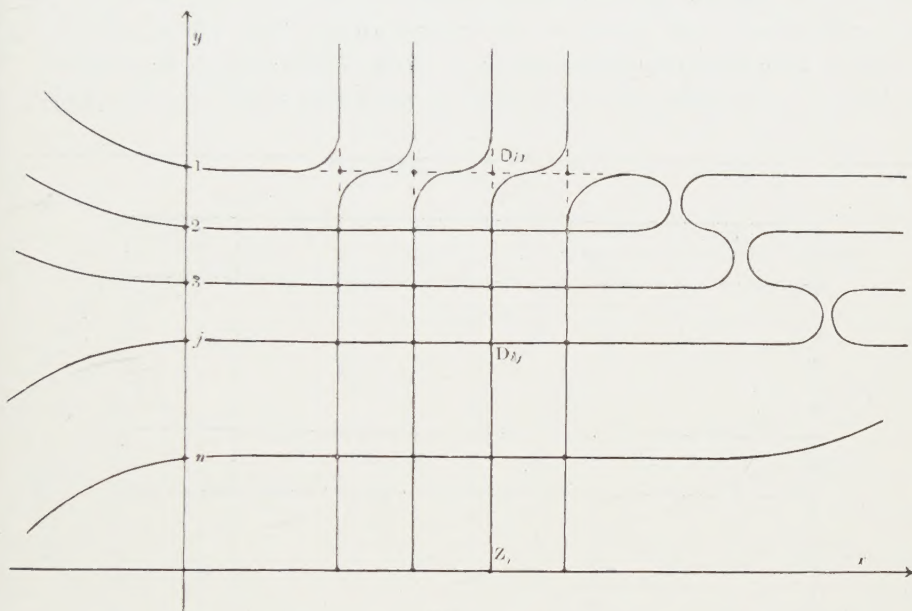


Fig. 1.

La treccia  $T_n^r$  risulta pertanto di  $n$  fili e così costituita:

*a)* si ha un primo gruppo di  $n$  tratti successivi, nel primo dei quali il filo 1 avvolge una volta, negativamente, il complesso degli altri  $n - 1$  fili che scorrono paralleli; seguono altri  $n - 1$  tratti canonici del tipo  $12^2, 13^2, \dots, 1n^2$ ;

*b)* si hanno altri  $r - 1$  gruppi uguali al precedente;

*c)* in fine si ha la treccia canonica  $T_n$  relativa alla  $C_n$ .

Si osservi che togliendo i tratti che corrispondono agli  $r$  poli (al finito) risulterebbe una treccia in cui il filo 1 ha l'ordine  $r$  (e gli altri ordine 1). Si osservi anche che quando la  $C_n^r$  è prossima alla forma spezzata il primo gruppo di tratti (e gli analoghi  $r - 1$  successivi) è relativo a punti di diramazione (impropria) prossimi fra loro (qui anche il polo è considerato come un punto di diramazione).

17. *Definizione.* — Quando si considera la treccia rappresentativa di una curva variabile, accade che due tratti consecutivi vengano a fondersi, per il fatto che i due punti di diramazione corrispondenti sono venuti a coincidere, e così si sono riuniti in uno solo i due cappi relativi. Sulla treccia tale operazione si ottiene semplicemente togliendo il diaframma che separa

i due tratti consecutivi. Tale operazione (estendibile al caso di tre tratti consecutivi, cosa che avviene quando si origina una cuspidale) verrà chiamata fusione e indicata col simbolo F.

18. Seguiamo ora sopra la treccia ampliata  $T_n^r$  della  $C_n^r$  la trasformazione che fa passare successivamente dalla  $C_n^r$  alla  $Q_n^r$  e da questa alla  $Q_n$  (che conserva i  $\delta$  nodi e le  $k$  cuspidi acquisiti). La prima parte nella trasformazione è rappresentata nella figura 2 dalla traiettoria  $\tau$ ; la seconda da una linea  $\lambda_i$  contenuta nello spazio  $L_i$  (e possiamo supporla una retta).

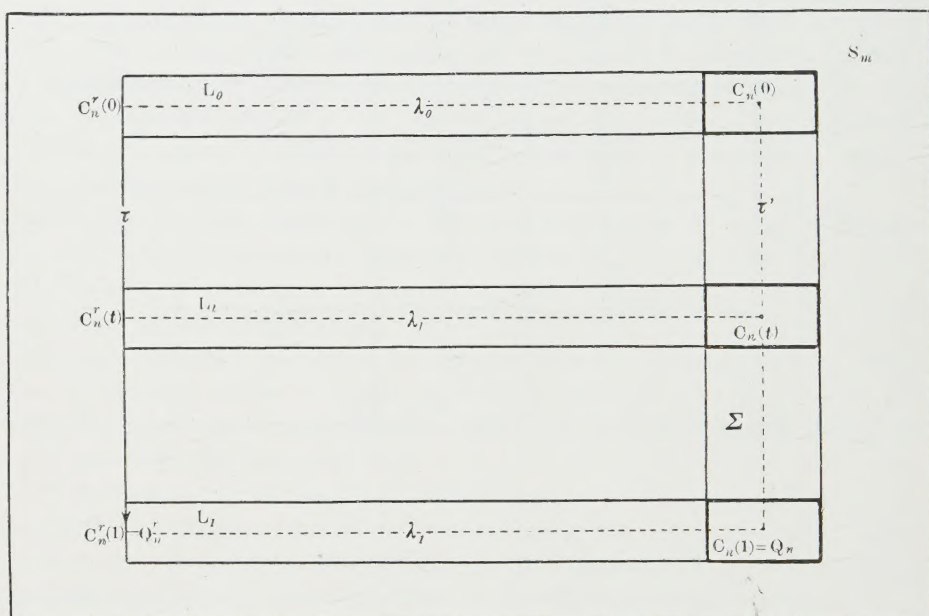


Fig. 2.

Siccome per la  $C_n^r$  è arbitraria la posizione dei punti di diramazione (effettiva), possiamo muovere liberamente questi entro il piano  $\pi_x$  riunendoli a coppie o a terne in modo da formare nodi e cuspidi e lasciare transitivo il gruppo di monodromia della corrispondente funzione  $y(x)$ .

Qui bisogna tener ben presente che per fare acquistare un nuovo punto doppio (o una nuova cuspidale) non si possono fondere due (o tre) tratti consecutivi se essi non sono uguali <sup>(4)</sup> (e in particolare relativi ad uno stesso scambio sui valori della  $y$ ).

Ciò premesso, si consideri il caso in cui si fanno coincidere due tratti consecutivi uguali, relativi a due cappi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , che vanno ai due punti di diramazione  $x_1$  e  $x_2$  (con legato un medesimo scambio). Può darsi che

(4) Cfr. O. CHISINI, *Courbes de diramation des plans multiples et tresses algébriques*, « Deuxième Colloque de Géométrie algébrique », p. 11; Liège (1952).

nell'area compresa fra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (e il cammino percorso da essi per venire a coincidere) venga a trovarsi racchiuso qualche punto, che indichiamo genericamente con  $\xi$ , che sia di diramazione quale ascissa di un punto doppio originario o quale polo, sia cioè diverso dagli  $m = n(n-1)$  punti di diramazione effettiva che si possono variare ad arbitrio (facendoli, ove si voglia, coincidere o anche conservare coincidenti), e si può quindi impedire che essi cadano nella detta area.

Ora i due cappi posson esser portati a coincidere (quale si sia il cammino percorso dai loro estremi) variandone via via la forma in modo che uno solo

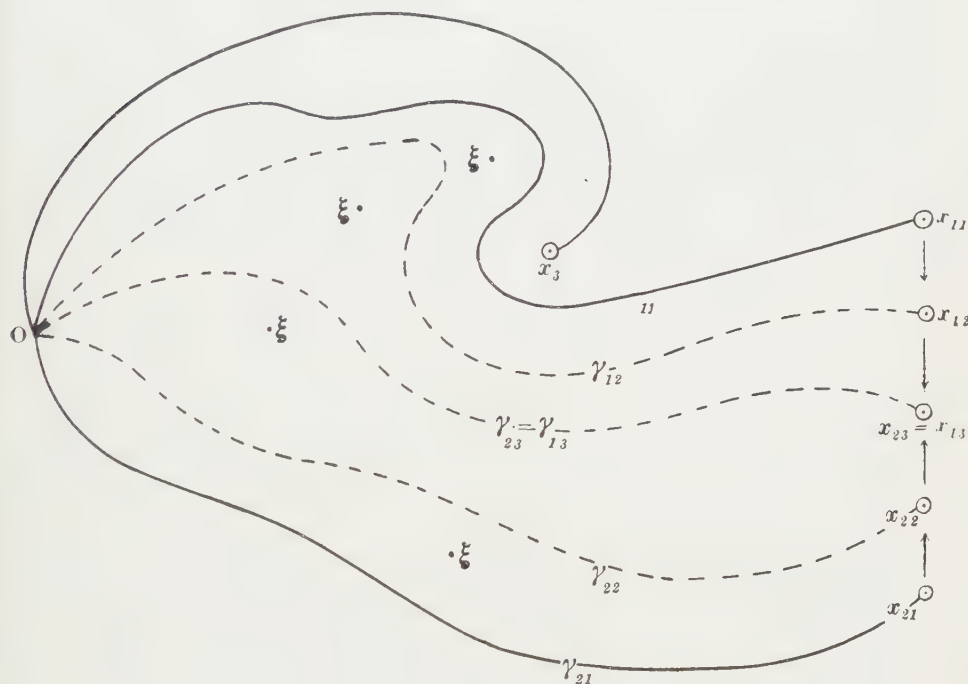


Fig. 3.

di essi (diciamo  $\gamma_1$ ) sia attraversato dagli eventuali punti  $\xi$  (vedi figura 3 dove  $x_{11}, x_{12}, x_{13}$  indicano le successive posizioni di  $x_1$  e  $x_{21}, x_{22}, x_{23} = x_{13}$  quella di  $x_2$  e dove è usata analoga indicazione per i cappi). Nella figura,  $x_3$  indica un terzo generico punto di diramazione la cui presenza porta la forma contorta dei cappi, ma che — tuttavia — potrebbe essere spostato in modo da non influire, essendo uno degli  $m$  punti di diramazione di cui è arbitraria la posizione.

D'altra parte — al limite — l'unico cappio  $\gamma_{23} = \gamma_{13}$  dà per ipotesi la sostituzione identica venendo a corrispondere ad un punto doppio acquisito della  $C'_n$ ; segue (cfr. il secondo capoverso di questo paragrafo) che il cappio  $\gamma_1$  rimane invariato dopo esser stato attraversato da tutti i punti  $\xi$ . Tutto ciò significa che, per quanto riguarda i tratti di treccia relativi agli  $m$  punti



di diramazione (effettiva) della  $C_n^r$ , la loro fusione a coppie (o analogamente a terne) per generare punti doppi (o cuspidi) acquisiti avviene come se i detti punti  $\xi$  non esistessero.

Percorsa la traiettoria  $\tau$ , la  $C_n^r$  diviene la  $Q_n^r$  dotata dei  $\delta$  nodi e delle  $k$  cuspidi acquisite. Nel secondo tempo, descrivendo (entro  $L_x$ ) la traiettoria  $\lambda_x$ , la  $Q_n^r$  si spezza staccandosi da essa  $r$  rette  $a_i$  per  $Y_\infty$ . Contemporaneamente, come preciseremo fra poco, i punti doppi originari vanno a cadere in punti comuni alla  $Q_n$  e alle  $r$  rette  $a_i$ ; si ha cioè una trasformazione inversa a quella con la quale si è costruita (n. 16, quinto capoverso) la  $C_n^r$  generica a partire da una  $C_n$  e dal gruppo delle  $a_i$ . Nel piano  $\pi_x$  questa trasformazione porta la riunione di ciascun polo  $z_i$  col gruppo degli  $n - 1$  punti di diramazione (impropria) che sono ascisse degli  $n - 1$  punti doppi  $D_{ij}$  (con  $i$  fisso e  $j$  variabile da 2 ad  $n$ ). La fusione degli  $n$  tratti di treccia corrispondenti porta un tratto unico contenente  $n$  fili resi mutuamente paralleli (le torsioni negative dovute al polo  $z_i$  distruggono quelle positive dovute ai punti doppi  $d_{ij}$  ascisse dei punti doppi  $D_{ij}$ ).

Questo tratto complessivo può alla fine essere eliminato togliendo i due setti che lo separano dai due tratti adiacenti. La treccia che rimane è quella della  $Q_n$ .

Ora precisiamo, dimostriamo cioè che lo staccamento delle  $r$  rette  $a_i$  (cioè la riunione di ciascun gruppo di punti di diramazione impropria  $d_{ij}$  e  $z_i$ ) è fatto con la perdita dei punti doppi originari (e non di alcun altro - nodo o cuspidi - acquisito) e avviene senza che si modifichi la treccia  $T_n$  che - alla fine - sola rimane a rappresentare la  $Q_n$  (a priori la cosa potrebbe accadere quando un cappio  $\gamma$ , relativo a un tratto della  $T_n$ , venga attraversato da un punto  $d_{ij}$  o  $z_i$ ).

Si consideri infatti una  $C_n(o)$  appartenente alla  $\Sigma$  e allo spazio  $L_o$  (fig. 2) e colleghiamola alla  $C_n^r(o)$  mediante una linea (traiettoria)  $\lambda_o$ , contenuta in  $L_o$ , che possiamo immaginare rettilinea. In ciascun spazio  $L_t$  possiamo considerare una analoga linea  $\lambda_t$  che collega  $C_n^r(t)$  con  $C_n(t)$ . La  $C_n(t)$  al variare di  $t$  nell'intervallo  $0 \rightarrow 1$  descrive una traiettoria  $\tau'$  che collega la  $C_n(o)$  con la  $C_n(1) = Q_n$ .

Ora noi abbiamo ottenuto la  $Q_n$  (e conseguentemente la sua treccia  $T_n$ ) passando successivamente dalla  $C_n(o)$  alla  $C_n^r(o)$  lungo la  $\lambda_o$ , dalla  $C_n^r(o)$  alla  $C_n^r(1) = Q_n^r$  lungo la  $\tau$ , dalla  $Q_n^r$  alla  $Q_n$  lungo la  $\lambda_x$ . Spostando ciascun punto di  $\tau$  lungo la linea  $\lambda_t$  che vi passa (e ciò contemporaneamente per tutti i punti) questo passaggio complessivo può essere ridotto (per continuità) alla sola traiettoria  $\tau'$ . Ora la  $\tau'$  è costituita da (punti immagini di) curve spezzate in una  $C_n$  ed in  $r$  rette  $a_i$  (ben determinate quando la  $C_n$  sia considerata come limite di una  $C_n^r$  variabile sulla  $\lambda_t$  che vi passa); segue anzitutto che per la  $Q_n$ , come per la  $C_n(o)$  iniziale, i punti doppi originari sono tutti intersezioni con le rette  $r_i$ ; inoltre guardando le cose sul piano  $\pi_x$ , accade che  $d_{ij} = z_i$  qualunque sia il valore di  $j$  (e - inteso - anche di  $i$ ), sicché l'attraversamento di  $\gamma$  vien fatto contemporaneamente dal gruppo di punti  $d_{ij}$  e  $z_i$ . Poiché le torsioni prodotte da questi punti di diramazione

(impropria) mutuamente si elidono, tale attraversamento non altera il tratto di treccia relativo al coppia  $\gamma$ .

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che la treccia  $T_n$  relativa alla  $Q_n$  dotata di  $\delta$  nodi e  $k$  cuspidi aggiuntive è quella stessa che si sarebbe ottenuta operando direttamente sulla treccia canonica della  $C_n$  iniziale movendone liberamente gli  $m$  punti di diramazione e fondendo a coppie (o terne) tratti uguali consecutivi (ottenuti — naturalmente — operando anzitutto sulla treccia le opportune trasformazioni  $P$ ,  $S$ , ed eventualmente  $K$ ).

19. Le considerazioni del paragrafo precedente e la loro conclusione, possono essere fissate enunciando il

TEOREMA D'ESISTENZA. — Data la treccia canonica di una curva piana algebrica di ordine  $n$ ,  $C_n$ , si operi su questa mediante le operazioni  $P$ ,  $S$ ,  $F$  (ed eventualmente  $K$ ) passando ad una nuova treccia con  $\delta$  tratti rappresentativi di punti doppi e  $k$  rappresentativi di cuspidi; sotto la condizione che sia

$$\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3$$

la treccia così ottenuta è rappresentativa di una curva  $Q_n$  (ancora d'ordine  $n$ ) effettivamente esistente.

20. *Osservazioni.* — Si è supposto di fondere tratti consecutivi di treccia riunendo punti di diramazione in modo da conservare la transitività del gruppo di monodromia; qualora questa non fosse conservata, la curva  $Q_n$  continua ad esistere, tuttavia spezzata (contenendo anche eventualmente l'intorno del punto  $Y_\infty$  e quindi riuscendo dotata di fili di ordine superiore al primo).

Nel caso della irriducibilità la osservazione fatta al paragrafo 14 garantisce che fra le varie  $Q_n$  omologiche rappresentate dalla stessa treccia (e relative agli stessi punti di diramazione, propria od impropria) la generica non si riduce ad una retta contata  $n$  volte.

Notiamo ancora che il risultato si estende ovviamente anche al caso di tratti della treccia che rappresentino singolarità più complesse di quelle considerate ed anche a tratti che rappresentino flessi paralleli all'asse  $y$  o cose analoghe. Quello che importa è che la riunione dei punti di diramazione, cioè la conseguente fusione dei tratti, implichi complessivamente meno di  $\frac{n(n+3)}{2} - 3$  condizioni del tipo

$$x_i - x_j = 0$$

essendo  $x_i$  ed  $x_j$  due punti di diramazione in qualche modo individuati.

**Patologia comparata.** — *Sterilizzazione dei tessuti ed immunità. La scoperta di Edoardo Jenner. Vaiuolo e tumori maligni.* Nota II (\*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Come si è detto nella Nota precedente<sup>(1)</sup>, ancora sussiste il contrasto tra la *Teoria di Weismann*, che sostiene il *germe* abbia solo *potere germinativo*, ed i più recenti risultati delle ricerche, che dimostrano anche il *soma* abbia lo stesso potere. Tale diversità, fondata in parte su presupposti teorici, è necessario sia eliminata, perché il *potere germinale* dei tessuti, oltre ad essere evidente in fenomeni diversi, come in altre Note ho dimostrato<sup>(2)</sup>, è condizione essenziale per le illazioni, che potrebbero trarsi per la loro *sterilizzazione* e per la eventuale *immunità* di tutto l'organismo per determinate forme morbose. La nuova via, che da me fu additata nel 1950<sup>(3)</sup>, non essendo stata riconosciuta da alcuno, m'indusse a ricercare se potesse meglio riconoscersi con il metodo comparativo, preconizzato da B. Grassi.

Con tale indirizzo, avendo fatto ricerche fra i morbi, che spesso sono stati causa di grave epidemia non di origine batterica, i più evidenti confronti con il *cancro* sono stati quelli offerti dal *vaiuolo*.

Il *vaiuolo* fu importato in Europa nel 1700, proveniente dall'*Asia orientale* (Cina-Arabia) dopo essere passato per l'Etiopia, l'Africa settentrionale e la Turchia. In Europa la mortalità fu tale da raggiungere l'8-11 %, per cui in conformità di una pratica, adottata in Cina, a diminuire l'epidemia fu proposto d'infectare i giovani, prima di essere colpiti dal male, a mezzo della *vaiuolizzazione*, ottenuta con l'innesto delle pustole dei malati. Con tale pratica elementare, che pure prometteva un maggiore e definitivo sviluppo, si otteneva spesso l'attenuazione del vaiuolo ed anche, più raramente, la immunità; ma per l'incostanza del risultato essa fu proibita alla fine del 1700.

A tal punto erano le condizioni sanitarie dell'epidemia, quando cominciò ad interessarsene un medico di campagna, amante delle *Scienze della natura*, Edoardo Jenner (1749-1823) discepolo di Giovanni Hunter (1728-1793), anatomico, che primo introdusse in Inghilterra l'insegnamento dell'*Anatomia patologica*. Mentre l'epidemia imperversava in Inghilterra, Jenner

(\*) Presentata nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) « Rend. Acc. Lincei », 1954.

(2) A. RUSSO, *Etiologia dei tumori ed i due fattori che vi collaborano*, « Atti Accad. Gioenia », Catania 1953.

(3) « Atti Acc. Gioenia », 1950.



seppe che l'uomo poteva infettarsi con il *vaiuolo bovino* (*Cow-pox*) e che dopo era immune di altre infezioni. Ne riferì al Maestro, che consigliò di attendere che un caso si presentasse per essere studiato. Qualche tempo dopo, Jenner fu, difatti, informato che una donna, mungitrice di latte, era stata colpita dallo stesso male di cui era infetta una vacca dell'Azienda; fu allora che egli prese il *pus* delle pustole della donna e lo innestò in diversi punti della cute di un giovane, nel quale vide, dopo qualche tempo, formarsi la stessa pustola, che guarita, lasciò l'immunità da successive infezioni. Dopo 18 mesi del fenomeno, Jenner nel 1793 comunicò il primo caso del grande avvenimento alla *Royal Society* di Londra.

In base alle conoscenze, acquisite su l'immunità del *vaiuolo*, si è dedotto che, nonostante la diversità delle manifestazioni esteriori, potesse esistere qualche punto comune con il *cancro*. La comunanza sarebbe avvalorata dal noto fenomeno, che il *filtrato del sarcoma del pollo*, iniettato in soggetto sano, riproduce il *sarcoma*, dando al liquido valore di *virus*, analogo a quello della *pustola*, avendo entrambi lo stesso potere riproduttivo. Anche il *fattore del latte*, riscontrato nel *Carcinoma* della mammella nei topi, che si trasmette ai sani con l'allattamento, potrebbe confermare lo stesso potere riproduttivo di un *virus* così sottile da non essere riconosciuto se non per gli effetti. Gli stadi, osservati in natura nel *vaiuolo* da Jenner per raggiungere l'immunità, si accorderebbero con i fenomeni sopra cennati, i quali nel *cancro* si compirebbero per raggiungere lo stesso scopo, come nello schema.

<b>Vaiuolo</b>	Pustola	Parte liquida ( <i>pus</i> ) <i>virus</i>	innesto su cute di organi- smi sani	riproduzione delle pustole del vaiuolo	Immunità per il vaiuolo
<b>Cancro</b>	Sarcoma	Parte liquida, filtrata dal Sarcoma - <i>virus</i>	Iniezione in organismo sano	riproduzione del Sarcoma	Immunità per il cancro (?)

È utile avvertire che i nostri studi, a differenza di altri, diretti a curare il *cancro*, quando si è impiantato nei tessuti o per impedire il diffondersi con le *metastasi*, ricercando la causa fondamentale, sono diretti alla *immunità* da tanto male. Le vantate guarigioni con i più diversi prodotti, dopo un primo successo, furono finora smentite! . . .

**Fisiologia.** — *Modificazioni dei riflessi spinali nell'uomo in seguito a somministrazione di una dose moderata di caffeina per bocca* (\*). Nota di TORQUATO GUALTIEROTTI e RODOLFO MARGARIA, presentata (\*\*) dal Socio R. MARGARIA.

In precedenti lavori<sup>(1)</sup> è già stato riferito come la somministrazione di caffeina modifichi profondamente i riflessi spinali nella rana. L'effetto rilevato era duplice: aumento dell'ampiezza per una sincronizzazione parziale dei potenziali d'azione e diminuzione della durata della risposta riflessa. Si era anche visto che l'azione della caffeina si esercitava sui centri spinali sia direttamente, che indirettamente attraverso l'encefalo.

Nelle ricerche di cui vien qui dato un breve cenno preliminare, si è voluto esaminare l'effetto sui riflessi spinali dell'uomo di modeste (250 mgr) dosi di caffeina<sup>(2)</sup>. A questo scopo la caffeina veniva somministrata in una tazza di caffè (decaffeinizzato), in modo da riprodurre anche psicologicamente le condizioni di usuale assunzione della sostanza.

È stato scelto il riflesso patellare perché è la forma di attività più semplice, trattandosi verosimilmente di un riflesso monosinaptico e perché è il più facile da provocare. La percussione sul tendine veniva attuata automaticamente mediante un percussore azionato da una molla e comandato da un elettromagnete eccitato ad una frequenza determinata, di solito 40 in 1'. Il potenziale d'azione del quadricipite veniva rilevato per mezzo di elettrodi a placca applicati sulla cute al di sopra del muscolo, e convogliato attraverso un amplificatore a doppio canale in collegamento diretto ad un tubo a raggi catodici. I potenziali muscolari venivano raccolti contemporaneamente da due punti del muscolo, uno posto al terzo superiore del quadricipite, ove determinazioni preliminari hanno dimostrato la concentrazione della maggior parte delle placche motrici del muscolo; l'altro posto il più vicino possibile all'estremo patellare. I due elettrodi distavano così circa 20 cm: l'elettrodo di riferimento, comune ai due elettrodi attivi era posto sulla gamba controlaterale. La partenza dell'asse dei tempi era comandata dalla percussione del martelletto automatico sul tendine del muscolo, e la durata dell'asse dei tempi medesimo era uguale a 50 millisecondi.

In questo modo era possibile registrare i seguenti quattro parametri della risposta riflessa: 1° *il tempo riflesso lordo*, e cioè l'intervallo tra la percussione del martelletto e l'inizio della risposta muscolare a livello delle placche motrici; 2° *la durata della manifestazione elettrica muscolare*; 3° *l'ampiezza del po-*

(\*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) T. GUALTIEROTTI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », 16, fasc. 2, 263-265 (1954) e fasc. 3, 385-387 e « J. physiol. », in corso di stampa.

(2) In un comune caffè espresso sono contenuti circa 55 mgr. di caffeina.

tenziale elettrico muscolare, che è in relazione col *numero di fibre* che entrano in attività contemporaneamente; 4° *il tempo di conduzione muscolare* ricavato dall'intervallo tra l'inizio della risposta a livello delle placche motrici e l'inizio della risposta dal capo patellare del muscolo: dividendo questo valore per la distanza fra gli elettrodi si ottiene la *velocità di conduzione dell'eccitamento nel muscolo*.

Per studiare l'effetto della caffeina sono stati scelti soggetti nei quali la variabilità dei parametri del riflesso fosse la più piccola possibile. Il tempo riflesso e quello di conduzione muscolare in una serie di risposte riflesse nello stesso individuo erano assai costanti, con una variabilità inferiore all'1 % . Le variazioni di ampiezza nella risposta non superavano il 10 % .

I risultati della somministrazione di 250 mgr di caffeina furono i seguenti.

A un'ora circa dall'ingestione (fig. 1):

a) i potenziali muscolari aumentavano improvvisamente di *ampiezza* fino al doppio e più del valore normale. Questo aumento di ampiezza si manteneva, con tendenza a diventare maggiore, fino all'inizio della quinta ora. In seguito, in circa mezz'ora, il valore ritornava alla norma;

b) *il tempo riflesso totale* appariva diminuito fin del 10 % circa del suo valore normale. Nel caso della fig. 1 scendeva da 18 a 16 msec;

c) *la durata della manifestazione elettrica* non appariva modificata apprezzabilmente e

d) *il tempo di conduzione muscolare* risultava invariato.

Il dato di maggior interesse pare essere la riduzione del tempo riflesso: essa si verificava anche nei soggetti in cui una maggiore variabilità nell'ampiezza del riflesso normale poteva rendere meno significativo l'aumento di ampiezza in seguito a caffeina. Pare improbabile che la riduzione del tempo riflesso sia dovuta a riduzione del tempo di conduzione dell'impulso lungo la fibra nervosa: più verosimilmente è abbreviato il ritardo sinaptico centrale (tempo riflesso netto) o il ritardo a livello della placca neuromotrice. Che la caffeina eserciti un'azione a livello delle sinapsi midollari, sia sensitive che motorie, era stato dimostrato già nelle ricerche sperimentali sulla rana (1954). D'altra parte una diminuzione del tempo riflesso medio può essere l'espressione di una sincronizzazione delle sinapsi dei neuroni internunciali o di un vero abbreviamento a livello delle singole sinapsi. Poiché il riflesso patellare può essere considerato monosinaptico, la seconda ipotesi è quella alla quale ci si deve attenere. Anche l'aumento di ampiezza della risposta elettrica riflessa può essere dovuto: a) ad una maggior sincronizzazione dei neuroni sensitivi e motori, implicati nel riflesso, e in questo caso la durata della manifestazione elettrica dovrebbe diminuire per la concentrazione di tutti gli impulsi in un tempo più breve; oppure: b) ad un aumento del numero dei neuroni in attività, per l'abbassamento della soglia dei neuroni interessati. Poiché la durata della manifestazione elettrica non appare variata, la seconda possibilità appare la più probabile, tanto più che è anche in accordo con l'ipotesi che il riflesso sia monosinaptico.

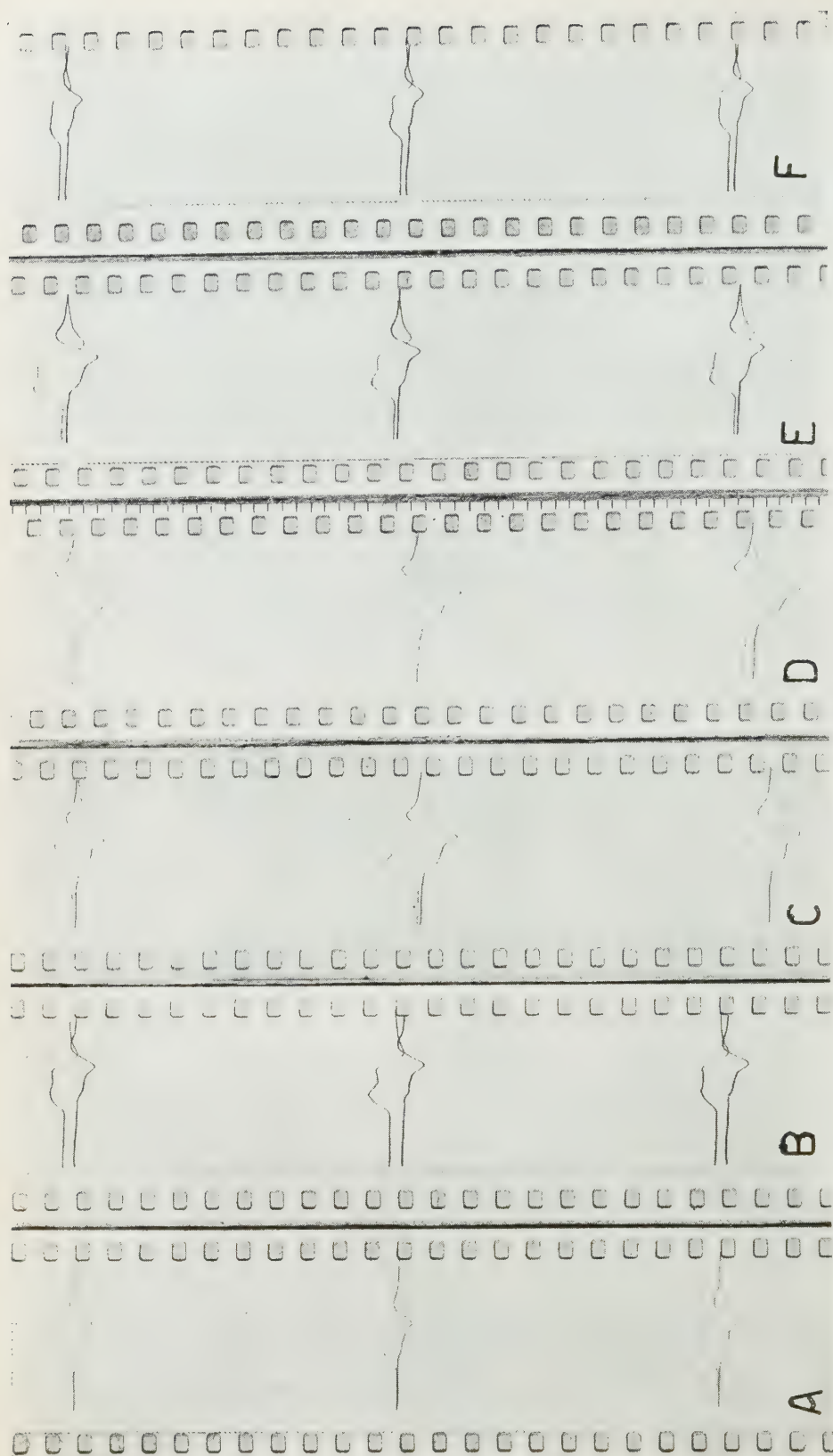


Fig. 1. - Effetto di 250 mgr di caffeina per somministrazione orale.

Dall'alto al basso: 3 stimoli successivi susseguentisi alla frequenza di 40 per 1'. In ogni risposta riflessa la traccia superiore corrisponde alla registrazione dal punto più vicino alle placche motrici; la traccia inferiore alla registrazione dall'estremo patellare del muscolo. Distanza tra gli elettrodi: 20 cm. Le due onde sono state registrate in opposizione di fase per facilitare la lettura: negatività verso l'alto per la traccia superiore, verso il basso per la traccia inferiore.

A) risposta normale; B) 1 hr 7' dopo la somministrazione di caffeina; C) 1 hr 22' dopo la somministrazione di caffeina; D) 2 hr 22' dopo la somministrazione di caffeina; E) 4 hr 22' dopo la som-



Dai risultati riferiti non è possibile stabilire se l'azione della caffeina sia dovuta ad un effetto diretto sui centri midollari o indiretto tramite i livelli superiori del sistema nervoso centrale.

La mancanza di variazioni nel tempo di conduzione muscolare fa pensare che non ci sia influenza diretta sulla fibra muscolare, almeno nelle dosi usate.

Degna di rilievo è la lunga durata dell'effetto caffeinico anche in dosi così modeste. Come si è visto, infatti, 250 mgr di caffeina modificavano il riflesso spinale per ben quattro ore, e la modificazione rimaneva costante per tutto questo periodo. Ciò può significare o che la dose di caffeina superava di molto la soglia di sensibilità chimica del sistema nervoso centrale, sì che un lungo tempo era necessario per ridurne la concentrazione al disotto della dose critica, oppure, più probabilmente, che esiste un lungo effetto postumo della caffeina sulle cellule nervose. Anche questo dato conferma quanto era stato visto sperimentalmente sull'animale.

In conclusione si può dire che una dose anche piccola di caffeina esercita una duplice azione: diminuisce il ritardo sinaptico e abbassa la soglia di eccitazione dei neuroni interessati nell'arco riflesso spinale; non sembra alterare la funzionalità muscolare.

Un cordiale ringraziamento è dovuto ai dott. Crippa e Berger per l'aiuto finanziario che ha reso possibile questa ricerca.

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina del polistirolo isotattico* (\*).  
Nota del Socio GIULIO NATTA e di PAOLO CORRADINI, presentata (\*\*) dal Socio G. NATTA.

In una Memoria recentemente presentata a questa Accademia da uno degli Autori <sup>(1)</sup> si erano descritti per la prima volta polimeri di  $\alpha$ -olefine del tipo  $\text{CHR}=\text{CH}_2$  (dove R è un gruppo alchilico od arilico), caratterizzati dal possedere una eccezionale regolarità di struttura a cui corrisponde una elevata temperatura di fusione ed una notevole tendenza a cristallizzare. A tali polimeri, la cui catena contiene sequenze di atomi di carbonio asimmetrici aventi la stessa configurazione sterica, alternati a gruppi metilenici, è stato proposto il nome di « isotattici ».

In una Memoria successiva venivano riferiti dagli Autori alcuni dati preliminari sulla struttura cristallina del polipropilene isotattico quale appariva da indagini röntgenografiche.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) G. NATTA, Memoria presentata nella seduta dell'11 dicembre 1954 all'Accademia dei Lincei.

Comunichiamo in questa Nota delle notizie preliminari sulla struttura cristallina del polistirolo isotattico, sulla cui identificazione si era già accennato nelle prime Memorie. Tale polimero, per pesi molecolari degli ordini di grandezza  $10^5$ - $10^6$ , presenta una densità di 1,08-1,09, ed una temperatura di transizione di 1° ordine di oltre  $210^\circ$ .

SPETTRI X DEL POLISTIROLO REGISTRATI CON CONTATORE DI GEIGER. - I primi polimeri greggi del polistirolo contenenti una certa proporzione di polimero isotattico, da noi esaminati, erano stati preparati con particolari

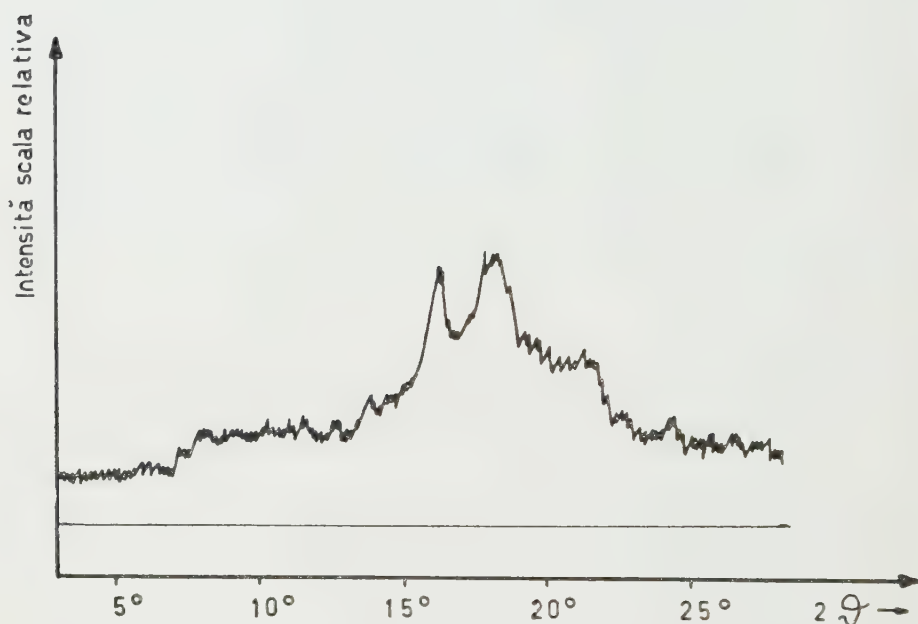


Fig. 1. - Registrazione con contatore Geiger dello spettro ai raggi X di polistirolo greggio non ricotto.

procedimenti di catalisi eterogenea, su cui verrà riferito dettagliatamente in prossimi lavori. Essi erano risultati costituiti da una miscela di polimeri a diverso grado di solubilità e fornivano degli spettrogrammi ai raggi X (ant. Cu) che presentavano (fig. 1) delle righe attribuibili a sostanza cristallina, sovrapposte a bande dovute a sostanza amorfa, aventi, queste ultime, intensità e posizione identiche a quelle presenti nel polistirolo amorfo commerciale.

Il frazionamento del prodotto con solventi ha fornito due frazioni, una solubile e l'altra insolubile in etere.

Lamine della frazione insolubile in etere, ottenute per riscaldamento al disopra della temperatura di fusione ( $> 210^\circ$ ) e stampaggio in pressa seguito da lento raffreddamento, forniscono degli spettri ai raggi X del tipo di quello riportato in fig. 2 (tubo con anticatodo di Cu, registrazione con contatore Geiger) contenenti delle righe molto più nette di quelle presenti in fig. 1. Ciò è dovuto



anche al fatto che i cristalli di questi polimeri tendono a ingrossare, come già visto nel caso del polipropilene, se mantenuti a temperature leggermente più basse della temperatura di fusione e presentano perciò netti diagrammi di diffrazione qualora vengano ricotti per lungo tempo a tali temperature.

Abbiamo indicato i primi quattro riflessi che compaiono sul fotogramma con le lettere  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $B_1$ .

Se una lamina di polistirolo isotattico cristallino, dopo riscaldamento al di sopra del punto di fusione, viene bruscamente raffreddata, essa fornisce un

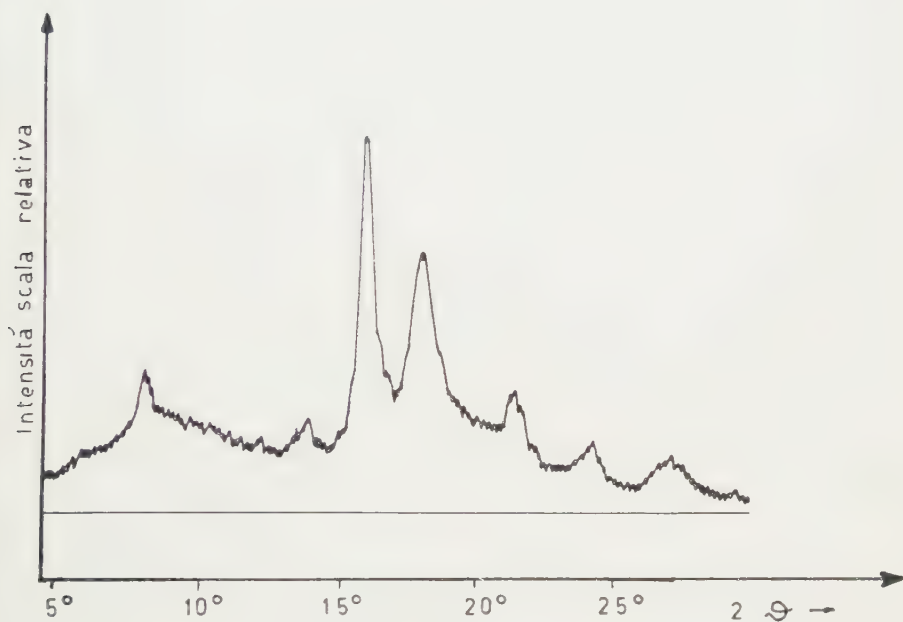


Fig. 2. — Registrazione con contatore di Geiger dello spettro ai raggi X di polistirolo isotattico cristallino dopo ricottura.

diagramma di diffrazione esattamente identico a quello del polistirolo non isotattico, che è completamente amorfo.

Inoltre, analogamente a quanto constatato per il polimetilene <sup>(2)</sup> ed il polipropilene <sup>(3)</sup>, ed in condizioni presso a poco uguali, è facile ottenere lamine che presentano fenomeni di orientamento « a feltro », con l'asse  $c$  dei cristalli giacente nel piano delle lamine. Se si esamina pertanto per riflessione una lamina così orientata, si osservano solo le riflessioni  $hko$  e manca in tal caso la banda  $B_1$  (fig. 3) che si deve ritenere proveniente da un piano inclinato sull'asse  $c$ .

(2) G. NATTA-P. CORRADINI, Lavoro in corso di stampa sulla « Ricerca Scientifica », presentato al Simposio di Chimica Macromolecolare di Milano-Torino del 1954.

(3) G. Natta-P. CORRADINI, Memoria presentata l'11 dicembre 1954 all'Accademia dei Lincei.

Lo spettro registrato con contatore Geiger del polimero non isotattico (parte solubile in etere del polimero greggio) corrisponde a quello di un prodotto amorfo e coincide praticamente con lo spettro di un comune polistirolo commerciale.

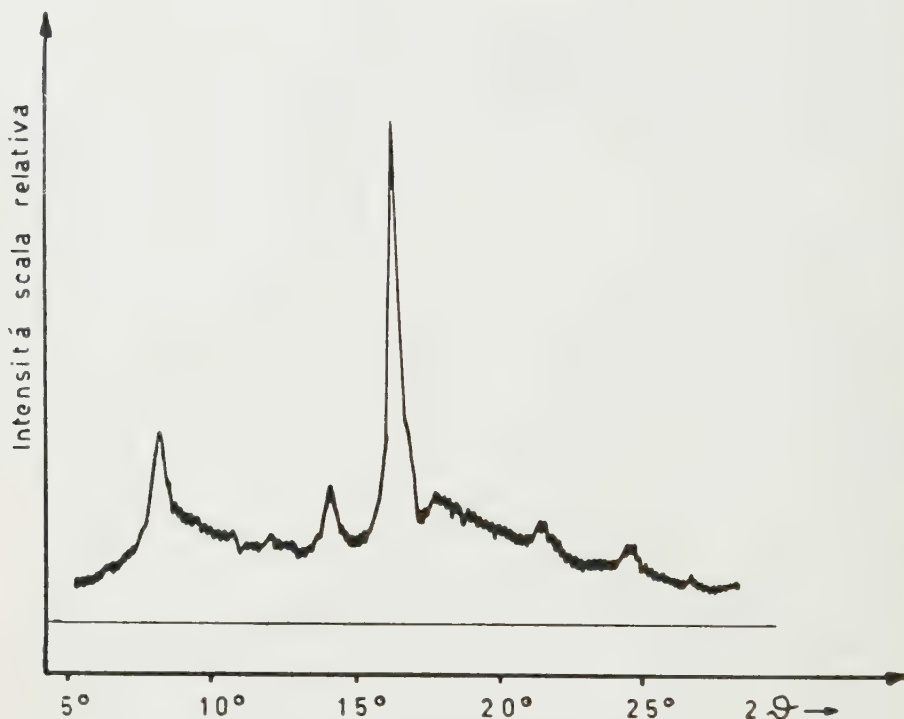


Fig. 3. - Registrazione con contatore di Geiger dello spettro ai raggi X di una lamina di polistirolo isotattico cristallino orientato « a feltro ».

**SPETTRI DI FIBRA DEL POLISTIROLO.** - Già dai primi spettrogrammi di lamine di polistirolo, registrati con contatore di Geiger, si era constatato che una serie di riflessi, ed in particolare tutti i riflessi che venivano forniti da lamine orientate « a feltro », corrispondevano a piani con distanze reticolari che stavano tra loro nei rapporti  $1 : 1/\sqrt{3} : 1/2$ : ecc. e potevano perciò provenire da un reticolo esagonale con indici del tipo  $(hko)$ . In particolare ai tre riflessi equatoriali più intensi,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , si potevano attribuire indici  $(100)$   $(110)$   $(200)$ .

Fotogrammi molto più ricchi di riflessioni (fig. 1, tavola fuori testo) sono stati forniti dall'esame di sottili cilindretti di polistirolo isotattico ottenuti per estrusione. Tali campioni orientati forniscono fotogrammi di fibra estremamente chiari, con diffrazioni nette denotanti grado d'ordine relativamente elevato. Tutti e solo i riflessi equatoriali sono interpretabili sulla base di una cella esagonale di lato  $a' = 12,64 \text{ \AA}$ .

In Tabella I sono riportati alcuni dati relativi a tali riflessi. La periodicità  $c$  lungo l'asse della fibra risultante dalla distanza dall'equa-

tore dei vari strati è di  $6,65 \pm 0,05 \text{ \AA}$ . Oscillando la fibra in maniera che essa si mantenga perpendicolare all'asse della camera si dovrebbero ottenere sull'equatore del fotogramma i riflessi del tipo (00 $l$ ). Si è invece ottenuta in tale caso una serie di riflessi (fig. 2, tavola fuori testo) con distanze di Bragg di 3,23, 2,16, 1,62  $\text{\AA}$ , rispettivamente intenso, medio, debole, sull'equatore del film non attribuibili ai vari ordini della riflessione proveniente dal piano (001) se non ammettendo che questo sia inclinato rispetto ad un piano perpendicolare all'asse  $c$  di una diecina di gradi.

TABELLA I.

*Riflessi equatoriali nello spettro di fibra del polistirolo isotattico.*

$h\ k\ 0$	Intensità	$d_{\text{sper.}}$	$h^2+k^2+hk$	$d_{\text{calc.}}$ ( $a' = 12,64 \text{ \AA}$ )
1 0 0	$f$	10,92	1	10,96
1 1 0	$mf$	6,32	3	6,32
2 0 0	$ff$	5,45	4	5,47
2 1 0	$mf$	4,13	7	4,14
1 2 0				
3 0 0	$f$	3,65	9	3,65
2 2 0	—	—	12	3,16
3 1 0	$m$	3,04	13	3,04
1 3 0				
4 0 0	$md$	2,72	16	2,74
3 2 0	—	—	19	2,51
2 3 0				
4 1 0	$m$	2,39	21	2,39
1 4 0				
5 0 0	$md$	2,19	25	2,19
3 3 0	—	—	27	2,11
4 2 0	$m$	2,06	28	2,07
2 4 0				
5 1 0	—	—	31	1,97
1 5 0				
6 0 0	$m$	1,82	36	1,82

Considerazioni invece sull'impacchettamento delle molecole e l'esame delle riflessioni non equatoriali porterebbero all'assegnazione del polistirolo al gruppo spaziale  $R\bar{3}c$ , oppure  $R3c$ , con  $a = a' \sqrt{3} = 21.9 \text{ \AA}$ . Tale argomento sarà oggetto di un esame più approfondito in una prossima pubblicazione.

Si deve ritenere che nel volume delimitato da  $a' = b' = 12,64 \text{ \AA}$   $\gamma' = 120^\circ$   $c = 6,65 \text{ \AA}$  pari a  $921 \text{ \AA}^3$  siano contenute sei unità monomeriche. Infatti la densità röntgenografica, 1.124, risultante da tale ipotesi è in buon accordo con quella sperimentale, 1.085.

**IPOTESI SULLA STRUTTURA DEL POLISTIROLO CRISTALLINO.** - Il lavoro relativo alla interpretazione dei dati sperimentali, pur essendo stato iniziato da poco e non ancora concluso, ci consente cionondimeno di fare alcune ipotesi attendibili sulla struttura del polistirolo negli stati cristallino ed amorfo. La cella elementare, in analogia anche a quanto accade per il polipropilene, contiene due tronchi di catene disposte lungo l'asse  $c$  e contenenti ciascuna 3 unità monomeriche. L'esame della periodicità lungo l'asse della fibra consente di affermare che le catene principali del polipropilene e del polistirolo cristallini non hanno la normale configurazione zig-zag delle paraffine. Infatti una successione di 3 unità monomeriche porterebbe in tal caso ad un periodo di identità di  $2,54 \times 3 = 7,62 \text{ \AA}$  mentre si osservano in realtà delle dimensioni minori: per il polipropilene  $c = 6,50 \pm 0,05 \text{ \AA}$  e per il polistirolo  $c = 6,65 \pm 0,05 \text{ \AA}$ .

È noto che le configurazioni più probabili di una catena paraffinica devono soddisfare alla condizione che, su di un piano normale alla valenza congiungente due atomi di carbonio adiacenti, che indichiamo come  $1^\circ$  e  $2^\circ$ , le tre valenze rimanenti di ciascun atomo si devono proiettare a  $60^\circ$  con le valenze dell'altro. Pertanto l'atomo in posizione 3 in una sequenza di atomi di carbonio di una catena avrà tutte le sue valenze parallele a quelle dell'atomo  $1^\circ$  <sup>(4)</sup>.

Nelle paraffine a catena lineare non ramificata, tale condizione, unita all'altra per cui si ha tendenza alla sistemazione degli atomi di carbonio in un piano, determina perfettamente la forma della molecola.

Nel caso del polistirolo non è possibile che la catena principale presenti una configurazione piana, perché in tal caso i gruppi benzenici dovrebbero succedersi a distanza di  $2,54 \text{ \AA}$  l'uno dall'altro, mentre è noto che l'ingombro minimo di tali gruppi è di circa  $3,5 \text{ \AA}$ .

D'altra parte la periodicità di 3 unità monomeriche lungo l'asse  $c$  non è compatibile che con una struttura isotattica e ciò <sup>(1)</sup> esclude la possibilità che i nuclei benzenici si alternino al di qua e al di là del piano formato dagli atomi della catena considerata planare.

(4) P. J. FLORY, *Principles of Polymer Chemistry*, Cornell University Press, New York, p. 414 (1953); C. W. BUNN, *Chemical Crystallography*, Oxford University Press, p. 324, (1946).

Una catena paraffinica «spiralizzata» che soddisfi alle condizioni poste sopra, può essere generata a partire da una catena zig-zag planare (chiamando i suoi atomi success. 1°, 2°, 3° ecc.) facendo compiere al 3° atomo una rotazione (destorsa o sinistrorsa) di 120° intorno alla retta che lo congiunge al 2°, al 5° atomo una rotazione di 120° (nello stesso senso di quella del 3° atomo) intorno alla retta che lo congiunge al 4° e così via. Gli atomi di carbonio della catena principale risultano così, 4 a 4, in piani a 120° tra loro, e la struttura si ripete per traslazioni parallele all'asse  $c$  ogni tre unità monomeriche. Se intorno alla elica così formatasi si dispongono

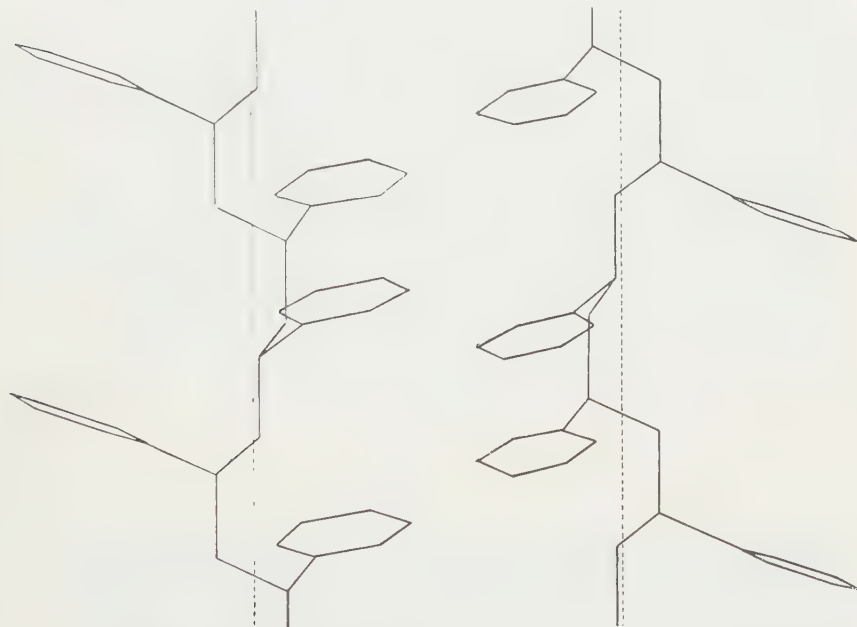


Fig. 4. — Modello dell'elica del polistirolo proiettata su di un piano parallelo all'asse  $c$ .

isotatticamente dei metili o altri sostituenti, si vede (fig. 4) che essi non si disturbano affatto tra loro. Nel caso del polipropilene si vede anche, in modo chiaro, come tale struttura sia particolarmente stabile, dato che tutti gli atomi di carbonio sono contenuti in piani, paralleli all'asse della fibra, a 120° tra loro. Tali piani distano dall'asse della catena 0,35 Å, circa ed in ognuno di essi sono contenuti gruppi di 5 atomi (considerati puntiformi) di cui 4 appartenenti alla catena principale ed il quinto al gruppo metilico o benzenico. I quattro atomi della catena principale appartengono a due a due anche ai gruppi adiacenti di 5 atomi ciascuno, contenuti nei piani a 120° dal primo.

Molte altre osservazioni concordano con questa ipotesi strutturale che è stata dedotta in base a considerazioni geometriche ed energetiche.

Per il polistirolo cristallino, l'estrema intensità del riflesso (200) (il quadrato del suo fattore di struttura è circa il doppio della somma di tutti quelli degli altri riflessi  $[hko]$ ), di cui è mostrato in figura 5 il grafico delimitante le



zone « positive » e « negative » <sup>(5)</sup>, è in accordo con le nostre ipotesi. Tutti gli atomi o la massima parte di essi dovrebbero proiettarsi lungo  $c$  in una delle due zone, o in quella positiva (indicata tratteggiata in figura) o in quella negativa, e ciò appare possibile dalla rappresentazione schematica della figura.

Una struttura analoga a quella del polistirolo sembrano presentare il poli- $\alpha$ -butene e il poli- $\alpha$ -pentene. Infatti la proiezione lungo  $c$  della loro cella elementare ha pure simmetria esagonale. Ci riserviamo di ritornare sull'argomento quando avremo potuto raccogliere ulteriori e più dettagliati dati sulla struttura del polistirolo e di altri polimeri isotattici.

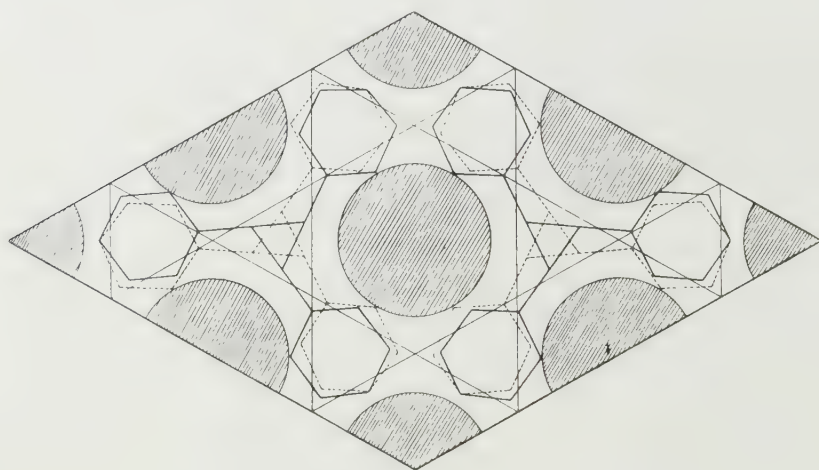


Fig. 5. - Grafico del fattore di struttura del riflesso (2 0 0). Le zone positive sono tratteggiate. In  $(1/3, 2/3)$  è il centro della proiezione di una catena, rappresentata a tratto pieno o tratteggiata, a seconda che venga considerata destrorsa o sinistrorsa ed a seconda che i piani dei nuclei benzenici siano rivolti tutti verso l'alto o tutti verso il basso.

OSSERVAZIONI SULLA STRUTTURA DEL POLISTIROLO AMORFO. - Il diagramma di diffrazione fornito dal polistirolo isotattico temprato, per rapido raffreddamento, da una temperatura superiore a quella di fusione, sino a quella ambiente, è uguale, come si è visto sopra, al diagramma di diffrazione fornito dal polistirolo amorfo commerciale (non isotattico). Si può concludere perciò che, come nel caso del polipropilene, il polistirolo isotattico allo stato amorfo abbia notevole somiglianza di comportamento, almeno per quanto riguarda i fenomeni di diffrazione ai raggi X, col polistirolo non isotattico. Il massimo dell'amorfo a  $9,2 \text{ \AA}$  potrebbe essere attribuito a distanze tra catene, mentre il massimo a  $4,7 \text{ \AA}$ , molto intenso, appare dovuto semplicemente a distanze intermolecolari tipo Van der Waals <sup>(6)</sup>. Quest'ultimo massimo è presente nella stessa posizione anche nello spettro del poli- $\alpha$ -butene, del poli- $\alpha$ -pentene e

(5) W. L. BRAGG, H. LIPSON, «Z. Krist.», 323 (1936).

(6) C. E. SCHILDKNECHT, *Vinyl and Related Polymers*, John Wiley and Sons, Inc., New York, p. 142 (1952).



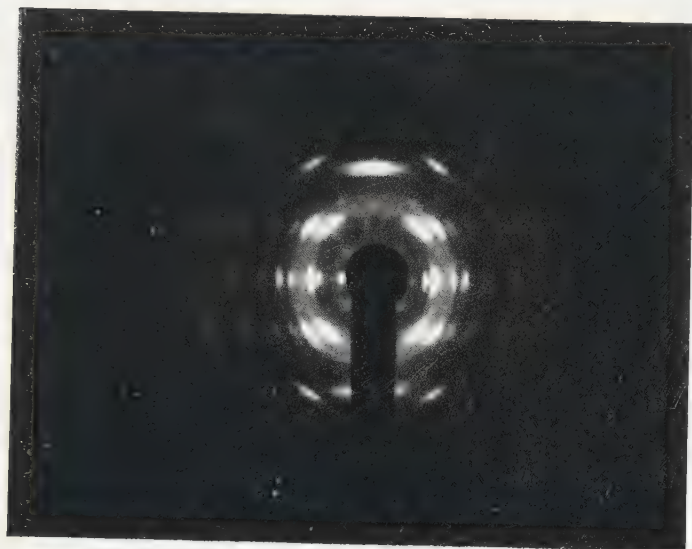


Fig. 1. – Spettro di fibra di polistirolo isotattico cristallino.

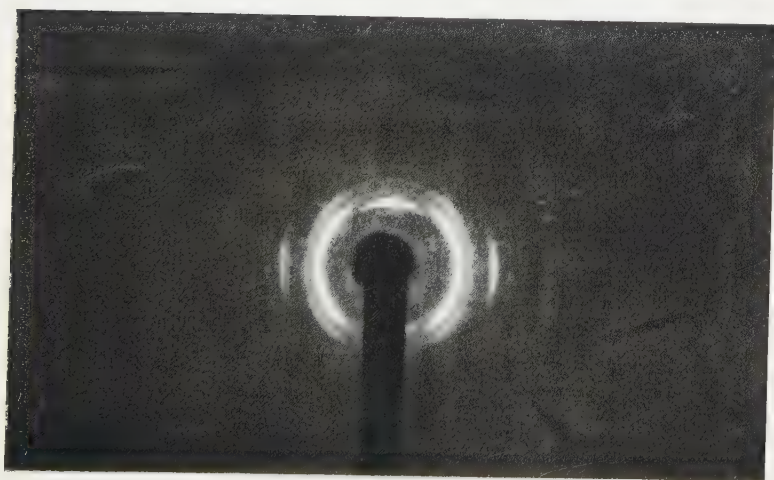


Fig. 2. – Spettro della stessa fibra mantenuta normale all'asse della camera.



del poli- $\alpha$ -esene amorfi. Varia viceversa, al variare del monomero, la posizione dell'alone più interno che si sposta verso angoli più bassi con l'ingrandirsi del radicale alchilico laterale. Tale alone è dovuto probabilmente alle distanze fra le catene principali, ed infatti esso è più intenso per il poli- $\alpha$ -butene e meno intenso per il polistirolo, perchè in quest'ultimo vi contribuisce una minor frazione degli atomi totali del polimero.

L'opposto logicamente accade per l'alone a 4,7 Å, assai più intenso per il polistirolo.

Sono in corso ulteriori ricerche, che comprendono l'esame di altri polimeri isotattici.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Teoria delle funzioni analitiche.** — *Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti.* Nota di GIOVANNI RICCI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

**I. SUCCESSIONI DI LACUNE. ORDINE DI LACUNARITÀ.** — Il fenomeno dell'ultraconvergenza delle serie di potenze è strettamente connesso con la presenza di una successione di lacune, cioè con una successione di tratti « abbastanza estesi » di coefficienti « abbastanza piccoli ».

È nostro intento di introdurre due nozioni di *ordine di lacunarità* secondo due diversi aspetti, al fine di dare forma chiara e concisa alle proprietà delle serie lacunari che dovremo illustrare: in particolare, una di queste riguarda l'andamento del modulo dei coefficienti in prossimità degli estremi delle lacune.

La serie di potenze  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  abbia raggio di convergenza 1, cioè sia  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$ .

Sia  $\{p_h, q_h\}$  una successione crescente di coppie di interi  $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots$  tale che:

i) esista un numero  $\theta > 0$  (indipendente da  $h$ ) per il quale si verifica

$$q_h - p_h > \theta p_h, \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

ii)  $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} |a_m|^{1/m} < 1$  ;  $p_h < m < q_h$  ( $h = 1, 2, 3, \dots$ )

(cioè  $m \rightarrow +\infty$  percorrendo l'interno dei tratti  $(p_h, q_h)$ ).

Allora si dice che  $\{p_h, q_h\}$  è una successione di lacune (H. O.) (secondo Hadamard-Ostrowski) di ampiezza non inferiore a  $\theta$  per la serie  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ ;

(\*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

questa si dirà *lacunare* (H. O.) e l'estremo superiore  $\Lambda$  (eventualmente  $+\infty$ ) dei numeri reali e positivi  $\theta$  ai quali è possibile coordinare una successione di lacune (H. O.) si dirà *ordine di lacunarità* (H. O.) della serie stessa. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  non ammette alcuna successione di lacune (H. O.) comunque piccolo si scelga  $\theta$ , porremo  $\Lambda = 0$  e la serie si dirà *non-lacunare* (H. O.).

Gli studi di E. Fabry hanno condotto a una nozione più generale di lacunarità nella quale è ammessa la presenza, nei tratti  $(p_h, q_h)$ , di coefficienti eccezionali, non troppo numerosi, che sono liberi nella grandezza del modulo (sempre rispettando la condizione che il raggio di convergenza è 1) <sup>(1)</sup>. Siamo condotti alla seguente definizione.

Sia  $\{p_h^*, q_h^*\}$  una successione crescente di coppie di interi  $\{p_1^*, q_1^*\}, \{p_2^*, q_2^*\}, \dots$  tale che

i) esista un numero  $\theta^* > 0$  (indipendente da  $h$ ) per il quale si verifica

$$q_h^* - p_h^* > \theta^* p_h^*, \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

ii)  $\lim_{m \rightarrow +\infty} |a_m|^{1/m} = 1$ ,  $p_h^* \leq m \leq q_h^*$ ,  $(h = 1, 2, 3, \dots)$

(cioè  $m \rightarrow +\infty$  percorrendo i tratti  $(p_h^*, q_h^*)$ );

iii) esista almeno una successione  $\{m_h^*\}$  con

$$p_h^* \leq m_h^* \leq q_h^*, \quad |a_{m_h^*}|^{1/m_h^*} \rightarrow 1;$$

iv) sia possibile scegliere  $v_h$  indici  $m$  nel tratto  $p_h^* \leq m \leq q_h^*$  ( $h = 1, 2, 3, \dots$ ), in guisa che, denotando con  $m_0$  gli indici  $m$  rimanenti (in numero di  $q_h^* - p_h^* - v_h + 1$ ), siano verificate le due condizioni di limite seguenti

$$v_h/p_h^* \rightarrow 0, \quad \lim_{m_0 \rightarrow +\infty} |a_{m_0}|^{1/m_0} < 1.$$

Allora si dice che  $\{p_h^*, q_h^*\}$  è una successione di lacune (F. P.) (secondo Fabry-Pólya) di ampiezza non inferiore a  $\theta^*$  per la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ; e così diremo: *lacunare* (F. P.) la serie stessa e *ordine di lacunarità* (F. P.) l'estremo superiore  $\Lambda^*$  dei valori di  $\theta^*$  ecc. come per la lacunarità (H. O.).

La presenza ammessa di coefficienti eccezionali in  $(p_h^*, q_h^*)$  (anzi, per almeno uno di questi obbligatoria per lo meno a un estremo) potrebbe far pensare che sia sempre  $\Lambda \leq \Lambda^*$ ; infatti non è immediato all'intuizione che possa essere  $\Lambda^* < \Lambda$ . Contro questo apprezzamento mal posto sussiste il seguente.

TEOREMA I. - Prefissati arbitrariamente i due ordini  $\Lambda$  e  $\Lambda^*$

$$0 \leq \Lambda \leq +\infty, \quad 0 \leq \Lambda^* \leq +\infty$$

esistono serie di potenze che ammettono  $\Lambda$  come ordine di lacunarità (H. O.) e  $\Lambda^*$  come ordine di lacunarità (F. P.).

(1) Ved. per esempio E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2. Aufl. Berlin, 1929, pp. 76-86. Vedi anche G. SANSONE, *Funzioni di una variabile complessa*, vol. I, 3ª ediz., CEDAM, Padova 1950, pp. 97-99.



Si possono costruire effettivamente gli esempi e, naturalmente, quelli più interessanti si riferiscono a  $\Lambda^* < \Lambda$  e, fra questi, si trovano quelli che presentano l'ultraconvergenza effettiva (che implica la prolungabilità).

Per giudicare della comodità delle nozioni introdotte veniamo ad enunciare un teorema di E. Fabry e G. Pólya (in una forma osservata qui per la prima volta e che si ricava come corollario dal teorema di G. Pólya<sup>(2)</sup> che estende il teorema di E. Fabry alle lacune unilaterali) e di seguito i tre bei teoremi di A. Ostrowski sulle serie ultraconvergenti<sup>(3)</sup>.

«TEOREMA (F.P.). — Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ha  $\Lambda^* > 0$ , essa non è prolungabile».

«TEOREMA (O1). — Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ha  $\Lambda > 0$  ed è prolungabile, essa è ultraconvergente».

«TEOREMA (O2). — Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  è prolungabile e ultraconvergente essa ha  $\Lambda > 0$ ».

«TEOREMA (O3). — Se la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ha  $\Lambda = +\infty$ ,  $f_{p_h}(z) = \sum_{n=0}^{p_h} a_n z^n$ , per  $h \rightarrow +\infty$ , rappresenta  $f(z)$  in tutto il campo di esistenza».

L'osservazione interessante è che in (O1) e in (O2) deve essere necessariamente  $\Lambda^* = 0$ , in forza di (F.P.). Sono ben note famiglie di serie di potenze che sono simultaneamente ultraconvergenti e prolungabili (cioè manifestano l'ultraconvergenza effettivamente, attraverso archi di regolarità esistenti). Una ampia famiglia è segnalata dal seguente

TEOREMA II. — Sia  $\{\rho_h\}$  una successione crescente di interi  $\rho_h$  tale che  $\rho_{h+1}/\rho_h \rightarrow \lambda > 1$ .

Poniamo

$$P_h(z) = \frac{|z(1-z)|^{\rho_h}}{C_h}, \quad C_h = \binom{\rho_h}{[\rho_h/2]}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Allora, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ha raggio di convergenza 1, è prolungabile ed è

ultraconvergente lungo una qualunque successione  $\{n_h\}$  per la quale esiste un  $\delta > 0$  tale che, per  $h$  abbastanza grande, sia

$$\frac{3}{2} \rho_h (1 + \delta) < n_h < \frac{3}{2} \rho_{h+1} (1 - \delta).$$

(2) G. PÓLYA, *Ueber gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe*, «Math. Ann.», 99, 687-706 (1928), vedi p. 703, nota<sup>(18)</sup>.

(3) A. OSTROWSKI, *On Representation of analytical Functions by power Series*, «Journ. London Math. Soc.», 1, 251-263 (1926) e *Addendum*, «ibid.», 4, 32 (1929).

2. MODULAZIONE DEI MARGINI DELLE LACUNE NEL CASO DELLA PROLUNGABILITÀ E ULTRACONVERGENZA SIMULTANEE. - Noi perveniamo al seguente:

TEOREMA III. - Sia  $\sum_0^\infty a_n z^n$  prolungabile e ultraconvergente, con la successione  $\{p_h, q_h\}$  di lacune (H.O.); allora, scelte comunque due funzioni  $\psi_1(h)$ ,  $\psi_2(h)$  soddisfacenti alle condizioni  $0 \leq \psi_1(h)/p_h \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \psi_2(h)/p_h \rightarrow 0$ , anche la successione  $\{p_h - \psi_1(h), q_h + \psi_2(h)\}$  è una successione di lacune (H.O.).

Già per altra via venne dimostrato da G. Szegő<sup>(4)</sup> nel caso speciale in cui  $\psi_1(h) = k$  (costante, indipendente da  $h$ ) e  $\psi_2(h) = 0$ .

Questo Teorema III può essere notevolmente rinforzato col seguente

TEOREMA IV. - Sia  $\sum_0^\infty a_n z^n$  prolungabile e ultraconvergente con la successione  $\{p_h, q_h\}$  di lacune (H.O.); allora esiste un numero  $\delta > 0$  (abbastanza piccolo) tale anche la successione

$$\{(1 - \delta)p_h, (1 + \delta)q_h\}.$$

è anch'essa una successione di lacune (H.O.) e per infiniti valori di  $h$  risulta  $(1 + \delta)q_h \leq (1 - \delta)p_{h+1}$ .

Come corollario di quest'ultimo si ottiene il seguente

TEOREMA V. - Sia  $\sum_0^\infty a_n z^n$  prolungabile e ultraconvergente e sia  $\Lambda$  il suo ordine di lacunarità (H.O.); allora, se  $\Lambda$  è finito, per ogni successione  $\{p_h, q_h\}$  di lacune (H.O.) risulta

$$\overline{\lim} (q_h - p_h)/p_h < \Lambda$$

(vale sempre  $<$ , non vale mai  $=$ ).

Questa proprietà non sussiste nel caso della lacunarità (F.P.) come asserisce la proposizione evidente che segue

TEOREMA VI. - Fissato un numero  $\Lambda^*$  positivo (finito) esistono serie  $\sum_0^\infty a_n z^n$  con l'ordine di lacunarità (F.P.) eguale a  $\Lambda^*$  le quali ammettono successioni  $\{p_h^*, q_h^*\}$  di lacune (F.P.) per cui vale  $(q_h^* - p_h^*)/p_h^* \rightarrow \Lambda^*$ .

3. SULL'AMPIEZZA DEI TRATTI COMPLEMENTARI DI UNA SUCCESSIONE IRRIDUCIBILE. - Poniamo

$$M(u, v) = \max_{u \leq t \leq v} |a_t|^{1/t}$$

e, detta  $\{p_h, q_h\}$  una successione di lacune (H.O.), consideriamo i tratti complementari  $\{q_h, p_{h+1}\}$  ( $h = 1, 2, 3, \dots$ ), poniamo anche

$$\mu_h = M(q_h, p_{h+1}), \quad (h = 1, 2, 3, \dots).$$

(4) G. SZEGÖ, *Tchebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen*, «Math. Ann.», 87, 90-111 (1922); vedi, pp. 109-111.

In base alla definizione di successione di lacune (H.O.) (ved. n. 1) risulta  $\lim M(p_h + 1, q_h - 1) < 1$ , ed essendo 1 il raggio di convergenza, deve risultare  $\lim \mu_h = 1$ .

Se per una successione parziale  $\{h_l\}$  risulta  $\overline{\lim} \mu_{h_l} < 1$ , allora ciascuno dei tratti complementari  $(q_{h_l}, p_{h_l+1})$  può venire incluso nelle due lacune ad esso adiacenti che si riuniranno a costituire una lacuna  $(p_{h_l}, q_{h_l+1})$  più ampia: possiamo ripetere questa operazione di riunione e pervenire a una nuova successione di lacune (H.O.).

Se per una successione parziale  $\{h_s\}$  di indici  $h$ , risulta  $\mu_{h_s} \rightarrow 1$ , allora, al contrario, non potranno essere soppressi che al più un numero finito di tratti  $(q_{h_s}, p_{h_s})$ ; la successione  $\{q_{h_s}, p_{h_s+1}\}$  di tratti complementari si dirà *irriducibile*. È evidente che certi caratteri di modulazione saranno rilevabili soltanto nelle successioni  $\{q_{h_s}, p_{h_s+1}\}$  irriducibili, poiché le successioni  $\{q_{h_l}, p_{h_l+1}\}$  inseribili nelle lacune partecipano del carattere delle lacune stesse.

Come corollario del Teorema IV otteniamo il seguente

TEOREMA VII. — Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  prolungabile e ultraconvergente con la successione  $\{p_h, q_h\}$  di lacune (H.O.). Se  $\{q_{h_s}, p_{h_s+1}\}$  è una successione irriducibile di tratti complementari, cioè se per  $s = 1, 2, 3, \dots$  esiste  $w_s$  tale che

$$q_{h_s} \leq w_s \leq p_{h_s+1} \quad , \quad |a_{w_s}|^{1/w_s} \rightarrow 1,$$

allora esiste un  $\delta > 0$  (indipendente da  $s$ ) per il quale, quando  $s$  è abbastanza grande, risulta

$$p_{h_s+1} - q_{h_s} > \delta p_{h_s+1}.$$

Vogliamo concludere col segnalare una proprietà sull'andamento della consistenza globale delle lacune e cioè

TEOREMA VIII. — Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  prolungabile e ultraconvergente con la successione  $\{p_h, q_h\}$  di lacune (H.O.) e con  $q_h \leq p_{h+1}$ .

Denotiamo con  $L(n)$  il numero degli indici non superiori a  $n$  e appartenenti alle lacune cioè poniamo

$$L(n) = \sum_{u \leq n} 1$$

$$p_h < u < q_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

Allora risulta

$$\lim L(n)/n < 1.$$

Nel caso che l'ordine  $\Lambda$  di lacunarità (H.O.) sia (positivo) finito, risulta anche

$$\overline{\lim} L(n)/n < 1.$$

**Matematica.** — *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali.* Nota di MICHELE SCE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In questa Nota, dopo alcuni richiami introduttori di algebra e di analisi, si classificano i sistemi di equazioni a derivate parziali che danno le condizioni di monogeneità nelle algebre. Detti sistemi risultano ellittici per le algebre primitive, parabolici per le algebre con radicale; la dimostrazione di quest'ultimo fatto si basa su di una caratterizzazione, forse non nota, delle algebre semisemplici mediante il loro determinante. Tra i sistemi iperbolici segnaliamo quello che si ottiene da un'algebra regolare, il quale ha come ipersuperficie caratteristica il cono dei divisori dello zero dell'algebra stessa.

Dai sistemi suddetti si deducono poi certe equazioni a derivate parziali, dello stesso tipo di quelli, di ordine eguale all'ordine dell'algebra, a cui soddisfanno tutte le componenti delle funzioni monogene. Spero che uno studio ulteriore di queste equazioni possa in seguito condurmi a risolvere, almeno per le funzioni monogene nelle algebre regolari, taluni problemi di tipo analogo a quello di Cauchy.

1. Sia  $\mathfrak{U}$  un'algebra associativa dotata di modulo, sul campo reale, e sia  $u = (u_1, \dots, u_n)$  una sua base. Le algebre di matrici  $\mathfrak{U}'$  ( $\mathfrak{U}''$ ) che danno la prima (seconda) rappresentazione regolare di  $\mathfrak{U}$  sono tali che, per ogni  $x$  di  $\mathfrak{U}$  e  $X'$  ( $X''$ ) di  $\mathfrak{U}'$  ( $\mathfrak{U}''$ ), si ha:

$$(1) \quad x u_{-1} = X'_{-1} u_{-1} \quad (\mathfrak{U} x = \mathfrak{U} X''_{-1});$$

il determinante di  $X'$  ( $X''$ ) si dice anche *determinante sinistro (destro)* di  $x^{(1)}$ .

L'elemento di  $\mathfrak{U}$ ,  $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n = \eta u_{-1}$  si dice *funzione monogena sinistra (destra)* di  $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  se le  $y_i$  sono funzioni derivabili delle  $x_k$  tali che

$$\sum_{i,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} u_k u_i = 0 \quad \left( \sum_{i,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} u_i u_k = 0 \right) \quad (2).$$

Da qui, ponendo

$$(2) \quad u_k u_i = \sum_j c_{ki}^j u_j,$$

si ottiene un sistema di  $n$  equazioni a derivate parziali del primo ordine lineari:

$$(3) \quad \sum_{i,k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} c_{ki}^j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

(\*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.

(1) Cfr. G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina 1921), Parte II, nn. 184 e 185.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali* (Roma 1951), cap. IV, n. 90. Gli indici delle sommatorie, salvo esplicita avvertenza in contrario, variano sempre da 1 a  $n$ . Nel seguito ci riferiremo soltanto alla monogeneità sinistra, in quanto risultati del tutto analoghi si possono similmente ottenere per la monogeneità destra.



i cui coefficienti sono le costanti di moltiplicazione dell'algebra. Posto

$$\Omega = \left\| \sum_k c_{ki}^j \frac{\partial}{\partial x_k} \right\| = \|\gamma_{ij}\| \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

le (3) si possono scrivere più compattamente:

$$(3') \quad \Omega \eta_{-1} = 0;$$

il determinante  $|C|$  della matrice

$$(4) \quad C = \left\| \sum_k c_{ki}^j z_k \right\| = \sum_k C_k z_k,$$

$C_k = \left\| c_{ki}^j \right\|$  (per  $i, j = 1, \dots, n$ ), ottenuta dalla  $\Omega$  sostituendo  $z_k$  al simbolo  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ , si dice la *forma caratteristica* del sistema. Il sistema stesso si dice *ellittico* o *parabolico* se rispettivamente l'equazione caratteristica

$$(5) \quad |C| = f(z_1, \dots, z_n) = 0$$

non ha soluzioni reali diverse dalla soluzione banale  $(0, \dots, 0)$  o, mediante un cambiamento di variabili, può venire ridotta a dipendere da meno di  $n$  variabili <sup>(3)</sup>; negli altri casi il sistema si dice *iperbolico*, od in particolare *totalmente iperbolico* qualora la matrice  $C$  sia diagonalizzabile a radici caratteristiche tutte reali quali che siano le  $z_k$  <sup>(4)</sup>.

Infine un'ipersuperficie  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ , nello spazio euclideo delle  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n)$ , si dice *caratteristica* se i coseni direttori della sua normale  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$  soddisfanno alla equazione caratteristica (5) <sup>(5)</sup>.

2. Moltiplichiamo a destra la matrice (4) per l' $n$ -complesso verticale  $\eta_{-1}$ ; in forza della (2), si ha:

$$C \eta_{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{j,k} c_{k1}^j z_k u_j \\ \vdots \\ \sum_{j,k} c_{kn}^j z_k u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k z_k u_k u_1 \\ \vdots \\ \sum_k z_k u_k u_n \end{pmatrix}$$

e, posto  $z = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n$ , se ne trae

$$z \eta_{-1} = C \eta_{-1}.$$

Dal confronto con la (1), appare che  $C_{-1}$  è la matrice corrispondente a  $z$  nella prima rappresentazione regolare di  $\mathfrak{U}$  <sup>(6)</sup>; pertanto la *forma caratteristica del sistema* (3) coincide col determinante sinistro di un elemento di  $\mathfrak{U}$ .

(3) Cfr. COURANT-HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Band II (Berlin, 1937), Kap. III, § 4, n. 2.

(4) Una definizione equivalente alla nostra, si trova, per sistemi di equazioni quasi-lineari, in COURANT-FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves* (New York 1948), Chap. II, n. 32; talvolta — come in COURANT-LAX, *On non linear partial differential equations with two independent variables*, «Comm. pure appl. Math.», vol. II (1949), pp. 255-273, n. 2 — i sistemi totalmente iperbolici sopra definiti sono chiamati *iperbolici*.

(5) Cfr. COURANT-FRIEDRICHS, cit. in <sup>(5)</sup>.

(6) In particolare,  $\Omega_{-1}$  corrisponde ad  $\omega = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_k$  considerato come un elemento di  $\mathfrak{U}$  e le trasposte delle  $C_k$  della (4) corrispondono alle unità di  $\mathfrak{U}$ .

Poiché i determinanti degli elementi di  $\mathbb{L}$  sono invarianti rispetto ai cambiamenti di base dell'algebra, si ha anche che *la forma caratteristica del sistema esprime la monogeneità è invariante rispetto ai cambiamenti di base dell'algebra* <sup>(7)</sup>.

Le algebre primitive non hanno divisori dello zero e quindi i determinanti dei loro elementi diversi dallo zero sono sempre non nulli; e viceversa. In base a quanto precede ed al n. 1, ciò equivale a dire che *il sistema (3) è ellittico per le algebre primitive e per queste soltanto*.

3. Proveremo che *il sistema (3) è parabolico per le algebre non semisemplici e per esse soltanto* dimostrando che *affinché un'algebra sia semisemplice è necessario e sufficiente che, rispetto ad una qualunque base, il determinante degli elementi dipenda da tutte le loro coordinate*.

Supponiamo che  $\mathbb{L}$  sia semisemplice e che il determinante degli elementi non dipenda da tutte le loro coordinate.  $\mathbb{L}$  è somma diretta di algebre semplici,  $\mathbb{L}_i$ , e quindi il determinante degli elementi di  $\mathbb{L}$  è il prodotto dei determinanti degli elementi delle  $\mathbb{L}_i$ ; perciò qualche algebra  $\mathbb{L}_i$  sarà tale che il determinante dei suoi elementi  $x = \sum_i x_i u_i$  ed  $y = \sum_i y_i u_i$  non dipende, per esempio, dai coefficienti delle unità  $u_m, \dots, u_n$  mentre dipende dai coefficienti di tutte le altre unità. Allora anche il determinante di

$$xy = \sum_{i,k=1}^{m-1} x_i y_k u_i u_k + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ k=m, \dots, n}} (x_i y_k u_i u_k + x_k y_i u_k u_i) - \sum_{i=m}^n x_i y_i u_i^2$$

non dipende da  $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_n$ ; ne segue che tutti i prodotti di unità che compaiono nella seconda sommatoria debbono potersi esprimere come combinazioni lineari di  $u_m, \dots, u_n$ , cioè che devono sussistere le:

$$(6) \quad u_i u_k = \sum_{j=m}^n c_{ik}^j u_j \quad (i=1, \dots, n; k=m, \dots, n).$$

Le (6) ci abilitano a dire che l'insieme di base  $u_m, \dots, u_n$  è un ideale proprio di  $\mathbb{L}_i$ ; questo contraddice all'ipotesi  $\mathbb{L}_i$  sia semplice e dimostra la parte del teorema relativa alla necessità della condizione.

Sia ora  $\mathbb{L}$  un'algebra non semisemplice, cioè dotata di un radicale  $\mathfrak{N}$  non nullo. Sia poi  $U_1, \dots, U_m, \dots, U_n$  ( $1 < m < n$ ) una base per  $\mathbb{L}'$ , tale che  $U_m, \dots, U_n$  sia una base per l'immagine  $\mathfrak{N}'$  di  $\mathfrak{N}$  nella prima rappresentazione regolare di  $\mathbb{L}$ ; allora la traccia di ogni elemento  $X' = \sum_i x_i U_i$  di  $\mathbb{L}'$  non dipende da  $x_m, \dots, x_n$  perché le matrici  $U_m, \dots, U_n$  - elementi di  $\mathfrak{N}'$  - sono pseudonulle. Poiché

$$X'^2 = \sum_{i,k=1}^{m-1} x_i x_k U_i U_k + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ k=m, \dots, n}} x_i x_k (U_i U_k + U_k U_i) - \sum_{i=m}^n x_i^2 U_i^2,$$

(7) Invece le condizioni di monogeneità dipendono dalla base dell'algebra; cfr. M. SCE, *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse*, « Rend. Lincei », ser. 8ª, vol. XVI (1954), Nota I, pp. 30-36, n. 1.

soltanto i coefficienti della prima somma — tra i quali non compaiono  $x_m, \dots, x_n$  — possono portare un contributo non nullo alla traccia di  $X'^2$  perché, essendo  $\mathfrak{R}'$  un ideale di  $\mathfrak{L}'$ , vale una relazione simile alla (6). Così proseguendo si perviene a dimostrare che le tracce di  $X', X'^2, \dots, X'^n$  non dipendono da  $x_m, \dots, x_n$ . Usando poi le formule ricorrenti — facilmente ottenibili <sup>(8)</sup> — che esprimono i coefficienti dell'equazione caratteristica di una matrice mediante le tracce della matrice e delle sue potenze, si ha che ciascuno dei coefficienti dell'equazione caratteristica di  $X'$  non dipende da  $x_m, \dots, x_n$ . Ciò vale dunque in particolare per il determinante di  $x$ , onde il teorema risulta completamente dimostrato.

4. *Il sistema (3) è totalmente iperbolico per le algebre dei numeri  $n$ -reali e per esse soltanto.*

Sia  $u_1, \dots, u_n$ , con  $u_i^2 = u_i$ ,  $u_i u_k = 0$  ( $i \neq k$ ), la base dei numeri  $n$ -reali; la matrice (4) risulta reale e diagonale, onde il sistema (3) è totalmente iperbolico.

Supponiamo reciprocamente il sistema (3) totalmente iperbolico, e cioè  $C$  diagonalizzabile a radici caratteristiche reali quali che siano le  $z_k$ ; tutte le matrici  $C_k$  figuranti nella (4) risultano perciò diagonalizzabili a radici caratteristiche reali. Se  $C_i$  è diagonale e tutte le  $z_k$ , tranne  $z_i$  e  $z_j$ , sono nulle, affinché  $z_i C_i + z_j C_j$  sia diagonale deve essere diagonale anche  $C_j$ ; ne segue, al variare di  $i$  e di  $j$ , che una matrice che diagonalizzi una  $C_k$ , deve diagonalizzare tutte le  $C_k$ . Allora le  $C_k$  sono a due a due permutabili <sup>(9)</sup>; e, poiché esse — trasposte — corrispondono alle unità di  $\mathfrak{L}$  nella prima rappresentazione regolare,  $\mathfrak{L}$  è commutativa. D'altro canto, essendo il sistema (3) non parabolico,  $\mathfrak{L}$  è semisemplice (n. 3); e un'algebra semisemplice che sia commutativa è somma diretta del campo reale e dell'algebra dei numeri complessi, l'uno e l'altra essendo contati un certo numero di volte <sup>(10)</sup>. Ma, se  $\mathfrak{L}$  avesse come componente l'algebra dei numeri complessi, qualche  $C_k$  avrebbe radici caratteristiche complesse; sicché  $\mathfrak{L}$  non può che essere somma diretta del campo reale contato  $n$  volte.

5. Sia  $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn}$ , con  $e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$ ,  $e_{ij} e_{lk} = 0$  ( $i \neq l$ ), la base di un'algebra regolare  $\mathfrak{N}_n$  di ordine  $n^2$ ; le matrici di ordine  $n^2$  elementi di  $\mathfrak{N}'_n$  sono somme dirette di  $n$  matrici eguali  $\|x_{ik}\|$ , di ordine  $n$ , elementi di  $\mathfrak{N}_n$ . Onde la  $\varphi(x_{ik}) = 0$  sarà un'ipersuperficie caratteristica del sistema (3) se:

$$(7) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_{ik}} \right| = 0.$$

(8) Quando la matrice sia in forma canonica, tali formule si riducono a quelle delle funzioni simmetriche.

(9) Cfr. M. SCE, *Su alcune proprietà delle matrici permutabili e diagonalizzabili*, « Rivista di Parma », vol. I, pp. 363-374, n. 5 (1950).

(10) Cfr. SCORZA, cit. in <sup>(1)</sup>, parte II, n. 292.

Essendo  $\frac{\partial |x_{ik}|}{\partial x_{ik}}$  l'aggiunto  $X_{ik}$  di  $x_{ik}$  in  $\|x_{ik}\|$ , si ha  $\left| \frac{\partial |x_{ik}|}{\partial x_{ik}} \right| = |x_{ik}|^{n-1}$  ed il cono  $|x_{ik}| = 0$  dei divisori dello zero di  $\mathfrak{N}_n$  soddisfa alla (7); dunque *il cono dei divisori dello zero di un'algebra regolare  $\mathfrak{N}_n$ , contato  $n-1$  volte, è un'ipersuperficie caratteristica del sistema (3).*

Consideriamo ora l'algebra  $\mathfrak{H}$  di ordine  $2n^2$  prodotto diretto dell'algebra dei numeri complessi per l'algebra regolare  $\mathfrak{N}_n$ . Gli elementi di  $\mathfrak{H}$ , rispetto alla base  $e_{ik}$ ,  $i, k$ , sono matrici di ordine  $2n^2$  somme dirette di  $n$  matrici di ordine  $2n$ ,  $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ , dove  $A$  e  $B$  sono elementi arbitrari di  $\mathfrak{N}_n$ . Indicando ancora con  $X_{jl}$  l'aggiunto di  $x_{jl}$  (ove  $j, l = 1, 2, \dots, 2n$ ), un facile calcolo assicura che - per  $i, k = 1, \dots, n$  - si ha:

$$\left| \frac{\partial |x_{jl}|}{\partial x_{jl}} \right| = \left| \frac{X_{ik} + X_{n+i, n+k}}{X_{n+i, k} + X_{i, n+k}} \frac{X_{i, n+k} - X_{n+i, k}}{X_{n+i, n+k} + X_{ik}} \right| = |X_{jl}|;$$

onde l'equazione  $|x_{jl}|^{2n^2-1} = 0$  - nel campo complesso - rappresenta una ipersuperficie caratteristica del sistema (3). Va però rilevato che, nel campo reale,  $|x_{jl}| = 0$  rappresenta un cono (con vertice nell'origine) avente dimensione  $2(n^2 - 1)$  il quale quindi non fornisce senz'altro un'ipersuperficie caratteristica.

Osservazioni del tutto analoghe si possono fare nel caso di un'algebra prodotto diretto dell'algebra dei quaternioni per un'algebra regolare.

6. Sia  $A = \|a_{ik}\|$  una matrice d'ordine  $n$  i cui elementi appartengano ad un dominio di integrità,  $\mathfrak{D}$ , dotato di modulo, ma che non sia un anello pseudoeuclideo (principal ideal ring). Se  $A$  ha caratteristica massima, la sua prima colonna non può essere nulla; sicché moltiplicando  $A$  a sinistra per una matrice opportuna, possiamo far sì che l'elemento di posto  $(1, 1)$  sia non nullo. Chiamando ancora  $A$  la matrice così ottenuta, moltiplichiamola a sinistra per la matrice non degenera

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ -a_{21} & a_{11} & 0 & \dots \\ -a_{31} & 0 & a_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

si ottiene

$$(8) \quad PA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & \dots \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Poiché anche la prima colonna di  $A_1$  deve essere non nulla, si può operare su  $A_1$  come su  $A$ ; così proseguendo si perviene a dimostrare che *ogni matrice non degenera di  $\mathfrak{D}$  si può ridurre a forma triangolare,  $T$ , moltiplicandola a sinistra per opportune matrici non degeneri.*

Come si vede dalla (8), i primi due elementi della diagonale principale di  $T$  sono due minori di ordini rispettivi 1 e 2, il primo contenuto nel secondo; con un ragionamento per induzione si trova che - scelta in  $A$  una successione di minori non nulli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = |A|$ ,



di tutti gli ordini da 1 ad  $n$ , ciascuno dei quali sia contenuto nel successivo (catena completa) — gli elementi della diagonale principale di  $T$  risultano:

$$(9) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3, \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_4, \dots, \alpha_1^{n-2} \alpha_2^{n-3} \dots \alpha_{n-2} \alpha_n^{(11)}.$$

Il grado dell'elemento  $i$ -esimo della successione (9) negli elementi di  $A$  è chiaramente  $\sum_{k=1}^{i-2} k 2^{i-2-k} + i$ ; poichè  $\sum_{k=i-1}^{\infty} k 2^{i-k-2} = i$ , possiamo concludere che l'elemento  $i$ -esimo della successione (9) è di grado  $2^{i-1}$  negli elementi di  $A$ .

Consideriamo l'estensione  $\mathfrak{G}$  del campo dei numeri reali mediante gli operatori  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ ; definendo formalmente come al solito le operazioni di somma e prodotto,  $\mathfrak{G}$  risulta un anello dotato di modulo. L'insieme di operatori  $\mathfrak{G}$  è privo di divisori dello zero; perciò, se supponiamo che tutte le funzioni alle quali si applicano elementi di  $\mathfrak{G}$  abbiano derivate finite e continue sino all'ordine  $m$ , possiamo dire che tutti gli elementi di  $\mathfrak{G}$  di ordine non maggiore di  $m$  si comportano come elementi di un dominio di integrità.

Se dunque supponiamo che le  $y_i$  elementi di  $\eta$  nella (3') posseggano derivate finite e continue sino all'ordine  $2^{n-1}$ , alla matrice  $\Omega$  possiamo applicare le considerazioni fatte sopra, il che fornisce per l'elemento  $y_n$  di  $\eta$  una equazione a derivate parziali di ordine  $2^{n-1}$  al più. Un risultato analogo si ottiene per le altre  $y_i$ ; ma, in generale, le equazioni a cui si perviene per le singole  $y_i$  risultano tra loro distinte. Per ottenere un'equazione a cui soddisfino tutte le  $y_i$ , bisognerà moltiplicare tra loro le  $n$  catene complete supponendo che gli operatori loro elementi siano permutabili (cioè che le funzioni considerate abbiano derivate finite e continue siano ad un ordine eguale all'ordine dell'equazione); tenendo conto che le  $n$  catene hanno tutte eguale l'ultimo elemento, che non è naturalmente necessario ripetere nel fare il prodotto, si ha che le singole componenti di una funzione monogena soddisfanno ad una medesima equazione a derivate parziali d'ordine  $n [2^{n-1} - (n-1)]$  al più.

7. Il procedimento seguito nel numero precedente, ha forse qualche interesse in sé; però un'equazione soddisfatta da tutte le  $y_i$  si può ottenere più semplicemente, moltiplicando a sinistra la (3') per la matrice  $\Omega^*$  aggiunta

(11) Naturalmente per matrici particolari si può ottenere assai di più; ad esempio, se  $A = \begin{pmatrix} A' & A'' \\ -A' & A'' \end{pmatrix}$  è una matrice emisimmetrica del 4° ordine si ha:

$$\begin{pmatrix} A''' J & -A'' J \\ A' J & A'' J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & A'' \\ -A' & A'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$$

ove  $d$  è lo pfaffiano di  $A$ . Un altro esempio è dato dagli elementi dell'algebra prima rappresentazione regolare dei quaternioni; tali matrici moltiplicate per la trasposta, danno la matrice scalare  $|q| I_4$  ( $|q|$  norma del quaternion  $q$ ).

di  $\Omega$ . Si ha allora che *le singole componenti di una funzione monogena soddisfanno ad una medesima equazione a derivate parziali di ordine  $n$  al più* <sup>(12)</sup>.

La forma caratteristica dell'equazione coincide con la forma caratteristica del sistema; perciò *le equazioni a cui soddisfanno le componenti delle funzioni monogene sono dello stesso tipo del sistema (3) e le ipersuperficie caratteristiche del sistema sono le stesse di quelle dell'equazione.*

Poiché, come si è visto nel n. 5, gli elementi della prima rappresentazione regolare di un'algebra semplice di ordine  $kn^2$  sono composti mediante  $n$  matrici e la  $\Omega$ , come si è osservato nella <sup>(6)</sup>, si può considerare un elemento della prima rappresentazione regolare, si ha che *le singole componenti di una funzione monogena in un'algebra semplice di ordine  $kn^2$  soddisfanno ad un'equazione di ordine  $kn$  al più.*

È agevole estendere il risultato alle algebre semisemplici.

### Geometria. — Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza.

Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

I. B. Segre ha mostrato in [2] (n. 18, pp. 32-33) <sup>(1)</sup> che, se  $P$ ,  $M$  e  $V$  sono tre varietà algebriche irriducibili, non singolari, di dimensioni  $p$ ,  $m$  e  $v$  ( $0 < p < m < v$ ), tali che  $P \subset M \subset V$ , le successioni covarianti d'immersione  $\{P_M\}$ ,  $\{P_V\}$  e  $\{M_V\}$  ([2], n. 13, pp. 25-26) sono legate dalla relazione

$$(1) \quad \{P_V\} = (\{P_M\} \cdot \{M_V\})_M,$$

la quale esprime il cosiddetto *teorema dell'appartenenza*. Tale relazione è stata stabilita da B. Segre, per  $m = v - 1$  con una verifica diretta, e, per  $m < v - 1$ , con un procedimento induttivo fondato sulla considerazione di una varietà algebrica  $N$ , ( $\alpha$ ) *supposta virtualmente non singolare*, tale che  $M \subset N \subset V$ . L'ipotesi ( $\alpha$ ), *perfettamente lecita nell'ambito algebrico-geometrico cui appartengono le argomentazioni di B. Segre*, non può essere mantenuta qualora ad esempio si voglia stabilire *con argomentazioni topologiche autonome* (cioè senza fare ricorso al teorema dell'appartenenza valido per i sistemi di equivalenza) una relazione analoga alla (1) fra le successioni di classi di omologia determinate in  $P$  ed in  $M$  dalle successioni di sistemi di equivalenza  $\{P_V\}$ ,  $\{P_M\}$  e  $\{M_V\}$ .

Nella presente Nota, allo scopo di ottenere una dimostrazione del teorema dell'appartenenza indipendente dall'ipotesi ( $\alpha$ ), costruiremo (nn. 2-4) — in relazione alle varietà  $P$  e  $V$  e senza fare ricorso alle operazioni a tre termini

(12) Talora, moltiplicando a sinistra la  $\Omega$  per matrici diverse dalla  $\Omega^*$ , si ottengono equazioni di ordine minore; ad esempio, nel caso dei quaternioni moltiplicando  $\Omega$  per la sua trasposta si ottiene la matrice scalare  $\Delta I_n$  ( $\Delta$  laplaciano in quattro variabili).

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) I numeri entro parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

definite da B. Segre in [2] (nn. 9-10, pp. 19-22), ma operando entro gli anelli di equivalenza — una successione di sistemi di equivalenza, di sostegno  $P$ , la quale, al pari di  $\{P_V\}$ , dipende soltanto dalla classe di equivalenza di  $P$  in  $V$  (n. 4). Per tale successione stabiliremo (n. 4) un teorema analogo al teorema dell'appartenenza, e, in base ad esso nel n. 5 mostreremo come tale successione coincida di fatto con la successione  $\{\tilde{P}_V\}$  inversa di  $\{P_V\}$  ([2], nn. 6-7, pp. 14-17), ottenendo così una nuova dimostrazione della covarianza di  $\{P_V\}$  <sup>(2)</sup>. Da questo risultato dedurremo in modo pressoché immediato la (1).

In tutto il seguito ci atterremo alla nomenclatura ed alle convenzioni introdotte da B. Segre in [2]; in particolare indicheremo con un medesimo simbolo tanto una classe di equivalenza quanto una varietà algebrica rappresentante tale classe.

2. Consideriamo un modello proiettivo di  $V$  — che per semplicità di notazioni indicheremo con lo stesso simbolo  $V$  — immerso in uno spazio proiettivo  $[w]$  di dimensione  $w$  tanto elevata che esistano in esso  $w - v - 1$  ipersuperficie algebriche (effettive) irriducibili non singolari,  $A_1, A_2, \dots, A_{w-v-1}$ , passanti genericamente per  $V$  (ed in posizione mutuamente regolare, [2], n. 3, pp. 7-9), e tali che la varietà

$$M_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{w-v-i} = M_{i+1} \cap A_{w-v-i} \quad (i = 1, 2, \dots, w-v-1)$$

di dimensione  $m_i = v + i$ , abbia per  $i < w - v - 1$  una varietà singolare  $N_i$  per la quale, posto per semplicità  $V = M_0$ , risulti

$$(2) \quad \dim(M_j \cap N_i) \leq 2m^j - m^i - 1 = v + 2j - i - 1 \quad (0 \leq j < i < w - v - 1)^{(3)}.$$

Posto  $[w] = M_{w-v}$ , consideriamo le successioni di sistemi di equivalenza di sostegno  $M_{i-1}$  definite dalle relazioni

$$(3) \quad \{M_i M_{i-1}\} = M_{i-1}, (M_{i-1}^{[2]})_{M_i}, 0, 0, \dots,$$

$$\{M_{i+1} M_{i-1}\} = M_{i-1}, (M_{i-1}^{[2]})_{M_i} + (M_{i-1} \cdot M_i)_{M_{i+1}}, ((M_{i-1}^{[2]})_{M_i} \cdot M_i)_{M_{i+1}}, 0, 0, \dots,$$

e proviamo il seguente:

LEMMA. — *La successione  $\{M_{i+1} M_{i-1}\}$  ( $1 \leq i \leq w - v - 1$ ) non dipende dalla classe di equivalenza di  $M_i$  in  $M_{i+1}$ , cioè dalla classe di equivalenza di  $A_{w-v-i}$  in  $[w]$ .*

Che la classe di equivalenza  $(M_{i-1}^{[2]})_{M_i} + (M_{i-1} \cdot M_i)_{M_{i+1}}$  non dipenda dalla classe di equivalenza  $M_i$  è stato provato da B. Segre in [1] (n. 6, pp. 489-492) nel caso  $m_{i+1} = 3$ , e, avuto riguardo alla (2), si riconosce facilmente che questa dimostrazione sussiste per ogni valore di  $m_{i+1}$ . Resta dunque da dimostrare che la classe di equivalenza  $((M_{i-1}^{[2]})_{M_i} \cdot M_i)_{M_{i+1}}$  non dipende da  $M_i$ .

(2) La possibilità di definire  $\{P_V\}$  operando entro gli anelli di equivalenza, è stata altrimenti stabilita da B. SEGRE — sulla base del teorema dell'appartenenza — nel n. 24 (pp. 39-40) di [2].

(3) [2], n. 49, pp. 72-74; [3], § 3, pp. 72-76.

All'uopo supponiamo anzitutto che  $M_i$  sia equivalente in  $M_{i+1}$  ad un'ipersuperficie effettiva  $M^1 + M^2$  spezzata in due componenti  $M^1$  e  $M^2$ , la seconda delle quali (i) non passi per  $M_{i-1}$ , e la prima,  $M^1$ : (ii) passi semplicemente per  $M_{i-1}$ , (iii) abbia su  $M_{i-1}$  una varietà singolare di dimensione  $\leq m_i - 2$ , (iv) seghi  $M_i$  lungo una varietà

$$(4) \quad (M_i \cdot M^1)_{M_{i+1}} = M_{i-1} + Q,$$

spezzata in  $M_{i-1}$  ed in un'altra componente semplice irriducibile  $Q$ ; e proviamo che

$$(5) \quad ((M_{i-1}^{[2]} \cdot M_i)_{M_{i+1}} = ((M_{i-1}^{[2]} \cdot M^1)_{M_{i+1}}.$$

Poiché, in virtù di quanto dianzi asserito, vale l'eguaglianza fra sistemi d'equivalenza

$$(M_{i-1}^{[2]})_{M_i} + (M_{i-1} \cdot M_i)_{M_{i+1}} = (M_{i-1}^{[2]})_{M^1} + (M_{i-1} \cdot M^1)_{M_{i+1}},$$

moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per  $M_i$  in  $M_{i+1}$  si prova immediatamente che la (5) equivale all'eguaglianza

$$((M_{i-1}^{[2]} \cdot M^2)_{M_{i+1}} = (M_{i-1} \cdot M_i \cdot M^2)_{M_{i+1}},$$

che per la (4) diviene

$$(6) \quad ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1} \cdot M^1)_{M_{i+1}} = ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1} \cdot M_i)_{M_{i+1}}.$$

In virtù della (4), avuto riguardo alla proposizione a) del n. 5 (pp. 10-11) di [2], si ha che

$$(7) \quad ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1} \cdot M_i)_{M_{i+1}} = ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1} \cdot (M_i \cdot M^1)_{M_{i+1}})_{M^1} = \\ = ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1}^{[2]})_Q + ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1}^{[2]})_{M_{i-1}};$$

scambiando  $M_i$  e  $M^1$  in questa relazione e tenendo conto che

$$(Q \cdot M_{i-1})_{M^1} = (Q \cdot M_{i-1})_{M_i}^{(4)},$$

si ottiene

$$((Q \cdot M_{i-1})_{M^1} \cdot M^1)_{M_{i+1}} = ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1}^{[2]})_Q + ((Q \cdot M_{i-1})_{M^1}^{[2]})_{M_{i-1}}.$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (7) si ha la (6), e da questa consegue la relazione equivalente (5). Si riconosce immediatamente che quest'ultima vale qualunque siano le ipersuperficie  $M^1$  e  $M_i$ , purché soddisfacenti alle condizioni indicate rispettivamente in (ii), (iii) e nel primo capoverso di questo numero. È chiaro infatti, in base a tale capoverso, che è sempre

(4) Questa relazione può essere stabilita con semplici argomentazioni, che per brevità non esponiamo, analoghe a quelle accennate da B. SEGRE a p. 490 di [1], osservando che, a norma della (2), ambedue gli elementi  $(Q \cdot M_{i-1})_{M^1}$  e  $(Q \cdot M_{i-1})_{M_i}$  dell'anello di equivalenza di  $M_{i-1}$ , sono rappresentati dalla varietà d'appoggio di  $Q$  e  $M_{i-1}$ .



possibile costruire un'ipersuperficie effettiva  $\bar{M}$  di  $M_{i+1}$ , la quale passi semplicemente per  $M_{i-1}$ , abbia su  $M_{i-1}$  una varietà singolare di dimensione  $\leq m_i - 2$ , seghi  $M_i$  ed  $M^1$  lungo due varietà soddisfacenti alle condizioni enunciate in (iv) per  $(M_i \cdot M^1)_{M_{i+1}}$ , ed infine sia tale che ambedue i sistemi lineari  $|\bar{M} - M_i|$ ,  $|\bar{M} - M^1|$  contengano delle ipersuperficie effettive soddisfacenti alla (i). Scelta un'ipersuperficie  $\bar{M}$  siffatta, i due membri della (5) risultano eguali fra loro, perché eguali a  $((M_{i-1}^{[2]} \bar{M})_{M_{i+1}})$ .

3. Posto

$$(8) \quad \{M_j M_k\} = \dots \{M_{k+1} M_k\} \cdot \{M_{k+2} M_{k+1}\}_{M_{k+1}} \cdot \dots \{M_{k-3} M_{k-2}\}_{M_{k-2}} \dots \{M_i M_{i-1}\}_{M_{i-1}} \quad (0 \leq k \leq w-v-1; k < j \leq w-v),$$

proviamo il

TEOREMA I. - Se  $k+1 < j$ , la successione  $\{M_j M_k\}$  non dipende dalle ipersuperficie  $A_{w-v-i}$  per

$$i = k+1, k+2, \dots, j-1.$$

Per dimostrare l'asserto basta manifestamente provare che, fissato un qualsiasi  $i$  tale che  $k+1 \leq i \leq j-1$ , sostituendo ad  $A_{w-v-i}$  una qualsiasi altra ipersuperficie  $B_{w-v-i}$  di  $[w]$ , irriducibile e non singolare, passante per  $V$  ed in posizione regolare rispetto ad ogni  $A_{w-v-h}$  ( $h=1, \dots, i-1, i+1, \dots, j$ ) [2], n. 3, pp. 7-9), le classi di equivalenza di  $\{M_j M_k\}$  restano invariate. Ma ciò risulta conseguenza pressoché immediata del lemma del n. 2, non appena si osservi che - come si riconosce facilmente con una verifica diretta - la (8) può anche scriversi

$$\{M_j M_k\} = (\dots (((\dots (\{M_{k+1} M_k\} \cdot \{M_{k+2} M_{k+1}\})_{M_{k+1}} \dots \dots)_{M_{i-2}} \{M_{i+1} M_{i-1}\})_{M_{i-1}} \{M_{i+2} M_{i+1}\})_{M_{i+1}} \dots \{M_{j-1} M_j\})_{M_{j-1}}.$$

Ponendo nel teorema I testè dimostrato  $k=0$  e  $j=w-v$ , si ha il

TEOREMA II. - La successione  $\{[w]V\}$  dipende soltanto dalla classe di equivalenza di  $V$  in  $[w]$ .

Inoltre poggiando sulla (3) e sulla (8) si verifica agevolmente che per ogni intero  $h$  tale che  $1 \leq h < j$ , risulta

$$\{M_j V\} = (\{M_h V\} \cdot \{M_j M_h\})_{M_h}.$$

In particolare, qualora  $A_1, A_2, \dots, A_{w-d}$  siano degli iperpiani di  $[w]$  - affinché  $M_{d-v}$  è uno spazio lineare  $[d] \subset [w]$  di dimensione  $d$  - ponendo nella relazione precedente  $h=d-v$  e  $j=w-v$ , si ha che

$$(9) \quad \{[w]V\} = (\{[d]V\} \cdot \{[w][d]\})_{[d]}.$$

4. Sia  $P$  una sottovarietà algebrica (effettiva) irriducibile e non singolare di  $V$ . Considerando un modello proiettivo di  $V$  - che continueremo ad indicare con lo stesso simbolo  $V$  - immerso in uno spazio proiettivo  $[w]$  di dimensione  $w$  tanto

elevata che per  $V$  e per  $P$  siano soddisfatte le condizioni enunciate per  $V$  nel primo capoverso del n. 2, definiamo la successione  $\{_{\mathbf{V}}P\}$  di sostegno  $P$ , mediante la relazione

$$(10) \quad \{_{\mathbf{V}}P\} = (\{_{[w]}P\} \cdot \{_{[w]}\tilde{V}\})_{\mathbf{V}},$$

ove  $\{_{[w]}\tilde{V}\}$  denota l'inversa della successione  $\{_{[w]}V\}$ . Osserviamo che, se  $[w] \subset [n]$  ( $w < n$ ), a norma dell'ultima proposizione del n. 8 (p. 19) di [2], dalla (9) discende che

$$\{_{\mathbf{V}}P\} = (\{_{[n]}P\} \cdot \{_{[n]}\tilde{V}\} (V \cdot \{_{[n]}[\tilde{w}]\} \cdot \{_{[n]}[w]\})_{[w]})_{\mathbf{V}} = (\{_{[n]}P\} \cdot \{_{[n]}\tilde{V}\})_{\mathbf{V}},$$

onde, avuto riguardo al teorema II, si trae il

TEOREMA III. - *La successione  $\{_{\mathbf{V}}P\}$  dipende soltanto dalla classe di equivalenza di  $P$  in  $V$ .*

Essendo  $M$  una sottovarietà algebrica (effettiva) irriducibile e non singolare di  $V$ , tale che  $P \subset M \subset V$ , poniamo, in accordo con la (10),

$$(11) \quad \{_{\mathbf{M}}P\} = (\{_{[w]}P\} \cdot \{_{[w]}\tilde{M}\})_{\mathbf{M}}, \quad \{_{\mathbf{V}}M\} = (\{_{[w]}M\} \cdot \{_{[w]}\tilde{V}\})_{\mathbf{V}}.$$

Poiché

$$((\{_{[w]}P\} \cdot \{_{[w]}\tilde{M}\})_{\mathbf{M}} \cdot (\{_{[w]}M\} \cdot \{_{[w]}\tilde{V}\})_{\mathbf{V}})_{\mathbf{M}} = (\{_{[w]}P\} \cdot \{_{[w]}\tilde{V}\})_{\mathbf{V}},$$

dalle (10) e (11) consegue che

$$(12) \quad \{_{\mathbf{V}}P\} = (\{_{\mathbf{M}}P\} \cdot \{_{\mathbf{V}}M\})_{\mathbf{M}}.$$

5. Vogliamo dimostrare ora che

$$(13) \quad \{_{[w]}V\} = \{_{[w]}\tilde{V}\}.$$

All'uopo osserviamo anzitutto che le argomentazioni dei nn. 13-15, 18 e 22 di [2], concernenti gli elementi  $P_{V,i}$  di  $\{P_V\}$ , - valide nell'ipotesi che  $V$  sia non singolare - qualora  $V$  acquisti delle singularità, sussistono inalterate per quanto concerne le  $P_{V,i}$  aventi dimensioni maggiori della dimensione della varietà singolare di  $V$ . Inoltre, come abbiamo rilevato nel n. 1, se  $m = v - 1$  l'ipotesi ( $\alpha$ ) non interviene nella dimostrazione del teorema dell'appartenenza esposta in [2]. Pertanto, posta la (1) nella forma equivalente ([2], n. 8, p. 19)

$$(1') \quad \{\tilde{P}_V\} = (\{\tilde{P}_M\} \cdot \{\tilde{M}_V\})_{\mathbf{M}},$$

ed avuto riguardo alla (2), potremo applicare questa relazione a tutte le terne di varietà

$$P \subset V \subset M_i, M_{i-1} \subset M_i \subset M_{i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, w - v - 1),$$

ottenendo in tal guisa che

$$(14) \quad \{\tilde{P}_{[w]}\} = (\{\tilde{P}_V\} \cdot \{\tilde{V}_{[w]}\})_{\mathbf{V}}.$$

Dal n. 22 di [2] e dalla (3) discende che

$$\{_{M_i}M_{i-1}\} = \{\tilde{M}_{i-1}M_i\} \quad (i = 1, \dots, w - v),$$

e da questa relazione, confrontando la (8) — nella quale si ponga  $k=0$  e  $j=w-v$  — con la relazione che si ottiene ripetendo per le terne di varietà

$$M_{i-1} \subset M_i \subset M_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, w-v-1)$$

l'argomentazione del capoverso precedente, si trae la (13). Analogamente si prova che

$$\{_{[w]} P\} = \{\tilde{P}_{[w]}\}.$$

In base a questa relazione ed alla (13), dalle (10) e (14) discende che

$$\{_V P\} = \{\tilde{P}_V\}.$$

Ed in virtù di quest'ultima, dalla (12) consegue la (1').

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] B. SEGRE, *Nuovi contributi alla Geometria sulle varietà algebriche*, «Mem. R. Acc. d'Italia», 5, 479-576 (1934).
- [2] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, «Ann. di Mat.» (4), 35, 1-128 (1953).
- [3] F. SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*, «Mem. Acc. Sc. Torino» (2), 52, 61-118 (1902); *Memorie scelte*, vol. I, 41-115 (Bologna, Zuffi (1950)).

#### Geometria. — *Un teorema di struttura per le varietà gruppi*.

Nota di IACOPO BARSOTTI, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

In un lavoro precedente ([2] della bibliografia alla fine di questa Nota) ho esposto certi risultati concernenti la struttura delle varietà gruppi (cfr. [1] e [2] per le definizioni), ed ho elencato (nella sezione 7) alcuni problemi ancora aperti, riguardanti soprattutto il caso delle varietà non commutative. Principale fra questi è una maggiore precisazione del Teorema 6.4 di [2]. Nella presente Nota dimostro appunto la verità della congettura avanzata in [2] a proposito di tale teorema; i risultati principali sono contenuti in (5), (8) e (9), ed indicano, in sostanza, che tutte le varietà gruppi sono costruibili a partire dalle varietà abeliane e dalle varietà di Vessiot (ossia rappresentative di gruppi algebrici di matrici). Il risultato (9) potrebbe essere precisato col dare maggiori informazioni circa l'omomorfismo  $\alpha$  ed il sistema di fattori  $\gamma$ ; l'unica seria difficoltà che si frappone a tale precisazione consiste nel fatto che non si sa ancora dimostrare, nel caso di caratteristica diversa da zero, che ogni varietà di Vessiot è razionale; quando questo scoglio fosse superato, la precisazione finale di (9) discenderebbe senza difficoltà dalla presente teoria generale delle varietà gruppi, e dalla teoria speciale delle varietà di Vessiot esposta in [3] e [4]. Si osservi infine che il risultato (1) dimostra l'esistenza di una «rappresentazione massima» delle varietà gruppi.

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

La lettera  $k$  indicherà sempre, nel seguito, un corpo algebricamente chiuso fissato una volta per tutte. Sia  $G$  una varietà grupale non singolare <sup>(1)</sup> di dimensione  $n$  su  $k$ , con luogo di degenerazione  $F$ . Se  $v$  è una valutazione di  $k(G)$  su  $k$ ,  $v$  si dirà *degenere* se il suo centro su  $G$  è sottovarietà di  $F$ . La nozione di valutazione degenere è indipendente dalla scelta particolare di  $G$  nella classe di tutte le varietà grupali ad essa isomorfe. Indicheremo con  $R_G$  l'intersezione di tutti i  $Q(P/G)$  quando  $P$  varia fra tutti i punti di  $G - F$ . Poiché  $Q(P/G)$  è aritmeticamente chiuso (integrally closed), l'anello  $R_G$  è aritmeticamente chiuso in  $k(G)$ . Note proprietà ci consentono di affermare che  $R_G$  è anche l'intersezione di tutti gli anelli valutanti  $R_v$  quando  $v$  varia in uno qualsiasi dei seguenti insiemi: 1° l'insieme di tutte le valutazioni non degeneri di  $k(G)$  su  $k$ ; 2° l'insieme di tutti i posti (= valutazioni di dimensione 0 su  $k$ ) non degeneri di  $k(G)$  su  $k$ ; 3° l'insieme di tutti i divisori primi (= valutazioni di dimensione  $n - 1$  su  $k$ ) non degeneri di  $k(G)$  su  $k$ ; 4° l'insieme di tutti i divisori primi non degeneri di  $k(G)$  su  $k$  che sono di prima specie rispetto a  $G$  (ossia il cui centro su  $G$  ha dimensione  $n - 1$ ). L'ultima asserzione equivale a dire che  $R_G$  è l'insieme di tutti gli  $x \in k(G)$  i cui soli poli su  $G$  sono componenti di  $F$ .

(1). TEOREMA. - Sia  $G$  varietà grupale non singolare su  $k$ , e pongasi  $R = R_G$ ; sia  $K$  il corpo quoziente di  $R$ . Allora esiste una varietà di Vessiot  $A$  tale che:

$$1^\circ k(A) = K;$$

2° l'immersione di  $k(A)$  in  $k(G)$  genera un omomorfismo separabile  $\alpha$  di  $G$  su tutta  $A$ ;

3° il kernel di  $\alpha$  è irriducibile.

Inoltre se  $A'$  è varietà di Vessiot su  $k$ , immagine omomorfa di  $G$  in un omomorfismo  $\zeta$ , esiste un omomorfismo  $\gamma$  di  $A$  su tutta  $A'$  tale che  $\zeta = \gamma\alpha$ .

*Dim.* - Poiché  $\sigma_P(G - F) = G - F$  per ogni  $P \in G - F$  ( $F$  essendo il luogo di degenerazione di  $G$ ), è anche  $\sigma_P R = R$ , e  $\sigma_P K = K$ . Poiché  $R$  è aritmeticamente chiuso in  $k(G)$ ,  $K$  è algebricamente chiuso in  $k(G)$ . Se pertanto  $K = k(A)$  per una varietà grupale  $A$  su  $k$ , e se l'immersione di  $k(A)$  in  $k(G)$  genera un omomorfismo  $\alpha$  di  $G$  su  $A$ , si ha certamente che  $\alpha$  è separabile, e che il kernel di  $\alpha$  è irriducibile (cfr. Teorema 2.1 di [2]).

Sia  $\beta$  la matrice transfinita ad una colonna i cui elementi formano una base indipendente su  $k$  del  $k$ -modulo  $R$ . Utilizzeremo tre copie  $G_1, G_2, G_3$  di  $G$ , con p.g.n. o. (punti generali non omogenei) rispettivamente  $\{x_{11}, x_{21}, \dots\}$ ,  $\{x_{12}, x_{22}, \dots\}$ ,  $\{x_{13}, x_{23}, \dots\}$ , copie l'uno dell'altro, e supporremo  $k(G_3) \subseteq k(G_1 \times G_2)$  come prescritto dall'applicazione razionale  $D$  di  $G_1 \times G_2$  su tutta  $G_3$  che dà la legge di composizione su  $G$ . In generale, se  $y$  è un ente legato a  $G$ , si indicherà con  $y_i$  la copia di  $y$  analogamente legata a  $G_i$ . Sia  $X$  il punto razionale di  $(G_2)_{k(G_1)}$  in cui le coordinate  $x_{12}, x_{22}, \dots$  hanno i valori

(1) Si tenga presente che, a norma della definizione contenuta nella sezione 1 di [2],  $G$  è certamente non singolare quando è normale.



$x_{11}, x_{21}, \dots$  rispettivamente; allora l'autoisomorfismo  $\sigma_X$  di  $k(G_1 \times G_2)$  su  $k(G_1)$  ha significato (cfr. [1]), e si ha evidentemente  $\sigma_X^{-1} x_{i2} = x_{i3}$ ; inoltre,  $\sigma_X^{-1} \beta_2 = \beta_3$ ; questa ha elementi in  $R_2 \times k(G_1)$  (prodotto diretto su  $k$ ), ed esiste una matrice quadrata transfinita  $\mu_1$ , ad elementi in  $k(G_1)$ , tale che  $\sigma_X^{-1} \beta_2 = \mu_1 \beta_2$ . Per ogni posto non degenere  $v$  di  $G$ , esiste una matrice  $\mu(v)$ , ad elementi in  $k$ , tale che  $\mu(v) \beta = \sigma_v^{-1} \beta$ ; ciò implica che ogni elemento di  $\mu$  appartiene ad  $R_v$ , e che  $\mu(v)$  è ottenuta da  $\mu$  mediante sostituzione dei suoi elementi con le rispettive immagini mod  $\mathfrak{P}_v$ . Poiché questo è valido per ogni posto  $v$  non degenere, si conclude che gli elementi di  $\mu$  appartengono ad  $R$ , cosicché  $\mu(v)$  dipende solo dal centro  $P$  di  $v$  su  $G$ , e può quindi essere indicata con  $\mu(P)$ . Per ogni  $P, Q \in G - F$  si ha  $\mu(PQ) \beta = \sigma_Q^{-1} \sigma_P^{-1} \beta = \mu(P) \sigma_Q^{-1} \beta = \mu(P) \mu(Q) \beta$ , onde  $\mu(PQ) = \mu(P) \mu(Q)$ , e perciò anche  $\tau_Q^{-1} \mu = \mu \mu(Q)$  (cfr. sezione 1 di [2] per il significato di  $\tau_Q$ ). Sia  $H \subseteq K$  il corpo ottenuto da  $k$  mediante aggiunta di tutti gli elementi di  $\mu$ . Allora  $H$  è anche ottenibile da  $k$  mediante aggiunta degli elementi di  $\mu$  che appartengono ad un certo numero finito di righe (si tenga presente che ogni riga di  $\mu$  contiene solo un numero finito di elementi non nulli); dopo un opportuno riordinamento degli elementi di  $\beta$ , si può supporre che tali righe siano le prime  $r$ . La relazione  $\tau_Q^{-1} \mu = \mu \mu(Q)$  implica anche  $\tau_X^{-1} \mu_2 = \mu_2 \mu_1$ ; sia  $m_{jh}^i$  l'elemento di  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) che appartiene alla riga  $j$  ed alla colonna  $h$ . Siano  $1', 2', \dots, s'$  tutti gli ordinali  $h$  (in numero finito  $s$ )

tali che  $0 < h \leq r$ , o  $m_{jh}^i \neq 0$  per qualche  $j \leq r$ ; allora  $\tau_X^{-1} m_{ij}^2 = \sum_{h=1}^{s'} m_{ih}^2 m_{hj}^1$ ;

sia  $v'$  una base indipendente, su  $k$ , del  $k$ -modulo finito una cui base (non necessariamente indipendente) è data dall'insieme delle  $m_{ij}$  per  $i = 1, \dots, r$  e  $j = 1', \dots, s'$ ; sia  $v$  la matrice ad una riga i cui elementi sono gli elementi di  $v'$ . Naturalmente,  $H$  coincide col corpo ottenuto da  $k$  mediante aggiunta degli elementi di  $v$ ; la relazione precedente mostra che esiste una matrice quadrata (finita)  $M$ , i cui elementi sono combinazioni lineari, su  $k$ , degli  $m_{ij}$  per  $i, j = 1', \dots, s'$ , tale che  $\tau_X^{-1} v_2 = v_2 M_1$ . Se  $P \in G - F$ , è  $\tau_P^{-1} v = v M(P)$ , e se anche  $Q \in G - F$ :  $v M(PQ) = \tau_P^{-1} \tau_Q^{-1} v = \tau_P^{-1} v M(Q) = v M(P) M(Q)$ , onde  $M(PQ) = M(P) M(Q)$ . Ciò mostra inoltre che  $\det M(P) \neq 0$  per  $P \in G - F$ . Sia  $A$  la varietà irriducibile su  $k$  un cui p. g. n. o. è dato dall'insieme degli elementi di  $M$ ; allora la relazione precedente mostra che  $A$  è una varietà di Vessiot, e che l'immersione di  $k(A)$  in  $k(G)$  genera un omomorfismo  $\alpha$  di  $G$  su tutta  $A$ . Sia  $C$  il kernel di  $\alpha$ ; allora  $P \in C \rightarrow (C \cap F)$  se e solo se  $M(P) = \text{matrice unità}$ , ossia se e solo se  $\tau_P v = v$ , od anche se e solo se  $\tau_P x = x$  per ogni  $x \in H$ ; ciò accade se e solo se  $\mu \mu(P) = \mu$ , che è equivalente a  $\mu_1 \mu(P) \beta_2 = \mu_1 \beta_2$ , od a  $\mu(P) \beta = \beta$ , o  $\sigma_P \beta = \beta$ , o, infine,  $\sigma_P x = x$  per ogni  $x \in K$ . Il Lemma 2.1 di [2] implica allora che  $K = k(G/C)$  è puramente inseparabile sul corpo  $k(A) = H' \subseteq H$ . Pertanto  $K$  è puramente inseparabile su  $H$ . Ma la relazione  $\mu_1 \beta_2 = \beta_3$  mostra che  $K_3 \subseteq (H_1, K_2) = \text{minimo sottocorpo di } k(G_1 \times G_2) \text{ che contiene } H_1 \text{ e } K_2$ ; poiché  $K_1 \subseteq (K_2, K_3)$ , è anche  $K_1 \subseteq (H_1, K_2)$ , e perciò  $H = K$ . Poi, la relazione  $v_3 = v_1 M_2$  mostra, analogamente, che  $K_3 \subseteq (K_1, H_2)$ ; ma  $K_2 \subseteq (K_1, K_3)$ , onde  $K_2 \subseteq (K_1, H_2)$ , e pertanto  $K = H' = k(A)$ , come richiesto.

L'ultima asserzione dell'enunciato si dimostra nel modo seguente: si consideri  $k(A') \subseteq k(G)$  come è prescritto da  $\zeta$ ; si scelga un p. g. n. o.  $\{z_{11}, \dots, z_{1k}, \dots, z_{h1}, \dots, z_{hk}\}$  di  $A'$  tale che se  $Z$  è la matrice  $(z_{ij})$ , la legge di composizione su  $A'$  sia data da  $Z_3 = Z_1 Z_2$ . Allora  $z_{ij} \in Q(P/G)$  per ogni  $P \in G - F$ , e pertanto  $k[z] \subseteq R$ ; ciò implica  $k(A') \subseteq k(A)$ , c. v. d.

(2). COROLLARIO. - *Siano  $G, G'$  varietà gruppali non singolari su  $k$ , tali che esista un omomorfismo di grado positivo di  $G$  su tutta  $G'$ ; se  $G'$  è di Vessiot, tale è  $G$ .*

*Dim.* - Siano  $A, \alpha$  legate a  $G$  come in (1), e sia  $\beta$  l'omomorfismo di grado positivo menzionato nell'enunciato; allora  $\beta = \gamma\alpha$ , ove  $\gamma$  è un omomorfismo di  $A$  su tutta  $G'$ . Poiché  $\beta$  ha grado positivo, lo stesso vale per  $\alpha$ ; ma allora il fatto che il kernel di  $\alpha$  è irriducibile, e che  $\alpha$  è separabile, implica che  $\alpha$  è l'identità, onde  $G$  è di Vessiot, c. v. d.

Le nozioni di sistema di fattori (factor set) e di prodotto incrociato (crossed product), definite nella sezione 3 di [2], sono suscettibili di generalizzazione. Per il caso presente, la seguente generalizzazione è sufficiente: siano  $A, G, G'$  varietà gruppali non singolari su  $k$ , con luoghi di degenerazione  $B, F, F'$  rispettivamente; si dirà che  $A$  è un *prodotto incrociato* di  $G$  e  $G'$  se: 1°  $G$  è immagine omomorfa di  $A$ , in un omomorfismo separabile  $\alpha$ , il cui kernel  $V$  è sottovarietà del centro di  $G$ , isomorfa a  $G'$  in un isomorfismo  $\beta$ ; 2° vi è un'applicazione razionale  $\lambda$  di  $G$  su  $A$ , tale che  $\alpha[\lambda[P]] = P$  per un  $P \in G$  generico, e che  $\lambda[E_G]$  sia un punto non su  $B$ . Siano ora  $G, G'$  varietà gruppali non singolari su  $k$ , con luoghi di degenerazione  $F, F'$  rispettivamente, e  $G'$  sia commutativa. Siano  $G_1, G_2$  copie di  $G$ , e sia  $\gamma$  un'applicazione razionale di  $G_1 \times G_2$  su  $G'$ , che opera su una sottovarietà di  $G'$  ma non di  $F'$ ; diremo che  $\gamma$  è un *sistema di fattori* di  $G$  su  $G'$  se: 1° vale la relazione

$$(\gamma[P_1 \times Q_2 R_2]) (\gamma[Q_1 \times R_2]) = (\gamma[P_1 Q_1 \times R_2]) (\gamma[P_1 \times Q_2])$$

per un insieme generico  $\{P, Q, R\}$  di punti di  $G$ ; 2°  $\gamma[E_{G_1} \times E_{G_2}]$  è un punto di  $G' - F'$ . Allora la parte della sezione 3 di [2] che tratta dei prodotti incrociati e dei sistemi di fattori può essere ripetuta quasi parola per parola; in particolare rimane vero che vi è corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei prodotti incrociati di  $G$  e  $G'$ , ed il gruppo  $\Gamma(G, G')/\Gamma_0(G, G')$ . Inoltre, ogni prodotto incrociato di  $G$  e  $G'$  è birazionalmente equivalente alla varietà  $G \times G'$ .

(3). LEMMA. - *Sia  $G$  varietà grupale su  $k$ ; sia  $V$  una sottovarietà grupale irriducibile razionale di dimensione 1 del centro di  $G$ , tale che  $G/V$  sia di Vessiot. Allora  $G$  è di Vessiot.*

*Dim.* - Si può supporre che  $G$  sia non singolare. Posto  $B = G/V$ , si può ripetere per  $G$  e  $V$  la dimostrazione del Lemma (3.2) di [2], ottenendo che  $G$

è un prodotto incrociato  $\{B, V', \gamma\}$ , con  $V' \cong V$ . Sia  $R = R_G$ ; allora  $K = k(B)$  è certamente contenuto nel corpo quoziente di  $R$ , ed  $R \cap K$  contiene  $n - 1$  elementi algebricamente indipendenti su  $k$ , se  $n = \dim G$ . Sia  $t$  la coordinata di un p. g. n. o. di  $V'$  tale che la legge di composizione su  $V'$  sia data da  $t_3 = t_1 + t_2$ , o  $t_3 = t_1 t_2$ , secondoché  $V$  è vettoriale o logaritmica. Se anche  $t \in R$ , si conclude che il corpo quoziente di  $R$  ha trascendenza  $n$  su  $k$ , e che pertanto, per (1), esso coincide con  $k(G)$ , onde  $G$  è di Vessiot. Se  $t \notin R$ , allora  $t \in Q(P/G)$  per qualche  $P \in G - F$ , ove  $F$  è il luogo di degenerazione di  $G$ . Allora l'insieme  $\{v_1, \dots, v_s\}$  dei divisori primi non degeneri di  $k(G)$ , di prima specie rispetto a  $G$ , tali che  $v_i(t) < 0$ , è finito e non vuoto; pongasi  $-a_i = v_i(t)$ . Sia  $\infty$  il posto, od anche il punto, all'infinito di  $V'$  rispetto a  $t$ ; è chiaro che i  $v_i$  sono tutti e soli i divisori primi non degeneri di  $k(G)$ , di prima specie rispetto a  $G$ , che inducono  $\infty$  in  $k(t)$ . Sia  $w_i$  indotto da  $v_i$  in  $K$ , e sia  $P$  un punto generico (in particolare non degenero) del centro di  $w_i$  su  $B$ ; esiste un posto non degenero  $u$  di  $k(G)$ , composto con (compounded with)  $v_i$ , il cui centro su  $B$  è  $P$ , ed il cui centro su  $V'$  è necessariamente  $\infty$ ; se  $\lambda$  è l'applicazione razionale di  $B$  su  $G$  usata nella definizione di prodotto incrociato, e se  $\lambda[P]$  è un punto non su  $F$ , si ha che il centro  $Q$  di  $u$  su  $G$  si può porre sotto la forma  $Q = (\lambda[P])S$ , con  $S \in V - (V \cap F)$ . Ciò significa che, nella corrispondenza birazionale fra  $V' \times B$  e  $G$ ,  $Q$  corrisponde *soltanto* al punto  $S' \times P$ , se  $S'$  è il punto di  $V'$  che corrisponde ad  $S$  (cfr. la discussione dei sistemi di fattori nella sezione 3 di [2]). Pertanto  $S' = \infty$ ,  $S \in V \cap F$ , assurdo. Si conclude che  $\lambda[P]$  o non è un punto, ovvero appartiene ad  $F$ , e che quindi  $P$  appartiene o al luogo fondamentale di  $\lambda$  su  $B$ , o al trasformato totale di  $F$  secondo  $\lambda$ , che è una sottovarietà propria di  $B$ . Di conseguenza,  $w_i$  non è la valutazione banale di  $K$ . Sia allora  $x \in R \cap K$  tale che  $v_i(x) \geq a_i$  per ogni  $i$ ; ora  $xt$  è trascendente su  $K$ , e  $v_i(xt) \geq 0$ , onde  $xt \in R$ . Ciò prova che il corpo quoziente di  $R$  ha trascendenza  $n$  su  $k$ , e che quindi, per (1), esso coincide con  $k(G)$ , onde  $G$  è di Vessiot, c. v. d.

(4). LEMMA. — *Sia  $G$  varietà grupitale su  $k$ ; sia  $V$  sottovarietà grupitale irriducibile razionale del centro di  $G$ , tale che  $G/V$  sia di Vessiot. Allora  $G$  è di Vessiot.*

*Dim.* — Il lemma è vero, per (3), se  $\dim V = 1$ . Sia esso vero per  $\dim V < n$ , e si consideri il caso  $\dim V = n > 1$ . Per il Teorema (3.3) ed il Lemma 3.6 di [2],  $V$  contiene una sottovarietà grupitale irriducibile razionale  $W$  di dimensione 1; allora  $G/W$  contiene  $V/W$ , che è razionale ed irriducibile, ed ha dimensione  $n - 1$ ; poiché  $(G/W)/(V/W) \cong G/V$  (Teorema 2.2 di [2]), si conclude che  $G/W$  è di Vessiot; ma allora, per (3), tale è  $G$ , c.v.d..

(5). TEOREMA. — *Sia  $G$  varietà grupitale su  $k$ ; allora  $G$  contiene una sotto-varietà grupitale invariante di Vessiot  $H$  tale che  $G/H$  è abeliana.*

*Dim.* - Nelle notazioni del Teorema 6.4 di [2] <sup>(2)</sup>, si ha che  $G/H$  è abeliana, e che esiste un omomorfismo di  $H$  su tutta una varietà di Vessiot  $V$ , il cui kernel  $B'$  è una sottovarietà grupale del centro di  $G$ , tale che la componente  $B$  dell'identità in  $B'$  è razionale. Posto  $C = H/B$ , si ha che  $V$  è immagine omomorfa di  $C$  in un omomorfismo di grado positivo; pertanto, per (2),  $C$  è varietà di Vessiot. Poiché  $B$  è razionale, il (4) implica che anche  $H$  è di Vessiot, c. v. d.

(6). COROLLARIO. - *Le varietà di Vessiot su  $k$  sono tutte e sole le varietà grupali su  $k$  prive di immagini omomorfe abeliane di dimensione positiva.*

In altre parole, esse sono tutte e sole le varietà grupali regolari (ossia di irregolarità 0). In particolare, le varietà commutative periodiche usate in [2] sono di Vessiot.

*Dim.* - Per (5), basta provare che ogni varietà di Vessiot  $G$  su  $k$  non ha immagini omomorfe abeliane di dimensione positiva. Sia dunque  $A$  immagine omomorfa abeliana di  $G$ , in un omomorfismo  $\alpha$ . Sia  $F$  il luogo di degenerazione di  $G$ , e sia  $P \in G - F$ . Se  $P$  è periodico, ossia se  $P^e = E_G$  per un opportuno intero positivo  $\rho$ , lo stesso si può dire di  $\alpha P$ . Se  $P$  non è periodico, sia  $V$  la più piccola sottovarietà grupale di  $G$  contenente  $P$ , ossia l'intersezione di tutte le sottovarietà grupali di  $G$  contenenti  $P$ . Allora  $\dim V > 0$ ; se  $V_0$  è la componente dell'identità in  $V$ , è  $V = PV_0 \cup P^2V_0 \cup \dots \cup P^eV_0$ , se  $\rho$  è il minimo intero positivo tale che  $P^\rho \in V_0$ . Ogni  $P^iV_0$  contiene infiniti punti distinti che commutano con  $P$ , vale a dire i punti  $P^{i+n\rho}$ , con  $n$  intero; pertanto, per il Lemma (6.1) di [2], ogni punto di  $V - (V \cap F)$  commuta con  $P$ . Se  $Q$  è uno di tali punti, ogni componente di  $V$  contiene infiniti punti che commutano con  $Q$ , ossia tutti i  $P^{i+n\rho}$  per  $i$  fisso ed opportuno, ed  $n$  intero arbitrario; pertanto  $V$  è commutativa, e tale è  $V_0$ . Si ammetta per il momento la verità dell'enunciato seguente: *ogni varietà di Vessiot commutativa su  $k$  è razionale*. Allora  $V_0$  è razionale, onde  $\alpha V_0 = E_A$ , e  $(\alpha P)^\rho = E_A$ . Ciò prova che ogni punto di  $A$  è periodico, e che pertanto  $\dim A = 0$ , come richiesto.

Resta da provare la verità dell'enunciato precedente. Sia dunque  $G$  varietà di Vessiot commutativa su  $k$ . A norma dei teoremi contenuti nelle sezioni 3 e 2 di [4], è  $G = A \times B$ , ove  $B$  è logaritmica, ed  $A$  ha la proprietà: se  $h > 1$  è un intero, non divisibile per la caratteristica  $p$  di  $k$  se  $p \neq 0$ , non esiste nessun punto non degenerare  $P$  di  $A$ , diverso dall'identità  $E_A$ , tale che  $P^h = E_A$ . Basta pertanto provare che  $A$  è razionale. Ora, se così non fosse, sarebbe  $A = \{A', V, \gamma\}$ , con  $A'$  abeliana di dimensione positiva, e  $V$  razio-

(2) A proposito della dimostrazione di tale teorema, e dell'enunciato del Corollario del Teorema (6.3) di [2], debbo richiamare l'attenzione su di un lapsus: ovunque è scritto « finite degree » si deve leggere « positive degree ». Un'altra asserzione che necessita correzione si trova nel secondo esempio che segue la dimostrazione del Teorema 6.2 di [2]. Il luogo di degenerazione in questo esempio è non « the line at infinity », ma « the line at infinity and the line  $x_1 = 0$  ».



nale, pure di dimensione positiva (poiché certo  $A$  non è abeliana), a norma del Teorema (3.2) di [2]. Sia  $h > 1$  un intero, non divisibile per  $p$  se  $p \neq 0$ ; sia  $\lambda$  l'applicazione razionale di  $A'$  su  $A$  usata nella definizione di prodotto incrociato, e sia  $\alpha$  l'omomorfismo naturale di  $A$  su tutta  $A'$ ; si identifichi  $V$  col kernel di  $\alpha$ . Sia  $P \in A'$  tale che  $\lambda [Q^i]$  sia un punto non degenero di  $A$  per  $i = 1, \dots, h$ , e per ogni  $Q \in A'$  tale che  $Q^h = P$  (un tale  $P$  esiste certamente), e siano  $Q, R$  due fra tali  $Q$ , distinti fra loro. Allora  $\gamma [Q_1^i \times Q_2]$  e  $\gamma [R_1^i \times R_2]$  sono punti non degeneri di  $V$  per  $i = 1, \dots, h$ . Siano  $S, T$  punti non degeneri di  $V$  tali che

$$S^h \prod_i^{h-1} \gamma [Q_1^i \times Q_2] = E_V \quad \text{e} \quad T^h \prod_i^{h-1} \gamma [R_1^i \times R_2] = E_V.$$

Allora  $(S\lambda [Q])^h = (T\lambda [R])^h = \lambda [P]$ , onde  $ST^{-1} (\lambda [Q]) (\lambda [R])^{-1}$  è un punto non degenero di  $A$ , diverso da  $E_A$ , la cui potenza  $h$ -esima è  $E_A$ . Questa contraddizione prova l'asserto (e prova anche che  $A$  è o vettoriale, o periodica), c. v. d.

(7). COROLLARIO. — *Ogni immagine omomorfa di una varietà di Vessiot su  $k$  è una varietà di Vessiot.*

(8). COROLLARIO. — *Notazioni come in (5). Allora  $H$  è unica, ed ha la proprietà che ogni sottovarietà grupपालe di Vessiot di  $G$  è sottovarietà grupपालe di  $H$ .*

*Dim.* — Sia  $V$  sottovarietà grupपालe di Vessiot di  $G$ ; se  $\alpha$  è l'omomorfismo naturale di  $G$  su  $A = G/H$ , per (6) è  $\alpha V = E_A$ , e pertanto  $V \subseteq H$ , c. v. d.

Per tale motivo,  $H$  si può chiamare la *massima sottovarietà di Vessiot di  $G$* .

Vari risultati di un certo interesse seguono da (5), (8), e dal contenuto della sezione 6 di [2], in particolare per quanto riguarda le relazioni fra indici, rango, e struttura dello stem (o anche dell'*aggiunto*) di una data varietà grupपालe. Tali argomenti rientrerebbero più propriamente in uno studio dettagliato delle varietà di Vessiot.

Il (5) è un teorema strutturale, ma non costruttivo; un teorema costruttivo (probabilmente ancora suscettibile di una forte precisazione) è il seguente:

(9). TEOREMA. — *Sia  $G$  varietà grupपालe su  $k$ , e sia  $H$  la sua massima sottovarietà di Vessiot; allora esistono una varietà abeliana  $A$  su  $k$  isogena a  $G/H$ , una varietà di Vessiot  $B$  su  $k$ , un omomorfismo  $\alpha$  di grado positivo operante su  $A \times B$ , una varietà grupपालe commutativa razionale  $V$  su  $k$ , ed un sistema di fattori  $\gamma$  di  $\alpha (A \times B)$  su  $V$ , tali che  $G \cong \{ \alpha (A \times B), V, \gamma \}$ .*

*Dim.* — Sia  $V$  la massima sottovarietà grupपालe razionale della componente dell'identità  $C$  nel centro di  $G$ ; allora, per (7) e (8),  $V$  è la componente dell'identità in  $H \cap C$ ; se  $L = G/V$ , è  $G \cong \{ L, V, \gamma \}$  per un  $\gamma$  opportuno;

infatti, questo è vero se  $\dim V \leq 1$  come conseguenza del Lemma (3.2) di [2], che resta valido nel caso presente; se  $\dim V > 1$ , la verità dell'asserzione si dimostra per ricorrenza su  $\dim V$ , in modo analogo a quello usato nell'ultima parte della dimostrazione del Lemma (3.5) di [2]. Se  $\beta$  è l'omomorfismo naturale di  $G$  su tutta  $L$ ,  $A = \beta C$  è abeliana, per il Teorema (3.2) di [2], e  $B = \beta H$  è di Vessiot per (7); i punti non degeneri di  $A \cap B$  sono tutti e soli quelli le cui immagini inverse secondo  $\beta$  sono le componenti di  $C \cap H$  fuori del luogo di degenerazione di  $G$ ; pertanto l'insieme di tali punti è finito, ed  $L$  è immagine omomorfa, in un omomorfismo di grado positivo, di  $A \times B$ . Infine,  $G/H \cong L/B$  è isogena ad  $A$  per il Teorema (2.3) di [2], c. v. d.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] I. BARSOTTI, *A note on abelian varieties*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 2, p. 236 (1954).
- [2] I. BARSOTTI, *Structure theorems for group-varieties*, « Ann. di Mat. Pura ed Appl. », in corso di stampa.
- [3] E. R. KOLCHIN, *Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, « Ann. of Math. », 49, p. 1 (1948).
- [4] E. R. KOLCHIN, *On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups*, « Ann. of Math. », 49, p. 774 (1948).

**Geometria.** — *Su due invarianti integrali della teoria metrica delle superficie rigate.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In una Nota pubblicata alcuni anni fa <sup>(1)</sup>, sono pervenuto ad alcune limitazioni per i principali invarianti integrali che intervengono nella teoria metrica delle superficie rigate, studiate mediante vettori duali, servendomi di alcuni risultati fondamentali relativi alle curve sghembe chiuse, dovuti a Beniamino Segre <sup>(2)</sup>.

Nella presente Nota dimostro una relazione fra due dei limiti inferiori ivi considerati, relazione che permette di migliorare, in taluni casi, i risultati della mia Nota precedente.

2. Consideriamo il cono direttore di una superficie rigata  $\mathcal{R}_1$ , cioè il cono  $\mathcal{C}_1$  ottenuto tracciando per un punto arbitrario  $O$  fisso, le parallele alle generatrici di  $\mathcal{R}_1$ . Indicheremo allora con  $N$  la normale alla superficie rigata considerata nel punto centrale di una sua generica generatrice  $G$ , e con  $T$  la

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) G. SABAN, *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, V, pp. 24-30 (1948).

(2) B. SEGRE, *Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante che contengono nell'interno una linea assegnata*, « Boll. Un. Mat. Ital. », 13, pp. 279-283 (1934) e *Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, III, pp. 422-426 (1947).

perpendicolare comune a  $G$  ed  $N$ , che risulta quindi tangente alla rigata: chiameremo queste rette rispettivamente *normale* e *tangente* della rigata  $\mathfrak{R}_1$  in  $G$ .

L'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$  della  $\mathfrak{R}_1$  si ottiene considerando la curva intersezione del cono direttore di  $\mathfrak{R}_1$  con una sfera di raggio unitario,  $\Sigma$ , avente il punto  $O$  per centro.

È noto che *la tangente in un punto  $P$  all'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$  di una superficie rigata  $\mathfrak{R}_1$  è parallela alla normale della rigata nella generatrice corrispondente a  $P$* : da questo semplice risultato segue che la retta ortogonale sia al raggio vettore che alla tangente dell'immagine sferica è parallela alla tangente della rigata nella generatrice corrispondente al punto dell'immagine sferica considerato. Si ha quindi che *il cono direttore  $\mathcal{C}_3$  della superficie rigata  $\mathfrak{R}_3$  generata dalle tangenti  $T$  di una superficie rigata assegnata  $\mathfrak{R}_1$ , è il cono complementare del cono direttore  $\mathcal{C}_1$  della rigata  $\mathfrak{R}_1$ .*

3. Ricordiamo ancora che, rappresentando mediante il suo vettore duale<sup>(3)</sup> la generatrice  $G$  della rigata  $\mathfrak{R}_1$ , si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{G}}{ds} &= \vec{PN} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\vec{PG} + \vec{QT} \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= -\vec{QN}\end{aligned}$$

con

$$P = p + \varepsilon p_0, \quad Q = q + \varepsilon q_0, \quad \varepsilon^2 = 0$$

e dove  $ds$  denota l'elemento infinitesimale d'arco della linea di stringimento  $\mathcal{Q}$  della rigata considerata. Si ha inoltre, per le parti reali degli invarianti  $P$  e  $Q$ ,

$$p = \sqrt{\left(\frac{d\vec{g}}{ds}\right)^2}, \quad |q| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{t}}{ds}\right)^2},$$

dove  $\vec{g}$  e  $\vec{t}$  sono rispettivamente i versori delle rette  $\vec{G}$  e  $\vec{T}$ .

Abbiamo inoltre chiamato superficie rigata *chiusa*<sup>(4)</sup> una superficie rigata la cui linea di stringimento  $\mathcal{Q}$  sia chiusa, assieme alla sua immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$ .

4. Consideriamo ora l'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$  della rigata chiusa  $\mathfrak{R}_1$ , e supponiamo che sulla sfera unitaria  $\Sigma$  sulla quale è tracciata la  $\mathfrak{I}_1$ , esista almeno un circolo massimo non intersecato dalla curva sferica chiusa  $\mathfrak{I}_1$ . Chiamiamo

(3) Cfr. ad esempio W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I, pp. 260-304, Dover, New York (1945).

(4) Cfr. la Nota citata in <sup>(1)</sup> e G. SABAN, *Su alcune famiglie di geodetiche*, « Rend. di Mat. e delle sue App. », Ser. V, vol. XIII, pp. 115-124 (1954) nota 6.

allora  $K_1$  la più piccola calotta sferica che contenga interamente l'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$ : sia  $C_1$  la circonferenza, di raggio sferico  $r_1$ , che delimita  $K_1$ , e poniamo

$$o_1 = 4r_1.$$

In base ai risultati del Segre a cui ho accennato in principio, ho dimostrato che vale la relazione

$$(1) \quad \oint_{\mathfrak{L}} p \cdot ds > o_1$$

ove l'integrale va esteso a tutta la linea di stringimento chiusa  $\mathfrak{L}$ . Alla quantità  $o_1 = 4r_1$  ho dato il nome di *primo orientamento* della rigata  $\mathfrak{R}_1$ : nel caso che l'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$  non sia contenuta per intero in nessun emisfero di  $\Sigma$ , porremo  $o_1 = 2\pi$ , e la relazione (1) rimane ancora valida.

Similmente, definita la calotta  $K_3$ , di raggio sferico  $r_3$ , come quella minima contenente l'indicatrice sferica  $\mathfrak{I}_3$  della rigata  $\mathfrak{R}_3$  definita al n. 2, vale la relazione

$$(2) \quad \oint_{\mathfrak{L}} |q| \cdot ds > o_2$$

ove parimenti l'integrale va esteso a tutta la linea di stringimento  $\mathfrak{L}$  (che risulta comune ad  $\mathfrak{R}_1$  ed  $\mathfrak{R}_3$ ) ed ove si è posto  $o_2 = 4r_3$  (ed  $o_2 = 2\pi$  qualora non esista un emisfero di  $\Sigma$  contenente per intero la curva  $\mathfrak{I}_3$ ):  $o_2$  viene detto *secondo orientamento* di  $\mathfrak{R}_1$ . Dalle definizioni di  $o_1$  ed  $o_2$  si ha ancora

$$0 < o_1 \leq 2\pi, \quad 0 < o_2 \leq 2\pi.$$

5. Consideriamo ora il cono direttore  $\mathcal{C}_1$  ed il suo cono complementare  $\overline{\mathcal{C}}_1 \equiv \mathcal{C}_3$ : sia inoltre  $\mathcal{C}_{r,3}$  il cono di rivoluzione di vertice O che taglia la sfera  $\Sigma$  secondo la circonferenza  $C_3$  che delimita la calotta  $K_3$ , la quale, come s'è visto, è la calotta sferica minima contenente interamente  $\mathfrak{I}_3$ . Detto  $\overline{\mathcal{C}}_{r,3}$  il cono complementare di  $\mathcal{C}_{r,3}$ , questo cono (che è parimenti di rivoluzione) sarà completamente *interno* al cono complementare di  $\mathcal{C}_3$ , poiché  $\mathcal{C}_3$  è completamente interno a  $\mathcal{C}_{r,3}$ . Ma il cono complementare di  $\mathcal{C}_3$  è il cono direttore  $\mathcal{C}_1$  della rigata  $\mathfrak{R}_1$ . Ora, come facilmente si può calcolare,  $\overline{\mathcal{C}}_{r,3}$  interseca la sfera  $\Sigma$  secondo una circonferenza  $\overline{C}_{r,3}$  di raggio sferico  $\overline{r}_{r,3} = \pi/2 - r_3$ , e questa, trovandosi interna alla curva  $\mathfrak{I}_1$ , sarà parimenti interna alla circonferenza  $C_1$  di raggio sferico  $r_1$ .

Avremo dunque

$$(3) \quad r_1 \geq \frac{\pi}{2} - r_3$$

e quindi

$$(4) \quad o_1 + o_2 \geq 2\pi.$$



Quest'ultima relazione, considerata assieme alle

$$0 < o_1 \leq 2\pi, \quad 0 < o_2 \leq 2\pi$$

mostra che *i due orientamenti di una generica superficie rigata non sono fra loro indipendenti.*

Osserviamo ancora che il segno di eguaglianza sussiste nella (3) solamente qualora le circonferenze  $\bar{C}_{r,3}$  e  $C_1$  (e quindi anche l'immagine sferica  $\mathfrak{I}_1$ , racchiusa nella zona di  $\Sigma$  delimitata da queste) coincidano: in tal caso sia  $\mathfrak{I}_1$  che  $\mathfrak{I}_3$  si riducono a circonferenze e le generatrici delle rigate  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_3$  corrispondenti formano un angolo costante con una direzione fissa dello spazio.

6. Consideriamo ora il caso che sia la curva  $\mathfrak{I}_1$  che la curva  $\mathfrak{I}_3$  apparten-gano ambedue per intero ad un emisfero di  $\Sigma$ . Poichè la curva sferica chiusa  $\mathfrak{I}_1$  appartiene ad un emisfero di  $\Sigma$  e, per quanto abbiamo visto in precedenza, racchiude interamente la circonferenza  $\bar{C}_{r,3}$ , la lunghezza di  $\mathfrak{I}_1$  sarà maggiore di quella di questa circonferenza, vale a dire che sarà

$$\oint_{\Sigma} p \cdot ds \geq 2\pi\rho$$

ove  $\rho$  denota il raggio di  $C_{r,3}$ . Poichè il raggio sferico di  $\bar{C}_{r,3}$  è  $\bar{r}_{r,3} = \pi/2 - \bar{r}_3$  potremo scrivere

$$\oint_{\Sigma} p \cdot ds \geq 2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - r_3\right)$$

e cioè

$$(5) \quad \oint_{\Sigma} p \cdot ds \geq 2\pi \cos r_3.$$

Ovviamente questo risultato permette di migliorare la limitazione (1), purché si abbia

$$(6) \quad 2\pi \cos r_3 \geq o_1.$$

Ma la (6) può scriversi

$$2\pi \cos r_3 \geq 4r_1$$

ovvero, per via della (3),

$$\pi \cos r_3 \geq \pi - 2r_3$$

cioè la (6) è equivalente alla

$$(7) \quad \cos r_3 + \frac{2r_3}{\pi} \geq 1.$$

Orbene, la (7) è sempre verificata, perché la funzione

$$f(x) = \cos x + \frac{2x}{\pi}$$

rimane sempre la maggiore ad 1 nell'intervallo aperto  $(0, \pi/2)$ , prendendo il valore 1 agli estremi. La (6) sussiste quindi nel medesimo intervallo aperto, che coincide d'altronde con l'intervallo nel quale è considerato il problema, per via delle ipotesi poste in capo a questo paragrafo.

È dunque

$$\oint_{\Sigma} p \cdot ds \geq 2\pi \cos r_3$$

e questo limite non può venir ulteriormente migliorato, come risulta dall'esempio considerato in precedenza delle rigate chiuse con tutte le generatrici formanti un angolo costante (diverso da 0 e  $\pi/2$ ) con una direzione assegnata: in tal caso  $\mathfrak{I}_1$  coincide con  $\bar{C}_{r,3}$  per cui è precisamente

$$\oint_{\Sigma} p \cdot ds = 2\pi \cos r_3.$$

Parimenti, con un ragionamento del tutto analogo e nelle medesime ipotesi si può migliorare la (4), scrivendo

$$(8) \quad \oint_{\Sigma} |q| \cdot ds \geq 2\pi \cos r_1.$$

Fuori delle nostre ipotesi, e cioè per  $r_1$  o  $r_3$  uguali a 0 o  $\pi/2$ , si ha

$$2\pi \cos r_3 = 0_1 \quad \text{e} \quad 2\pi \cos r_1 = 0_2$$

e quindi non possono venir migliorate le (1) e (2).

Questa asserzione mostra perché non possa venir migliorato con questo metodo il risultato del Segre relativo alla torsione integrale <sup>(5)</sup> (ciò che d'altronde è provato dallo stesso Segre per altra via): difatti, presa una sviluppabile chiusa è

$$\oint_{\Sigma} |q| \cdot ds = \oint_{\Sigma} |\tau| \cdot ds$$

ma poiché  $\mathfrak{I}_1$  taglia tutti i circoli massimi di  $\Sigma$  <sup>(6)</sup> non sono soddisfatte le ipotesi del n. 6.

(5) Cfr. la seconda Nota citata in <sup>(2)</sup>.

(6) Cfr. la prima Nota citata in <sup>(2)</sup> oppure W. FENCHEL, *Ueber Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, «Math. Ann.», 101, pp. 238-252 (1929).

**Gas-dinamica transonica.** — *Sopra una classe di soluzioni singolari della equazione di Tomotika e Tamada per lo studio dei moti transonici.* Nota di SILVIO NOCILLA, presentata (\*) dal Corrisp. C. FERRARI.

INTRODUZIONE. — Nell'intento di approfondire e generalizzare la teoria sviluppata da Tomotika e Tamada <sup>(1)</sup> onde poter studiare un maggior numero di profili bidimensionali transonici, riteniamo opportuno anzitutto riprendere lo studio, già iniziato dai sopranominati Autori, delle soluzioni polidrome, con punto di diramazione doppio, dell'equazione differenziale di tipo misto (e cioè ellittica per  $\tau < 1$ , iperbolica per  $\tau > 1$ ):

$$(T) \quad \Omega(\tau, \beta) \equiv \tau^2 \psi_{\tau\tau} + \tau \psi_{\tau} + (1 - \tau^2) \psi_{\beta\beta} = 0$$

che nel lavoro citato è posta a base di tutta la teoria. E questo non solo per lo scopo fondamentale di ottenere tutta una famiglia di funzioni polidrome che godono di proprietà analoghe a quelle delle due funzioni che vengono utilizzate nel lavoro stesso, ma anche perché talvolta i processi dimostrativi in esso impiegati non ci sembrano del tutto soddisfacenti e rigorosi. Così ad esempio per ricavare la prima di tali funzioni si parte da uno sviluppo in serie che è in disaccordo con quello che noi dimostreremo per la medesima funzione. Questo fatto, che non pregiudica i risultati ottenuti nel citato lavoro perché ivi si utilizza questa funzione solo sotto forma finita, per noi invece riveste un'importanza grandissima dato che nel corso del nostro studio applicheremo direttamente tale sviluppo, ed inoltre in base ad esso ricaveremo degli sviluppi in serie di altre funzioni.

I. LA FUNZIONE  $\Psi_{-1/2}$  — Consideriamo la serie:

$$(I) \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\Phi) J_n(n\zeta)$$

con  $\Phi$  e  $\zeta$  variabili indipendenti complesse, e  $J_n$  funzione di Bessel di prima specie, serie che esamineremo sotto tre diversi aspetti:

a) *come funzione analitica della variabile complessa:*

$$(2) \quad \zeta = \tau e^{i\sigma}.$$

Sotto questo aspetto la (I) si presenta come una serie di Kapteyn con coefficienti complessi, e quindi come una generalizzazione della serie a coefficienti reali che si ottiene attribuendo a  $\Phi$  valori reali, studiata ad esempio dal Watson <sup>(2)</sup>.

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) *Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid*, Parte III («Quarterly of Appl. Math.», luglio 1951, p. 129).

(2) *A treatise on the theory of Bessel functions*, Chap. XVII (Cambridge University Press, 1945).

b) come funzione analitica  $F(\Phi)$  della variabile complessa:

$$(3) \quad \Phi = \beta + i\alpha$$

c) come funzione  $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi)$  analitica rispetto ad entrambe le variabili complesse  $\zeta$  e  $\Phi$ , soddisfacente all'equazione alle derivate parziali:

$$(4) \quad \mathcal{L}(\zeta, \Phi) \equiv \zeta^2 \Psi_{\zeta\zeta} + \zeta \Psi_{\zeta\Phi} + (1 - \zeta^2) \Psi_{\Phi\Phi} = 0$$

che, salvo il cambiamento delle variabili indipendenti, coincide con la (T).

Orbene, il fatto interessante è che, sotto ipotesi che verranno fra poco precisate, la serie (1) si può sommare sotto forma finita. Per raggiungere lo scopo dimostriamo le seguenti tesi:

TESI I. - La serie (1) è maggiorata da una serie a termini positivi, convergente per qualunque  $\beta$ , e nell'ipotesi che sia:

$$(5) \quad |h(\zeta)| < \lambda \leq 1$$

con

$$(6) \quad h(\zeta) = \frac{\zeta \exp \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

e:

$$(7) \quad \lambda = e^{-\alpha}.$$

Infatti in virtù delle (3) e (7) la (1) si può scrivere:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^n e^{in\beta} + \lambda^{-n} e^{-in\beta}) J_n(n\zeta)$$

da cui appare che essa è maggiorata dalla serie a termini positivi:

$$(8) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^n + \lambda^{-n}) |J_n(n\zeta)|.$$

Applichiamo ora la seguente disuguaglianza di Kapteyn<sup>(3)</sup>:

$$(9) \quad |J_n(n\zeta)| \leq |h(\zeta)|^n$$

per dedurre che la (8) a sua volta è maggiorata dalla serie:

$$(10) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [\lambda |h(\zeta)|]^n + \left[ \frac{|h(\zeta)|}{\lambda} \right]^n \right\}.$$

Basta allora che  $|h(\zeta)|$  e  $\lambda$  soddisfino alla condizione (5) perché la (10) converga. La tesi I risulta pertanto dimostrata.

Esaminiamo ora il significato della condizione fondamentale di convergenza (5). Per questo osserviamo che la funzione  $|h(\zeta)|$  per qualunque valore dell'argomento  $\sigma$  di  $\zeta$  è funzione crescente del suo modulo  $\tau$ , purché  $\zeta$  appartenga al « dominio K » definito come quello interno alla linea  $|h(\zeta)| = 1$ . Ne

(3) Vedi ad esempio: WATSON, loc. cit., p. 268.



conseguo che le curve di livello della funzione  $|h(\zeta)|$  sul piano di coordinate polari  $(\tau, \sigma)$  sono del tipo indicato in figura 1, e quindi che il significato geo-

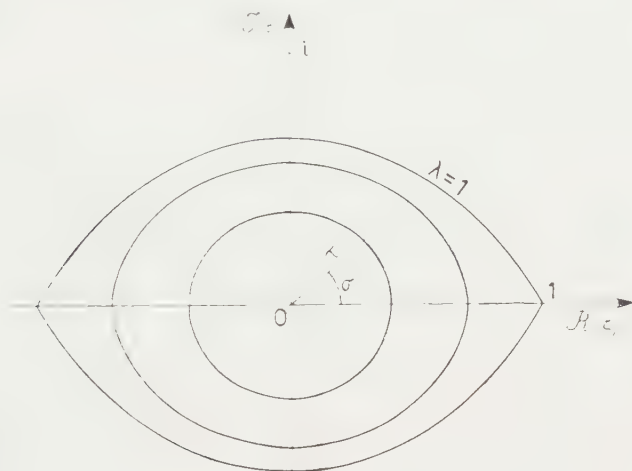


Fig. 1. - Linee  $|h(\zeta)| = \lambda$  (costante) sul piano complesso  $\zeta = \tau e^{i\sigma}$ .

metrico della (5) è che  $\zeta$  appartenga al dominio  $K^{(\lambda)}$  (dipendente da  $\lambda$  e certo interno a  $K$ ) definito come quello interno alla linea:

$$|h(\zeta)| = \lambda.$$

Se in particolare si suppone  $\sigma = 0$  l'andamento della funzione  $|h(\zeta)| = h(\tau)$  è indicato in figura 2. E inoltre, sempre per  $\sigma = 0$ , la condizione (5) diventa:

$$(II) \quad \tau < \tau_\infty \leq 1$$

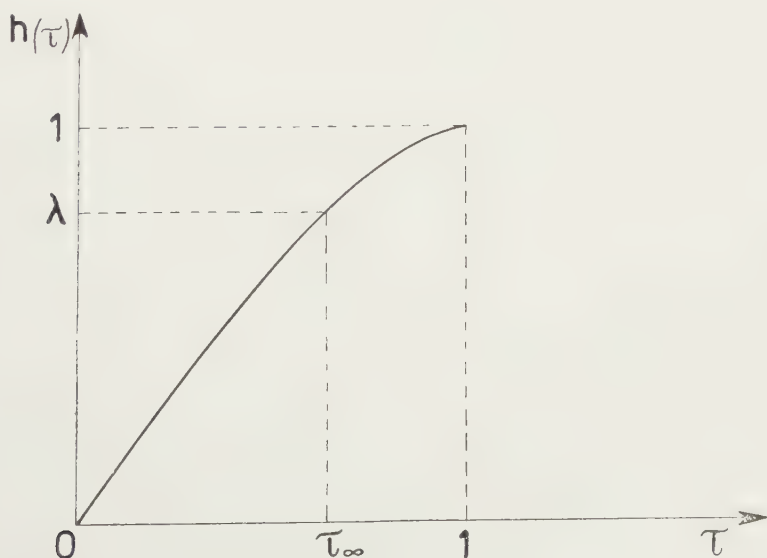


Fig. 2. - Diagramma della funzione  $|h(\zeta)| = h(\tau)$  ( $\sigma = 0$ ).

essendo  $\tau_\infty$  univocamente legato a  $\lambda$  dalla relazione:

$$h(\tau_\infty) = \lambda$$

che, in virtù della (6), può scriversi sotto la forma:

$$(12) \quad \operatorname{arch} \frac{1}{\tau_\infty} - \sqrt{1 - \tau_\infty^2} = -\lg \lambda.$$

TESI II. - La serie (1) definisce una funzione analitica  $F(\Phi)$  della variabile complessa  $\Phi$ .

Infatti dalla tesi I consegue che se la (5) è soddisfatta, e quindi:

$$(13) \quad -\lg |h(\zeta)| > \alpha \geq 0$$

allora la serie (1) di funzioni  $\cos(n\Phi)$  è uniformemente convergente sopra tutta la striscia del piano complesso  $\Phi$  definita dalla (13) (ved. fig. 3), e quindi rappresenta su di essa una ben determinata funzione analitica  $F(\Phi)$  della variabile complessa  $\Phi$ .

TESI III. - Nell'ipotesi che  $\zeta$  sia interno al dominio  $K^{(\lambda)}$  la funzione analitica  $F(\Phi)$  definita dalla (1) coincide con la funzione:

$$(14) \quad \frac{1}{1 - \zeta \cos \omega}$$

in cui  $\omega$  rappresenta quella unica funzione della variabile complessa  $\Phi$

Fig. 3. - Campo di analiticità della funzione  $F(\Phi)$  sul piano complesso  $\Phi = \beta + i\alpha$ .

che sulla striscia (13) del piano complesso  $\Phi$  è analitica e soddisfa alle condizioni <sup>(4)</sup>:

$$(15) \quad \zeta \operatorname{sen} \omega - \omega + \Phi = 0$$

$$(16) \quad \omega = 0 \quad \text{per} \quad \Phi = 0.$$

Infatti anche la funzione (14), così come la  $\omega$ , risulta univocamente determinata sulla solita striscia e, in base ad una formula stabilita da Kapteyn, per  $\Phi$  reale ammette proprio lo sviluppo (1). Ma allora, in virtù di un noto teorema sulle funzioni analitiche, le funzioni  $F(\Phi)$  e (14), che coincidono sull'asse reale del piano complesso  $\Phi$ , devono necessariamente coincidere su tutto il comune campo di analiticità, ossia sulla striscia (13). Anche la tesi III risulta così dimostrata.

(4) È bene sottolineare che siccome non esiste una sola funzione analitica che sulla striscia (13) soddisfi alla (15), la condizione (16), o una ad essa equivalente, è necessaria per precisare quale di esse si intende scegliere. Ciò d'altra parte è strettamente legato al fatto che sulla frontiera del dominio di convergenza della serie (1) si trova un punto singolare che si dimostra essere un punto di diramazione doppio. Riprenderemo la questione in un prossimo lavoro in cui applicheremo le presenti considerazioni alla determinazione esplicita di profili alari transonici.

Osserviamo infine che la funzione ora introdotta, che chiameremo d'ora in poi  $\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi)$ , e che in base a quanto dimostrato ammette lo sviluppo in serie (1) anche per  $\Phi$  complesso, soddisfa all'equazione (4) perché ogni termine del suo sviluppo in serie (1) soddisfa evidentemente all'equazione stessa.

2. STUDIO DI ALTRE FUNZIONI DEDUCIBILI DA  $\Psi_{-1/2}$ . — I risultati ottenuti nel paragrafo precedente si possono estendere nel senso che si può determinare tutta una famiglia di altre funzioni che godono di proprietà affatto analoghe a quelle di cui gode la  $\Psi_{-1/2}$ . Per raggiungere lo scopo osserviamo che se una generica funzione  $\Psi(\zeta, \Phi)$  soddisfa all'equazione (4), vi soddisfa pure la funzione <sup>(5)</sup>:

$$(17) \quad \Psi^{(1)}(\zeta, \Phi) = \int_{\Phi_0}^{\Phi} \Psi(\zeta, \Phi) d\Phi + f(\zeta)$$

dove  $\Phi_0$  è una costante, sia rispetto a  $\Phi$  che a  $\zeta$ , e la funzione aggiuntiva  $f(\zeta)$  è una qualunque soluzione dell'equazione alle derivate ordinarie in  $\zeta$ :

$$(18) \quad \zeta^2 f''(\zeta) + \zeta f'(\zeta) + (1 - \zeta^2) \Psi_{\Phi}(\zeta, \Phi_0) = 0$$

il cui integrale generale si può esprimere sotto la forma:

$$(19) \quad f(\zeta) = c_1 \lg \zeta + c_2 - \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \int_0^{\zeta_1} \frac{1 - \zeta_2^2}{\zeta_2} \Psi_{\Phi}(\zeta_2, \Phi_0) d\zeta_2.$$

Noi determineremo le nuove funzioni ponendo sempre:

$$c_1 = c_2 = 0$$

ed assumendo, per comodità di calcolo,  $\Phi_0 = 0$ , cui sappiamo che corrisponde  $\omega = 0$ . Come funzione  $\Psi$  da introdursi nella (17) assumiamo per prima la funzione  $\Psi_{-1/2} - 1$ . Tenuto conto che dalla (15) si ricava:

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = 1 - \zeta \cos \omega \quad (\zeta = \text{costante})$$

(5) Per dimostrarlo basta integrare tra  $\Phi_0$  e  $\Phi$  i due membri della (4). Si ottiene l'equazione:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \Psi(\zeta, \Phi) d\Phi + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \Psi(\zeta, \Phi) d\Phi + (1 - \zeta^2) [\Psi_{\Phi}(\zeta, \Phi) - \Psi_{\Phi}(\zeta, \Phi_0)]$$

che con la posizione (17) diventa:

$$\zeta^2 \left[ \Psi_{\zeta\zeta}^{(1)} - f''(\zeta) \right] + \zeta \left[ \Psi_{\zeta}^{(1)} - f'(\zeta) \right] + (1 - \zeta^2) \left[ \Psi_{\Phi\Phi}^{(1)} - \Psi_{\Phi}(\zeta, \Phi_0) \right] = 0$$

da cui appare chiaramente che affinché  $\Psi^{(1)}$  soddisfi alla (4) occorre e basta che  $f(\zeta)$  soddisfi alla (18).

risulta:

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} [\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi) - 1]_{\Phi=0} = \left[ \frac{\zeta \sin \omega}{(1 - \zeta \cos \omega)^3} \right]_{\omega=0} = 0$$

per cui la funzione aggiuntiva (19) è nulla. Otteniamo così una seconda funzione soddisfacente alla (4) sotto la forma:

$$\Psi_{1/2}(\zeta, \Phi) = \int_0^{\Phi} [\Psi_{-1/2}(\zeta, \Phi) - 1] d\Phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\Phi) J_n(n\zeta).$$

Essa si può esprimere sotto forma finita: infatti si ha:

$$\Psi_{1/2}(\zeta, \Phi) = \int_0^{\omega} \left( \frac{1}{1 - \zeta \cos \omega} - 1 \right) (1 - \zeta \cos \omega) d\omega = \zeta \sin \omega.$$

Come seconda funzione  $\Psi$  assumiamo ora la funzione trovata  $\Psi_{1/2}$ . Dato che risulta:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \Phi} \Psi_{1/2}(\zeta, \Phi) \right]_{\Phi=0} = \left[ \frac{\zeta \cos \omega}{1 - \zeta \cos \omega} \right]_{\omega=0} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$$

la funzione aggiuntiva (19) vale in questo caso:

$$f(\zeta) = -\left(\zeta + \frac{\zeta^2}{4}\right)$$

e quindi otteniamo una terza funzione soddisfacente alla (4) sotto la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{3/2}(\zeta, \Phi) &= \int_0^{\Phi} \Psi_{1/2}(\zeta, \Phi) d\Phi - \left(\zeta + \frac{\zeta^2}{4}\right) = \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\Phi) J_n(n\zeta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_n(n\zeta) - \left(\zeta + \frac{\zeta^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Poiché la prima serie ora scritta soddisfa evidentemente alla (4), anche la restante parte vi deve soddisfare. Ma tale restante parte dipende soltanto da  $\zeta$ , per cui deve essere esprimibile sotto una forma del tipo:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_n(n\zeta) - \left(\zeta + \frac{\zeta^2}{4}\right) = c'_1 \lg \zeta + c'_2$$

con  $c'_1$  e  $c'_2$  costanti. Facendo tendere  $\zeta$  a zero si ottiene che entrambe le costanti  $c'_1$  e  $c'_2$  devono essere nulle, per cui risulta:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_n(n\zeta) = \zeta + \frac{\zeta^2}{4}$$

e:

$$\Psi_{3/2}(\zeta, \Phi) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\Phi) J_n(n\zeta).$$



Anche la funzione  $\Psi_{3/2}$  si può esprimere sotto forma finita, e vale:

$$\Psi_{3/2}(\zeta, \Phi) = \int_0^\omega \zeta \sin \omega (1 - \zeta \cos \omega) d\omega - \left( \zeta + \frac{\zeta^2}{4} \right) = -\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \cos \omega + \frac{\zeta^2}{4} \cos 2\omega.$$

Procedendo successivamente sempre nello stesso modo si possono ottenere quante si vogliono altre funzioni analoghe, soddisfacenti alla (4) ed esprimibili tanto sotto forma di serie quanto sotto forma finita. Ne riportiamo ancora due, e cioè:

$$\Psi_{5/2}(\zeta, \Phi) = \int_0^\Phi \Psi_{3/2}(\zeta, \Phi) d\Phi = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n\Phi) J_n(n\zeta)$$

la cui somma vale:

$$\Psi_{5/2}(\zeta, \Phi) = \left( -\zeta + \frac{3}{8} \zeta^3 \right) \sin \omega + \frac{3}{8} \zeta^2 \sin 2\omega - \frac{\zeta^3}{24} \sin 3\omega.$$

E inoltre:

$$\Psi_{7/2}(\zeta, \Phi) = \int_0^\Phi \Psi_{5/2}(\zeta, \Phi) d\Phi + \zeta + \frac{\zeta^2}{16} - \frac{\zeta^3}{9} - \frac{\zeta^4}{64} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos(n\Phi) J_n(n\zeta)$$

la cui somma vale:

$$\begin{aligned} \Psi_{7/2}(\zeta, \Phi) = & \left( \zeta - \frac{3}{16} \zeta^3 \right) \cos \omega + \left( -\frac{7}{16} \zeta^2 + \frac{1}{12} \zeta^4 \right) \cos 2\omega + \\ & - \frac{11}{144} \zeta^3 \cos 3\omega - \frac{\zeta^4}{192} \cos 4\omega + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{3}{32} \zeta^4. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che, indipendentemente dall'applicazione che se ne farà in seguito (v. nota n. 4), le formule ora scritte costituiscono altrettanti casi di sommabilità di serie di Kapteyn con coefficienti complessi <sup>(6)</sup>. Inoltre, tra i diversi casi particolari che ovviamente se ne possono dedurre in vario modo, segnaliamo ad esempio i seguenti, che si ottengono ponendo  $\Phi = -i \lg \lambda$ , e che costituiscono altrettanti casi di sommabilità di serie di Kapteyn con coefficienti reali:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-n} + \lambda^n) J_n(n\zeta) &= \frac{1}{1 - \zeta \operatorname{ch} s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\lambda^{-n} - \lambda^n) J_n(n\zeta) &= \zeta \operatorname{sh} s \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\lambda^{-n} + \lambda^n) J_n(n\zeta) &= \frac{\zeta^2}{2} + \zeta \operatorname{ch} s - \frac{\zeta^2}{4} \operatorname{ch}(2s) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

validi per  $\lambda$  reale e minore di uno,  $\zeta$  complesso e interno al dominio  $K^{(\lambda)}$ , ed  $s$  legato a  $\lambda$  e  $\zeta$  dalle relazioni seguenti

$$\begin{aligned} \zeta \operatorname{sh} s - s &= \lg \lambda \\ s = 0 &\quad \text{per } \lambda = 1. \end{aligned}$$

(6) Non ci risulta che questi casi siano già stati segnalati da altri Autori.

**Astronomia.** — *Variazioni stagionali apparenti del raggio solare, dedotte dalle osservazioni di Greenwich.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Recentemente ho ridotto le misure dei diametri solari sia orizzontali <sup>(1)</sup> che verticali <sup>(2)</sup>, osservati a Greenwich dal 1851 al 1937; ne ho dato le rispettive medie annuali ed ho cercato di interpretarne le variazioni reali, mostrando come le curve di variabilità potessero approssimarsi ciascuna, con due sole oscillazioni, una di ventidue anni, l'altra di circa sei-otto anni; analogamente a quanto aveva trovato M. Cimino nella sua analisi delle osservazioni dei diametri solari eseguite al Campidoglio (Roma) <sup>(3)</sup>.

Ho voluto ora utilizzare il vasto materiale a mia disposizione, per mettere in luce una eventuale variazione stagionale apparente del semidiametro solare; variazione di cui non è difficile sospettare la presenza, giacché le condizioni meteorologiche delle varie stagioni, ripetentisi — più o meno regolarmente — ogni anno, influiscono sull'irradiazione dell'atmosfera terrestre e quindi sull'immagine focale del globo solare. Espongo in questa breve Nota il metodo che ho seguito ed i risultati a cui sono pervenuta.

2. Come è noto, i volumi delle « Observations » di Greenwich, riportano le misure giornaliere effettuate durante il passaggio del Sole al meridiano ed insieme gli scarti O—C tra i valori osservati e quelli calcolati, secondo le effemeridi del « Nautical Almanac ». In particolare, a Greenwich, i raggi orizzontali del Sole sono stati misurati, osservando il tempo che il disco solare impiega a passare al meridiano, mentre i raggi verticali sono stati ottenuti facendo la differenza della declinazione tra il bordo nord e quello sud del Sole, sempre al meridiano, tenendo conto anche della rifrazione differenziale e della parallasse.

Ho iniziato il mio lavoro, partendo dai valori degli O—C trovati a Greenwich, e tenendo presente il valore del raggio solare preso come base dalle effemeridi, ho ridotto tutte le misure alla distanza media Terra-Sole, esprimendole in secondi di arco. Ho così ottenuto, per ogni giorno di osservazione, un valore per il raggio orizzontale ed uno per il raggio verticale del Sole, al momento del suo passaggio al meridiano di Greenwich. Ho poi eseguito le medie mensili dei risultati per gli anni dal 1851 al 1937.

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Cfr. « Contributi Scientifici dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario », n. 190 e « Mem. Soc. Astr. Italiana », Vol. XXIV, 3.

(2) In corso di stampa presso la Soc. Astr. Italiana.

(3) Cfr. M. CIMINO, *Un'oscillazione ventiduennale nel diametro solare*, in « Contr. Sc. Oss. Monte Mario », n. 122 e « Comm. Pont. Ac. Scient. », 1945; cfr. anche « Rend. Lincei », 1946 I.

3. Compiuto questo gravoso lavoro di riduzione di oltre ventunmila osservazioni, per avere indicazioni più particolareggiate e scoprire eventuali anomalie stagionali, ho eseguito le medie ponderate di dieci in dieci anni, di ciascuna media mensile (assegnando ad ognuna, un peso pari al numero di osservazioni su cui poggia) ed ho riportato in grafico, i valori delle medie mensili così ottenute per ciascun decennio. Ho avuto in tal modo, nove grafici per i valori mensili dei raggi orizzontali del Sole ed altrettanti per quelli verticali.

Ora dall'esame dei nove grafici relativi ai raggi orizzontali (ridotti alla distanza media dalla Terra), ho trovato anzitutto che dal 1851 al 1910 i valori più alti sono raggiunti nella primavera avanzata (aprile, maggio), mentre i più bassi, si hanno tra il dicembre ed il gennaio. Invece dal 1911 al 1937, mentre i minimi valori avvengono negli stessi mesi, i massimi del raggio solare hanno luogo all'inizio dell'estate.

Ho trovato pure che per i raggi verticali, i valori più bassi avvengono sempre tra il dicembre ed il gennaio, mentre i più alti si raggiungono tra il maggio ed il luglio.

Ho eseguito infine le medie generali per ciascun mese – tenendo sempre separati i valori dei raggi orizzontali e verticali – e le ho riportate nella Tabella, dove ciascun valore è seguito dal numero di osservazioni su cui poggia.

TABELLA.

*Medie mensili dei semidiametri solari, misurati a Greenwich dal 1851 al 1937.*

	Semidiametri orizzontali			Semidiametri verticali	
	R <sub>☉</sub>	N		R <sub>☉</sub>	N
Gennaio . . . . .	960,80	709	Gennaio . . . . .	960,86	754
Febbraio . . . . .	960,94	716	Febbraio . . . . .	961,06	763
Marzo . . . . .	961,04	818	Marzo . . . . .	961,20	913
Aprile . . . . .	961,16	840	Aprile . . . . .	961,27	898
Maggio . . . . .	961,20	952	Maggio . . . . .	961,36	1059
Giugno . . . . .	961,26	974	Giugno . . . . .	961,32	1042
Luglio . . . . .	961,10	1046	Luglio . . . . .	961,35	1104
Agosto . . . . .	961,09	1031	Agosto . . . . .	961,28	1105
Settembre . . . . .	960,99	924	Settembre . . . . .	961,25	1016
Ottobre . . . . .	960,95	810	Ottobre . . . . .	961,11	895
Novembre . . . . .	960,89	727	Novembre . . . . .	960,98	767
Dicembre . . . . .	960,83	608	Dicembre . . . . .	960,91	662

Si hanno in totale 10155 misure per i raggi orizzontali ed 10978 per quelli verticali, essendo però ovviamente le osservazioni dei mesi estivi più numerose delle invernali. Come appare dalla Tabella, per i raggi orizzontali del Sole (ridotti alla distanza media dalla Terra), si ha una escursione annua di  $0''46$  e per i raggi verticali di  $0''50$ .

Per brevità, non riporto i disegni dei diciotto grafici, né le medie decennali. Nella figura 1 sono messi in grafico i valori della tabella; la curva a tratto pieno rappresenta la variazione stagionale apparente dei raggi verticali e quella tratteggiata, l'analoga variazione dei raggi orizzontali.

Come si vede, gli andamenti stagionali dei semidiametri orizzontale e verticale del Sole sono molto somiglianti; essi concordano nel mostrare come il globo solare a Greenwich, appaia più grande all'inizio dell'estate e minore all'inizio dell'inverno.



Fig. 1.

4. Per confrontare ora i risultati di Greenwich, con quelli di Roma, ricordiamo che il nostro compianto astronomo prof. Gialanella, nel ridurre e discutere le misure, del raggio orizzontale del Sole ottenute al Campidoglio (Roma) dal 1874 al 1937 <sup>(4)</sup> al passaggio al meridiano, mostrò come a Roma il semidiametro solare sembri maggiore a marzo, indi decresca fino a giugno, tocchi poi un massimo secondario in agosto e settembre, e quindi diminuisca fino ad un minimo a novembre. Si ha così una variazione apparente alquanto diversa da quella ottenuta a Greenwich, specialmente perché i tempi dei massimi e dei minimi sono notevolmente anticipati; il quale fenomeno manifestamente deve attribuirsi alle diverse condizioni meteorologiche dei due luoghi di osservazione.

(4) L. GIALANELLA, *Le variazioni del diametro solare nel sessantennio 1874-1937, secondo le osservazioni eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio*, «Contributi scientifici dell'Osservat. Astronom. di Monte Mario», n. 109, e «Comm. Pont. Ac. Scientiarum», vol. VI.



5. Come ho detto al principio, queste variazioni stagionali apparenti del raggio solare sono dovute alla variazione dell'irradiazione dell'atmosfera terrestre; irradiazione che, a sua volta, è legata all'altezza del Sole sull'orizzonte, al momento del passaggio al meridiano ed alle condizioni atmosferiche, tra cui principalmente l'umidità relativa. Ricordando allora che la umidità relativa è minore nella stagione estiva e maggiore nell'invernale, si possono forse mettere in correlazione, per Greenwich, umidità relativa e variazione del raggio solare, concludendo cioè che l'atmosfera più satura di vapor d'acqua all'inizio dell'inverno faccia apparire più piccolo il globo solare, avvenendo invece il contrario all'inizio dell'estate. Ma su questo argomento sarebbero necessari dei confronti più precisi ed ulteriori studi.

**Astronomia.** — *Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 15-16 luglio 1954 e luminescenza del suolo lunare.* Nota di TERESA FORTINI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Continuando le nostre ricerche<sup>(1)</sup> intorno al problema della luminescenza del suolo lunare, abbiamo osservato presso l'Osservatorio di Monte Mario l'eclisse parziale di luna verificatasi nella notte tra il 15 e 16 luglio 1954.

Ricordiamo brevemente che in base a una moderna teoria del Link<sup>(2)</sup> le variazioni di luminosità che si riscontrano da eclisse a eclisse nella fase di penombra, specialmente in prossimità dell'orlo dell'ombra, sarebbero dovute, in massima parte, a fluttuazioni delle radiazioni emesse dalla parte più alta della cromosfera solare, le quali essendo a breve lunghezza d'onda ecciterebbero più o meno il suolo lunare supposto dotato di una certa luminescenza.

Esponendo i risultati delle osservazioni da noi effettuate in occasione delle eclissi totali del gennaio 1953 e gennaio 1954, rilevammo già allora l'importanza dello studio fotometrico della luce lunare durante la penombra, perché a tale momento, tendendo a prevalere le radiazioni emesse dal bordo solare rispetto a quelle del disco solare, sarebbero misurabili queste fluttuazioni della luce ultravioletta solare, le quali d'altra parte sfuggono a ogni altra misura diretta. È stato così fissato presso l'Osservatorio di Monte Mario un programma di osservazioni da effettuarsi all'Astrografo Petzvall ( $O = \text{mm } 165$ ;  $F = 800 \text{ mm.}$ ) durante le eclissi di luna. In tale programma, si è deciso di adoperare sempre uno stesso tipo di lastre con stesso filtro (mantenendo una

(\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Cfr. M. CIMINO e T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XIV e T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di luna del 18-19 gennaio 1954 in relazione alla luminescenza del suolo lunare*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XVII (1954).

(2) Cfr. F. LINK, *Théorie photométrique de la penombre pendant les éclipses de lune*, « Journ. Soc. Math. Phys. Tchèque », 72, p. 65 (1947).

zona di trasmissione intorno a  $\lambda = 6.300$ ), come pure gli stessi tempi di posa, di diaframmatrice ecc. per le successive fasi del fenomeno.

Seguendo con questo criterio uniforme parecchie eclissi, ci sarà possibile raccogliere più serie di osservazioni, le quali essendo tutte omogenee, potranno essere facilmente messe a confronto tra loro, per servire per una discussione approfondita del problema in relazione all'attività solare alle date delle diverse eclissi.

2. Ho adottato questo programma di osservazioni anche in occasione dell'eclisse parziale di luna del 15-16 luglio 1954. Le fotografie ottenute complessivamente sono in numero di 27, di cui 15 riprese nella fase di diminuzione e 12 nella fase di uscita. Disgraziatamente, la luce dell'alba sopraggiunta alle prime ore del giorno - essendosi l'eclisse verificata in un periodo estivo - ha alterato completamente il contrasto tra i vari punti lunari per le ultime lastre riprese durante l'uscita della luna dalla penombra. Per tale ragione, nella presente Nota, viene discussa soltanto la parte riguardante la fase di ingresso. In generale le condizioni meteorologiche della nottata possono ritenersi buone: soltanto fin verso la mezzanotte il cielo, specie intorno all'orizzonte, appariva coperto da leggerissimi strati di nebbia i quali non velavano però la superficie lunare.

Nella ripresa delle fotografie sono stata aiutata dal calcolatore ing. R. Flamini.

Le lastre, tutte calibrate con tempi identici ai tempi di posa, sono state sviluppate con il rivelatore Kodak D. 76. Le loro caratteristiche<sup>(3)</sup> sono riportate nella Tabella I.

TABELLA I.  
*Caratteristiche delle lastre misurate.*

N.	Ora T.M.E.C.	Esposizione	Diaframma	N.	Ora T.M.E.C.	Esposizione	Diaframma
1	22 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> ,8	3 sec.	I	8	23 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> ,8	3 sec	2
2	38 ,3	»	I	9	57 ,1	»	1
3	44 ,3	»	I	10	0 5 ,6	»	1
4	57 ,7	»	I	11	20 ,9	»	2
5	23 5 ,1	»	I	12	36 ,1	»	2
6	20 ,5	»	I	13	50 ,9	»	2
7	35 ,9	»	I	14	1 6 ,0	»	2
				15	20 ,6	»	2

(3) Come fu detto nella citata Nota sopra l'eclisse del 29 gennaio 1953, l'aumento di un'unità nel diaframma equivale ad una diminuzione di due grandezze stellari.

3. Allo scopo di rendere tra loro più confrontabili i risultati dedotti dalle due eclissi del 1953 e 1954, le lastre erano state misurate tutte e due le volte con uno stesso criterio; e cioè a mezzo del microfotometro Fabry e Buisson, si erano misurate le differenze di densità di vari punti lunari (gli stessi per le due eclissi) rispetto a un punto scelto nella zona del Mare Crisium, che tutte e due le volte era uno degli ultimi a entrare in penombra. Le misure erano state poi ridotte con uno stesso metodo, che è esposto dettagliatamente nelle due Note già ricordate: esso ha il pregio di poter indicare, entro i limiti degli errori

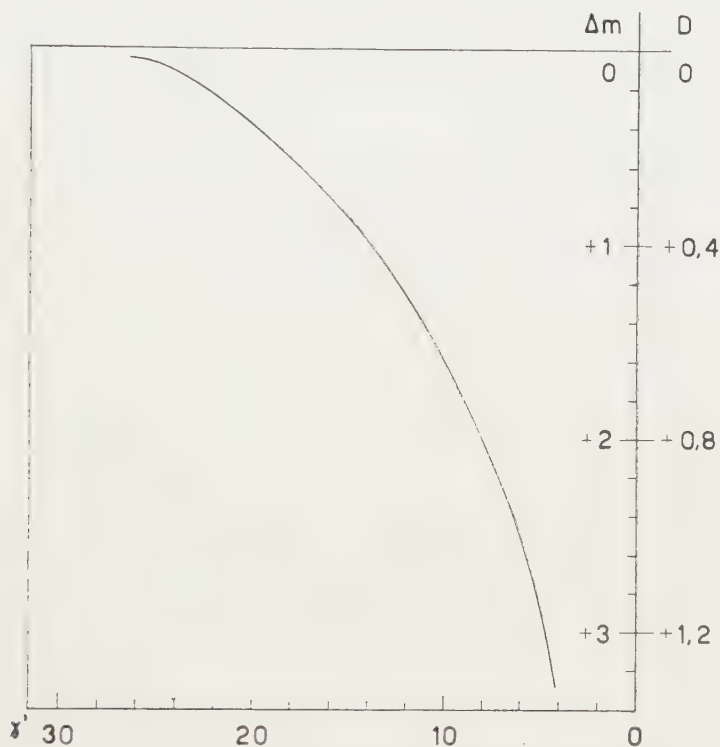


Fig. 1. - Curva di densità della penombra per  $\lambda = 6.300$  in funzione della distanza  $\gamma'$  (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

di misura e di osservazione, quali sono i punti misurati che presentano un comportamento anomalo rispetto alla curva disegnata, dato che il potere luminescente del suolo lunare può variare enormemente da zona a zona.

In occasione dell'eclisse parziale del luglio 1954, ho adottato invece un metodo diverso, servendomi questa volta del microfotometro registratore Kipp recentemente acquistato dall'Osservatorio di Monte Mario. Con tale metodo si ha un notevole risparmio di tempo nella misura e nella riduzione delle lastre; ma è possibile ottenere in base a esso soltanto la curva di insieme, senza poter individuare, specie con lastre ottenute a scala così ridotta (diametro della luna = mm 7,5) come quelle da me misurate, punti per cui sia particolarmente notevole un eccesso di luminosità.

Mi è sembrato però opportuno impiegare questo secondo metodo, in occasione dell'eclisse in discussione, poiché alla data del 15-16 luglio 1954, per effetto della librazione lunare, molti dei punti misurati nelle due precedenti eclissi - e tra questi lo stesso Mare Crisium - apparivano visti di scorcio o molto rimpiccioliti, per cui non sarebbe stato ragionevole confrontare il loro singolo comportamento con quello riscontrato in altre eclissi.

Per la riduzione ho tracciato, con rapporto 1 : 4, su tutte le lastre il profilo di uno stesso diametro lunare - quello perpendicolare al moto relativo della luna rispetto al centro del cerchio d'ombra.

A mano a mano che una parte di tale diametro cadeva in penombra, potevo correggere il suo profilo mediante il corrispondente, ottenuto dalla media

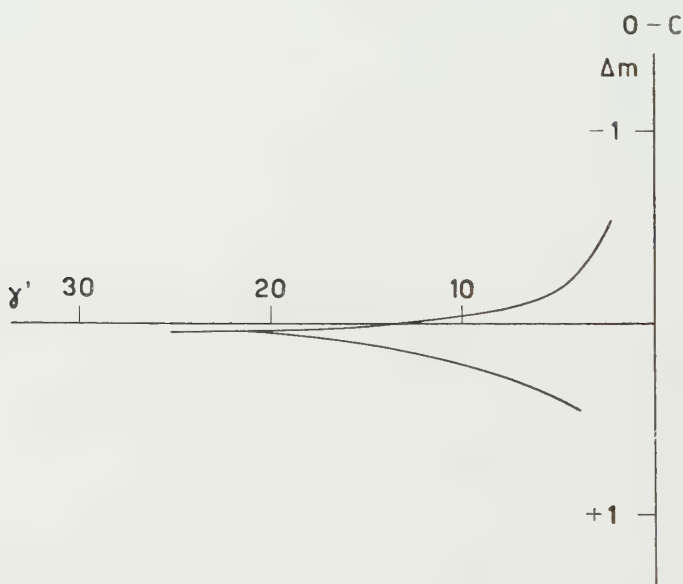


Fig. 2. - Confronto delle densità osservate per la penombra con la teoria del Link ( $\gamma'$  = distanze dell'orlo dell'ombra).

dei tracciati ricavati dalle lastre riprese fuori eclisse. Ricollegando poi successivamente tra loro i tracciati dei vari tratti in penombra, ho disegnato la curva di penombra fino a circa  $3'$  dal bordo dell'ombra.

La fig. 1 mostra l'andamento di questa curva. Confrontandola con quella teorica, calcolata dal Link, ho ottenuto la curva degli O—C disegnata nella parte inferiore della fig. 2; mentre nella parte superiore della stessa figura è riportata la curva media degli O—C dedotta dal Link in base ad una discussione di dieci eclissi lunari. Dal confronto delle due curve, si vede che nell'eclisse lunare del 15-16 luglio 1954 manca l'eccesso di luminosità, osservato generalmente per la penombra e da noi riscontrato per le eclissi del gennaio 1953 e gennaio 1954.

Anche visualmente, durante la notte in cui si è verificato il fenomeno avevamo classificato questa eclisse come particolarmente scura. Poiché per la



discussione abbiamo fatto uso della teoria del Link ridotta, in cui si fa astrazione dall'influenza dell'atmosfera terrestre, influenza dovuta in massima parte allo strato di ozono che ha un forte potere assorbente, si può concludere che l'eclisse del luglio va considerata come una eclisse normale.

La densità della penombra, espressa in differenze  $\Delta m$  di grandezze stellari, in funzione della distanza  $\gamma'$  (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra è riportata nella Tabella II.

TABELLA II.

*Densità della penombra ( $p$ ) ( $\lambda = 5.900-6.700$ ) in funzione della distanza dall'orlo dell'ombra.*

$\gamma'$	$\Delta m$	$\gamma'$	$\Delta m$	$\gamma'$	$\Delta m$	$\gamma'$	$\Delta m$	$\gamma'$	$\Delta m$
4	3,33	9	1,81	14	0,97	19	0,47	24	0,12
5	2,87	10	1,63	15	0,85	20	0,40	25	0,07
6	2,53	11	1,45	16	0,75	21	0,32	26	0,04
7	2,25	12	1,27	17	0,65	22	0,25		
8	2,00	13	1,11	18	0,56	23	0,19		

**Fisica teorica.** — *Sulle equazioni relativistiche del moto di una particella soggetta a forze derivanti da potenziale scalare* (\*). Nota di GIOVANNI MARIA PROSPERI, presentata (\*\*) dal Corrisp. P. CALDIROLA.

1. Ci proponiamo di generalizzare in maniera relativistica le equazioni newtoniane

$$(1,1) \quad m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

per il moto di una particella di massa  $m_0$  in un campo di forze con potenziale scalare  $\varphi$ .

Il procedimento più ovvio parrebbe quello di sostituire le tre equazioni (1,1) con le quattro equazioni invarianti <sup>(1)</sup>

$$(1,2) \quad m_0 \ddot{x}^\mu = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 1 \dots 4).$$

(\*) Lavoro eseguito presso la Sezione di Milano dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Con  $f$  indicheremo sempre la derivata di  $f$  rispetto al tempo proprio  $\tau$ , porremo  $x^\mu \equiv (x, y, z, ct)$  ed useremo la notazione covariante e controvariante con la metrica  $(1, 1, 1, -1)$ .

Se però moltiplichiamo queste equazioni per  $\dot{x}_\mu$ , e le sommiamo su  $\mu$ , troviamo, tenendo conto della relazione geometrica

$$(1,3) \quad \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu = -c^2,$$

che esse sono compatibili solo se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_\mu} \cdot \dot{x}_\mu = 0,$$

cioè (poiché  $\varphi$  è indipendente dalle  $\dot{x}_\mu$ ) solo nel caso banale in cui la  $\varphi$  sia una costante (particella libera).

Perciò, per raggiungere il risultato che ci siamo proposti, invece di tentare di modificare direttamente le equazioni (1,1), generalizzeremo in maniera formale l'integrale d'azione da cui esse possono essere dedotte col principio di Hamilton e ne ricaveremo le condizioni di stazionarietà sotto la condizione (1,2). Operando in tal modo otterremo equazioni certamente compatibili qualunque sia  $\varphi$ .

Assunto l'integrale d'azione invariante

$$(1,4) \quad I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(x^\nu(\tau), \dot{x}^\nu(\tau)) \cdot d\tau$$

ove

$$(1,5) \quad \mathcal{L}(x^\nu, \dot{x}^\nu) = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^\nu \dot{x}_\nu - \varphi(x^\nu),$$

ricaveremo esplicitamente le equazioni del moto e le discuteremo.

2. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dell'analisi funzionale, la condizione di stazionarietà dell'integrale  $I$  con la condizione (1,3) può scriversi

$$(2,1) \quad \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{ \mathcal{L}(x^\nu, \dot{x}^\nu) + \lambda(\tau) \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu \} d\tau = 0,$$

dove  $\lambda(\tau)$  è una certa funzione di  $\tau$  che va determinata mediante la (1,3) a risultato ottenuto e dove le  $x^\nu(\tau)$  si intendono variate formalmente come se fossero del tutto indipendenti.

Le equazioni differenziali di Eulero relative alla (2,1) sono

$$(2,2) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\mu} (\mathcal{L} + \lambda \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = 0,$$

ossia per la (1,5)

$$(2,3) \quad \frac{d}{d\tau} [(m_0 + 2\lambda) \dot{x}^\mu] = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Moltiplicando queste equazioni per  $\dot{x}_\mu$  e sommandole su  $\mu$ , otteniamo per la (1,3)

$$(2,4) \quad 2c^2 \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau},$$

quindi

$$(2,5) \quad \lambda(\tau) = \frac{1}{2c^2} \varphi[x^\nu(\tau)] + k$$

dove  $k$  è una costante che prenderemo uguale a zero perché essa avrebbe semplicemente l'effetto di alterare la massa a riposo della particella. Sostituendo il valore di  $\lambda$  così ottenuto nelle (2,3) abbiamo le equazioni del moto cercate

$$(2,6) \quad \frac{d}{d\tau} \left[ \left( m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi \right) \dot{x}^\mu \right] = - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}.$$

Queste equazioni non sono, come risulta dal modo stesso in cui sono state dedotte, tutte indipendenti, ma si può considerare ad esempio la quarta conseguenza delle prime tre. Le prime tre bastano da sole a descrivere il moto della particella; al limite non relativistico esse coincidono con le (1,1) come volevasi. La quarta equazione può essere invece interpretata come teorema dell'energia. Essa può scriversi:

$$(2,7) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2 + \varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Le quantità

$$E = \frac{m_0 c^2 + \varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} = c \left( m_0 + \frac{1}{c} \varphi \right) \dot{x}^4, \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sqrt{1-\beta^2}$$

rappresentano rispettivamente l'energia della particella e la potenza dissipata. Al limite non relativistico esse vengono a coincidere con le corrispondenti grandezze classiche e quindi l'equazione (2,7) viene a coincidere col teorema classico dell'energia <sup>(2)</sup>.

Per stabilire una connessione tra le equazioni (2,6) e le equazioni della idrodinamica relativistica, osserviamo dapprima che le equazioni dell'idrodinamica classica possono essere dedotte dalle (1,1), applicandole ad un elemento di volume  $dv$  del liquido in istudio e notando che se il liquido è perfetto le forze che agiscono su  $dv$  si possono derivare dal potenziale

$$(2,8) \quad \varphi = p dv$$

( $p$  è la pressione in  $dv$ ). Assumiamo poi la (2,8) come definizione di liquido perfetto in senso relativistico intendendo ora  $dv$  come elemento di volume proprio ed applichiamo le (2,6) al moto di questo. Indicata allora con  $\rho_0$  la densità a riposo del liquido nel punto considerato, abbiamo le equazioni

$$(2,9) \quad \left( \rho_0 + \frac{1}{c^2} p \right) \ddot{x}^\mu + \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau} \dot{x}^\mu = - \frac{\partial p}{\partial x^\mu}$$

(2) Osserviamo a questo punto che, mentre il potenziale classico è determinato a meno di una costante additiva, nel caso relativistico  $\varphi$  è determinato in maniera completa; l'aggiunta ad esso di una costante equivarrebbe ad alterare la massa della particella.

queste coincidono con le equazioni dell'idrodinamica relativistica date da Pauli <sup>(3)</sup> partendo da un opportuno tensore energetico. Le analoghe equazioni date da Einstein <sup>(4)</sup> corrisponderebbero invece ad equazioni per il punto materiale della forma

$$(2,10) \quad m_0 \ddot{x}^\mu + \frac{1}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau} \dot{x}^\mu = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Queste equazioni sono tra loro compatibili ed al limite classico forniscono ancora le (1,1), ma non sembra si possano in alcun modo dedurre da un integrale d'azione del tipo (1,4).

3. Per dare una forma hamiltoniana alle equazioni (2,6) scriviamo la lagrangiana nella nuova forma

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^\nu \dot{x}_\nu + \frac{a}{c^2} \varphi \dot{x}^\nu \dot{x}_\nu - (1 - a) \varphi$$

dove  $a$  è una costante arbitraria.  $\mathcal{L}_a$  in virtù della (1,3) è equivalente alla  $\mathcal{L}$  e porta alle stesse equazioni del moto ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ ).

La  $\lambda(\tau)$  con cui queste possono essere costruite non coincide però in generale con la (2,5). L'equazione (2,4) va infatti sostituita con l'altra

$$2 c^2 \frac{d\lambda}{d\tau} = (1 - 2a) \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

In particolare se prendiamo  $a = 1/2$  la  $\lambda$  si riduce ad una costante che, per quanto detto a proposito della (2,5), va presa uguale a zero. Posto allora  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{1/2}$  le equazioni del moto, per le (2,2), si possono scrivere

$$(3,1) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x_\mu} = 0$$

formalmente analoghe alle equazioni di Lagrange della meccanica non relativistica. Se quindi facciamo la posizione

$$(3,2) \quad p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{x}_\mu} = \left( m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi \right) \dot{x}^\mu$$

e introduciamo l'hamiltoniana

$$(3,3) \quad \mathcal{H}(p^\nu, x^\nu) = p_\nu \dot{x}^\nu - \mathcal{L}^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi} p_\nu p^\nu + \varphi \right\}$$

esse risultano equivalenti alle equazioni di Hamilton

$$(3,4) \quad \dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \quad \dot{p}^\mu = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu}.$$

(3) W. PAULI, *Relativitätstheorie* in « Enzycl. d. mat. Wissensch. », vol. 2 (Leipzig 1922).

(4) A. EINSTEIN, *Il significato della Relatività* (trad. ital.) p. 61 (Torino 1953).

Sono queste equazioni di Hamilton in quattro dimensioni in cui il tempo viene trattato simmetricamente alle altre coordinate. La hamiltoniana  $\mathcal{H}$  ha un valore numerico costante che può essere calcolato da (3,2) e (1,3) avendosi precisamente

$$(3,5) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ \left( m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi \right) \dot{x}^\nu \dot{x}_\nu + \varphi \right\} = - \frac{1}{2} m_0 c^2$$

proprio come accade per la hamiltoniana relativistica di una particella in un campo elettromagnetico. Come in questo caso si può anzi dimostrare (la dimostrazione non va in nulla modificata e perciò non la riproduciamo) <sup>(5)</sup> che le (3,4) sono equivalenti ad un sistema di equazioni di Hamilton in tre dimensioni nelle quali il tempo ha carattere privilegiato, come nel caso classico, e l'hamiltoniana  $H = p^4 c$  rappresenta l'energia della particella

$$(3,6) \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

con

$$(3,7) \quad H(x_k; p_k) = c \sqrt{\Sigma_k p_k^2 + \left( m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi \right)^2 c^2}.$$

Partendo dalle (3,3) e (3,5) o anche dalla (3,7) otteniamo infine l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$(3,8) \quad \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \frac{\partial S}{\partial x_\nu} + \left( m_0 + \frac{1}{c^2} \varphi \right)^2 c^2 = 0.$$

Questa equazione si presta bene ad un confronto del comportamento di una particella sotto l'azione di un potenziale scalare con quello di una particella carica in un campo puramente elettrostatico.

Ponendo nella (3,8)  $S = -m_0 c^2 t + S'$  e passando a notazioni tridimensionali abbiamo

$$(3,8') \quad \frac{1}{2m_0} (\text{grad } S')^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} + \varphi + \frac{1}{2m_0 c^2} \varphi^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 = 0;$$

l'analoga equazione per una particella carica in un campo elettrostatico è

$$(3,9') \quad \frac{1}{2m_0} (\text{grad } S')^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} + eV - \frac{1}{2m_0 c^2} (eV)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{m_0 c^2} \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

Come si vede le due equazioni coincidono come è naturale nel caso classico; esse hanno però correzioni relativistiche differenti, precisamente i termini del secondo ordine nel potenziale differiscono di segno e nella (3,9') compare il termine  $\frac{1}{m_0 c^2} \frac{\partial S'}{\partial t}$  che non interviene nella (3,8') <sup>(6)</sup>.

(5) Vedi ad esempio: R. BECKER, *Théorie des électrons* (trad. francese) p. 379 (Parigi 1938).

(6) Per il confronto fra il comportamento di una particella sottoposta all'azione di un campo scalare statico e quello della stessa sotto l'azione di un campo elettrostatico nella meccanica ondulatoria si veda: P. CALDIROLA, «Nuovo Cimento», V, 29 (1948); A. BERNASCONI e P. CALDIROLA, «Nuovo Cimento», VIII, 229 (1951).



4. Mostriamo infine che la (3,8) può considerarsi come caso limite per  $\hbar \rightarrow 0$  delle equazioni della meccanica ondulatoria relativistica, rispettivamente di Dirac (per le particelle a spin 1/2)

$$(4,1) \quad \left\{ \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c^2 + \varphi}{\hbar c} \right\} \Psi = 0$$

e di Klein-Gordon (per le particelle a spin 0):

$$(4,1') \quad \left\{ -\square + \left( \frac{m_0 c^2 + \varphi}{\hbar c} \right)^2 \right\} \Psi = 0.$$

Per questo scopo, seguendo un metodo dovuto a Pauli<sup>(7)</sup>, poniamo

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar} S} \left( a_0 + a_1 \frac{\hbar}{i} + \dots \right)$$

e sostituiamo.

Se ci riferiamo ad esempio all'equazione di Dirac abbiamo

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + m_0 c + \frac{1}{c} \varphi \right) a_0 + \frac{\hbar}{i} \left\{ \gamma^\mu \frac{\partial a_0}{\partial x^\mu} + \left( i\gamma^\mu \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + m_0 c + \frac{1}{c} \varphi \right) \right\} a_1 + \dots = 0$$

e per  $\hbar \rightarrow 0$ :

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + m_0 c + \frac{1}{c} \varphi \right) a_0 = 0.$$

Moltiplicando questa equazione a sinistra per  $\left( -i\gamma^\mu \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + m_0 c + \frac{1}{c} \varphi \right)$ , otteniamo ancora

$$\left| \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \left( m_0 c + \frac{1}{c} \varphi \right)^2 \right| a_{0,\mu} = 0 \quad (\varphi = 1, \dots, 4)$$

ed infine, poiché gli  $\alpha_{0\varphi}$  sono coefficienti numerici non tutti nulli, la (3,8).

5. Dalla discussione svolta nei paragrafi precedenti risulta che le equazioni (2,5) sono completamente soddisfacenti: esse sono state introdotte mediante un principio variazionale perfettamente analogo a quelli da cui si possono dedurre le equazioni relativistiche per la particella libera e per la particella carica in campo elettromagnetico, si possono mettere sotto forma hamiltoniana, e sono caso limite di equazioni quantistiche del tipo di Dirac e Klein-Gordon.

Altre equazioni di moto relativistiche con un potenziale scalare che potrebbero essere proposte sono le (2,10). Queste equazioni però a differenza delle (2,6) non si vede come potrebbero inquadrarsi in uno schema unitario con le altre equazioni relativistiche e neppure sarebbero di per se stesse soddisfacenti perché non sembra possano mettersi sotto forma hamiltoniana.

(7) Cfr. W. PAULI, *Handbuch d. Physik*, vol. XXXIV, p. 240 (1933).

**Fisica teorica.** — *Su una generalizzazione della dinamica relativistica della particella*<sup>(\*)</sup>. Nota di FIORENZO DUIMIO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. P. CALDIROLA.

Le equazioni relativistiche del moto di una particella sono deducibili dal principio variazionale

$$(1) \quad \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = 0$$

con

$$(2) \quad L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + U(x_\mu, \dot{x}_\mu) \quad \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

valendo la condizione

$$(3) \quad \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -c^2,$$

esprimente il fatto che il parametro  $\tau$ , tempo proprio, è legato alle variabili  $x^\mu$  dalla relazione:  $dx_\mu dx^\mu = -c^2 d\tau^2$ <sup>(1)</sup>.

Supponiamo ora di lasciare cadere questa condizione: assumiamo cioè  $\tau$  come parametro indipendente; poniamo anche

$$(4) \quad L = \frac{1}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + U.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange derivanti dal principio (1) saranno

$$(5) \quad \ddot{x}_\mu = \frac{\partial U}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}.$$

Se il potenziale  $U$  è tale che

$$(6) \quad \left( \frac{\partial U}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \dot{x}_\mu = 0,$$

seguirà

$$\ddot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0$$

da cui

$$(7) \quad \frac{1}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = k.$$

Ora, se vale la (6), una scelta opportuna del parametro (che chiameremo  $\tau_1$ ) è sufficiente per fare coincidere la (4) e la (7) con la (2) e la (3). Basterà porre

$$(8) \quad \tau_1 = \tau / m_0.$$

(\*) Lavoro eseguito presso la Sezione di Milano dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Adottiamo per lo spazio-tempo una metrica euclidea con  $x_4 = ict$ .

Vediamo così come la lagrangiana (4), con potenziale soddisfacente la (6), possa descrivere una particella, di massa qualunque <sup>(2)</sup>, (corrispondentemente ad ogni valore che si attribuisce alla costante  $k$  in (7)).

Possiamo ora considerare il caso generale, in cui  $U$  è una funzione generica di  $x_\mu$  ed  $\dot{x}_\mu$  non necessariamente soddisfacente la (6).

Il moto di una particella sarà dato da una traiettoria nello spazio a 5 dimensioni delle variabili indipendenti  $x_\mu$  e  $\tau_I$ , esprimibile parametricamente con le

$$(9) \quad \begin{cases} x_\mu = x_\mu(\lambda) \\ \tau_I = \tau_I(\lambda) \end{cases}$$

dove  $\lambda$  è un parametro *a priori* arbitrario.

Il principio variazionale (1) si potrà scrivere <sup>(3)</sup>

$$(10) \quad \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}(x_\mu, \tau_I; x'_\mu, \tau'_I) d\lambda = 0,$$

con

$$\mathcal{L} = \tau'_I L\left(x_\mu, \frac{x'_\mu}{\tau'_I}\right) \quad x'_\mu = \frac{dx_\mu}{d\lambda} \quad \tau'_I = \frac{d\tau_I}{d\lambda},$$

e nel caso in cui  $L$  sia dato dalla (4)

$$(11) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{x'_\mu x'_\mu}{\tau'^2_I} + \tau'_I U\left(x_\mu, \frac{x'_\mu}{\tau'_I}\right).$$

Potremo ora definire i momenti coniugati alle nostre cinque variabili:

$$(12) \quad \begin{cases} p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} = \frac{x'_\mu}{\tau'_I} + \frac{\partial U}{\partial (x'_\mu/\tau'_I)} \\ p_{\tau_I} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau'_I} = -\frac{1}{2} \frac{x'_\mu x'^\mu}{\tau'^3_I} + U - \frac{x'_\mu}{\tau'_I} \frac{\partial U}{\partial (x'_\mu/\tau'_I)}. \end{cases}$$

Ogni  $p$  è una funzione omogenea di grado 0 della « velocità »  $x'_\mu/\tau'_I$ .

I cinque  $p$  quindi non possono essere funzioni indipendenti dei quattro rapporti delle velocità  $x'_\mu/\tau'_I$ : esisterà pertanto una equazione hamiltoniana <sup>(4)</sup>

$$H(p_\mu, p_{\tau_I}, x_\mu, \tau_I) = 0$$

che nel nostro caso è data da

$$(13) \quad -\frac{1}{2} \{p_\mu - \partial U / \partial (x'_\mu/\tau'_I)\}^2 - \left\{ p_{\tau_I} + \frac{x'_\mu}{\tau'_I} \frac{\partial U}{\partial (x'_\mu/\tau'_I)} - U \right\} = 0.$$

(2) Per considerazioni simili vedi per esempio: E. C. G. STÜCKELBERG, « Helv. Phys. Acta », 14, 322 (1941); E. C. G. STÜCKELBERG, « Helv. Phys. Acta », 14, 548 (1941); A. SCHILD, « Phys. Rev. », 92, 1009 (1953).

(3) Vedi ad esempio: C. LANCZOS, *The variational principles of mechanics*.

(4) P. A. M. DIRAC, « Proc. Cambr. Phil. Soc. », 29, 389 (1933).

Ciò è dovuto, non dalla presenza di una relazione assegnata tra il parametro  $\lambda$  e le variabili indipendenti (infatti  $\lambda$  fin qui è del tutto indipendente), ma dalla forma stessa della lagrangiana in cui  $\tau_i$ , è variabile « ignorabile »<sup>(5)</sup> (se si suppone che  $U$  non dipenda esplicitamente da  $\tau_i$ ): i gradi di libertà essenziali sono qui ancora 4, è a disposizione però una costante di integrazione che noi associamo alla massa della particella descritta.

Le equazioni del moto in forma hamiltoniana sono, come si può facilmente vedere <sup>(4)</sup>

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} x'_\mu &= \rho \frac{\partial H}{\partial p^\mu} \\ \tau'_i &= \rho \frac{\partial H}{\partial p_{\tau_i}} = \rho \\ p'_\mu &= -\rho \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \\ p'_{\tau_i} &= -\rho \frac{\partial H}{\partial \tau_i} = 0 \end{aligned} \right.$$

$\rho$  = costante arbitraria.

Supponiamo ora che la forma di  $U$  sia la seguente:

$$(15) \quad U = A_\mu(x_\mu) \frac{x'_\mu}{\tau'_i} + B(x_\mu).$$

Avremo per i momenti coniugati

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} p_\mu &= x'_\mu / \tau'_i + A_\mu \\ p_{\tau_i} &= -\frac{1}{2} \frac{x'_\mu x'_\mu}{\tau'^2_i} + B \end{aligned} \right.$$

da cui l'equazione hamiltoniana

$$(13') \quad -\frac{1}{2} \{ p_\mu - A_\mu \}^2 - (p_{\tau_i} - B) = 0$$

e le equazioni del moto

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} x'_\mu &= \rho \{ p_\mu - A_\mu \} \\ \tau'_i &= \rho \\ p'_\mu &= \rho \left\{ (p_\mu - A_\mu) \cdot \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial B}{\partial x_\mu} \right\} \\ p'_{\tau_i} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Poniamo ora  $\lambda = \tau$  tempo proprio. La lagrangiana (11), (15) diventerà

$$L = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\rho} + A_\mu \dot{x}^\mu + \rho B$$

(5) C. LANCZOS, loc. cit. in (3).

lagrangiana questa descrivente una particella di massa  $m_0 = 1/\rho$  soggetta ad un campo e. m.  $c/e A_\mu$  e ad un campo di forze scalari <sup>(6)</sup>  $B/m_0$ .

La (14' d') dice che la quantità  $p_{\tau_1} = -\frac{1}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu m_0^2 + B$  è una costante del moto. Nel caso  $B = 0$  si ricade nel caso (6).

Vediamo così come la (11) può descrivere il moto di una particella di massa arbitraria soggetta all'azione di un campo e. m. e di un campo scalare inversamente proporzionale alla massa. Oppure, ed è equivalente, siccome l'azione del campo scalare si manifesta come modificazione della massa della particella essa può descrivere il moto di una particella di massa variabile  $m_0 = 1/\rho - (\rho/c^2) B(x_\mu)$  in un campo e. m. assegnato.

Vogliamo concludere osservando come l'introduzione di una quinta dimensione possa portare ad estensioni molto vaste della meccanica ordinaria e varie teorie sono state sviluppate in tal senso <sup>(7)</sup>.

Ma con le restrizioni usate in questa Nota essa rappresenta solo una riformulazione della meccanica dal punto equivalente e quella tradizionale. Il suo vantaggio principale consiste nell'introduzione del concetto di massa come variabile in uno schema completamente geometrizzato di meccanica. Esso inoltre potrebbe forse avere qualche utilità in una riformulazione della teoria quantistica relativistica delle particelle elementari.

**Chimica fisica.** — *Studio di N-ossidi di benzofenazine cloro-sostituite* <sup>(\*)</sup>. Nota II di RENATO CURTI, STELIO LOCCHI e UMBERTO LANDINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. SEMERANO.

Il comportamento polarografico del gruppo NO in derivati eterociclici contenenti azoto è stato studiato ampiamente oltre che dagli Autori <sup>(1)</sup> anche da A. Foffani e E. Fornasari <sup>(2)</sup> e si può ritenere ormai accertato nelle sue linee fondamentali. Un motivo di particolare interesse si è rivelato nella riduzione polarografica degli N-ossidi della benzofenazina (loc. cit. <sup>(1)</sup>) che ci ripromettevamo di approfondire. Ricerche successive condotte su composti clorosostituiti ci permettono ora di presentare un complesso di risultati più omogeneo.

Le due molecole 12 N-monossibenzofenazina e 7 N-monossibenzofenazina presentano un andamento che si può riassumere nei seguenti termini:

(6) Per lo studio del moto di una particella sotto l'azione di un campo scalare vedasi: G. M. PROSPERI, « Rend. Acc. Linc. »: questo fascicolo.

(7) Per una completa bibliografia in proposito vedasi H. C. CORBEN, « Rendic. Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. XXIII, 152 (1952).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Pavia.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIV, p. 796.

(2) « Gazz. chim. it. », 83, 1051 e 1059 (1953).



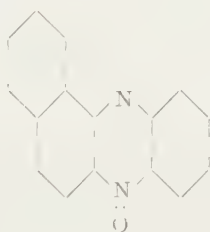
mentre la riduzione all'azoto segue il prevedibile comportamento bielettro-nico a pH elevato e si ha una forte aliquota di semichinone in ambiente fortemente acido, la riduzione all'ossigeno presenta una fondamentale differenza: in un campo di pH compreso fra 2 e 5, la 12 N-monossibenzofenazina mostra la formazione di radicale libero ossidrilico in notevole proporzione, mentre tale formazione è pressoché nulla nella 7 N-monossibenzofenazina a corrispondente pH. Il campo di esistenza della forma semichinonica è limitato dalla salificazione della sostanza organica che si verifica a forti concentrazioni idrogenioniche. La presenza del nucleo benzenico in posizione vicinale rispetto a un gruppo NO è determinante dell'apparente stabilizzazione del radicale libero semichinonico. L'ipotesi che si presenta più ovvia consiste in una interazione da parte dell'atomo di ossigeno del gruppo NO con la posizione 1 della molecola.

Per chiarire di che tipo sia tale interazione abbiamo studiato il comportamento ossido-riduttivo dei 12 N-ossidi delle benzofenazine clorosostituite in 1 e in 4, e del 7 N-ossido della 1 cloro-benzofenazina ottenendo risultati che ora esporremo.



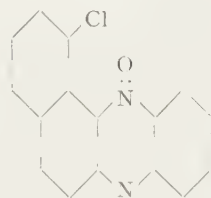
(I)

12 N monossibenzofenazina.



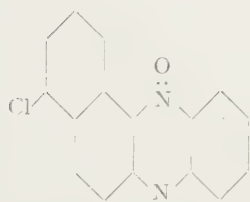
(II)

7 N-monossibenzofenazina.



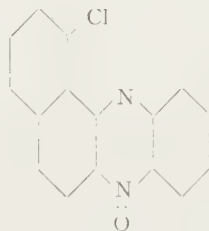
(III)

1 Cloro-12 N-monossibenzofenazina.



(IV)

4 cloro-12 N-monossibenzofenazina.



(V)

1 cloro-7 N-monossibenzofenazina.

PREPARAZIONE DELLE SOSTANZE. — Mentre gli ossidi della benzofenazina sono stati preparati secondo i procedimenti abituali, per condensazione da nitrobenzolo e  $\beta$ -naftilamina per la (I) e per ossidazione con  $H_2O_2$  in soluzione acetica della benzofenazina per la (II), la preparazione degli ossidi delle benzofenazine alogenostituite ha richiesto la messa a punto di un proce-

dimento per la preparazione delle naftilamine clorosostituite. Questo metodo per il forte rendimento e per la relativa facilità si presenta di applicazione generale per le amine aromatiche sostituite e verrà dettagliatamente illustrato in una prossima Nota. Lo schema si può riassumere per sommi capi in blanda riduzione con ferro e acido acetico diluito degli acetilderivati delle nitro-naftilamine e susseguente sostituzione in — 5 e — 8 col gruppo desiderato. La condensazione con nitrobenzolo avviene successivamente con facilità. Il rendimento finale in N-ossido puro supera il 60% rispetto all'acetilderivato per ambedue le sostanze, rendimento che è di gran lunga superiore a quello di qualunque altro metodo tentato, e presenta il vantaggio di richiedere prodotti di partenza a basso costo.

1 cloro-12 N-monossibenzofenazina (III): aghetti serici giallo carico, si purifica per cristallizzazione dall'alcool, pf. oltre 177°C con decomposizione. La solubilità in acetone anidro a 18° è di 6,7 g per 100 cc.

4 cloro-12 N-monossibenzofenazina (IV): aghi giallo citrino, cristallizza da alcool caldo, pf. 193°C, si decompone a temperatura superiore. Solubile in acetone, 1,4 g per 100 cc a 18°C.

1 cloro-7 N-monossibenzofenazina (V): questo composto si prepara da 1-clorobenzofenazina per ossidazione con  $H_2O_2$  in acido acetico glaciale. Cristallizza da alcool. Aghi giallo carico, pf. 223° senza decomposizione. pochissimo solubile in acetone.

RICERCHE POLAROGRAFICHE. — L'esame polarografico dei cloro-derivati venne condotto su soluzioni idroacetone col 30% di acetone; fra i diversi solventi organici impiegati, l'acetone si è dimostrato di gran lunga preferibile per la nettezza delle curve di riduzione che non richiedono aggiunte di soppressori di massimi e danno una corrente di diffusione molto uniforme.

Nel campo di pH acido-neutro furono usati i seguenti tamponi:

pH 0 — 3  $H_2SO_4$  —  $K_2SO_4$   
1,5 — 5,5  $H_2SO_4$  — citrato trisodico  
2,5 — 8,5 Britton-Robinson.

L'intensità della corrente di diffusione è leggermente maggiore per il tampone a citrato, minore per quello di Britton-Robinson a parità di concentrazione idrogenionica. L'apparecchiatura sperimentale era esattamente la stessa già usata nello studio degli N-ossidi (loc. cit.): polarografo Sargent XXI, cella tipo Lingane-Laitinen, elettrodo di riferimento  $Hg_2SO_4$  saturo ad immersione. Le concentrazioni M/3000 per il cloroderivato (III), M/7500 per il (IV) ed M/9000 per il (V) sono le massime compatibili con curve regolari. Lo studio è stato condotto su soluzioni a minor concentrazione.

Come è già stato rilevato nella Nota I (loc. cit.), gli N-ossidi sono assorbiti in misura molto limitata; anche i rispettivi cloroderivati mostrano un adsorbimento ridotto. L'esame è stato condotto con la tecnica già descritta: deformazione di un segnale a dente di sega prelevato dalla placca di un oscillo-

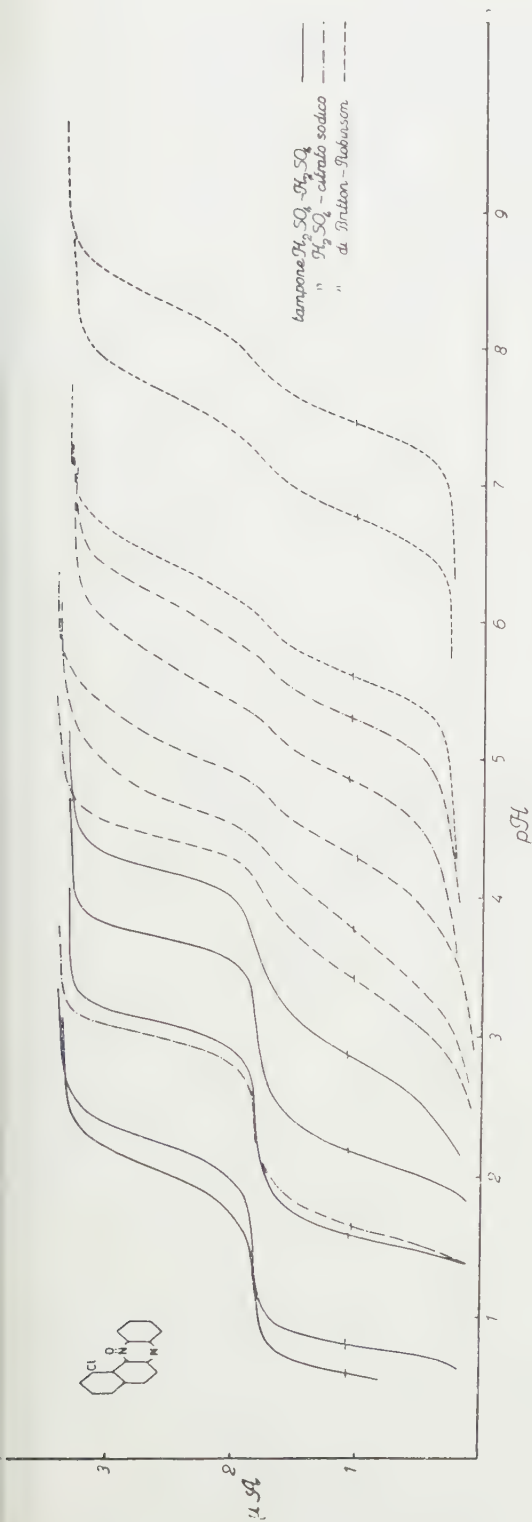
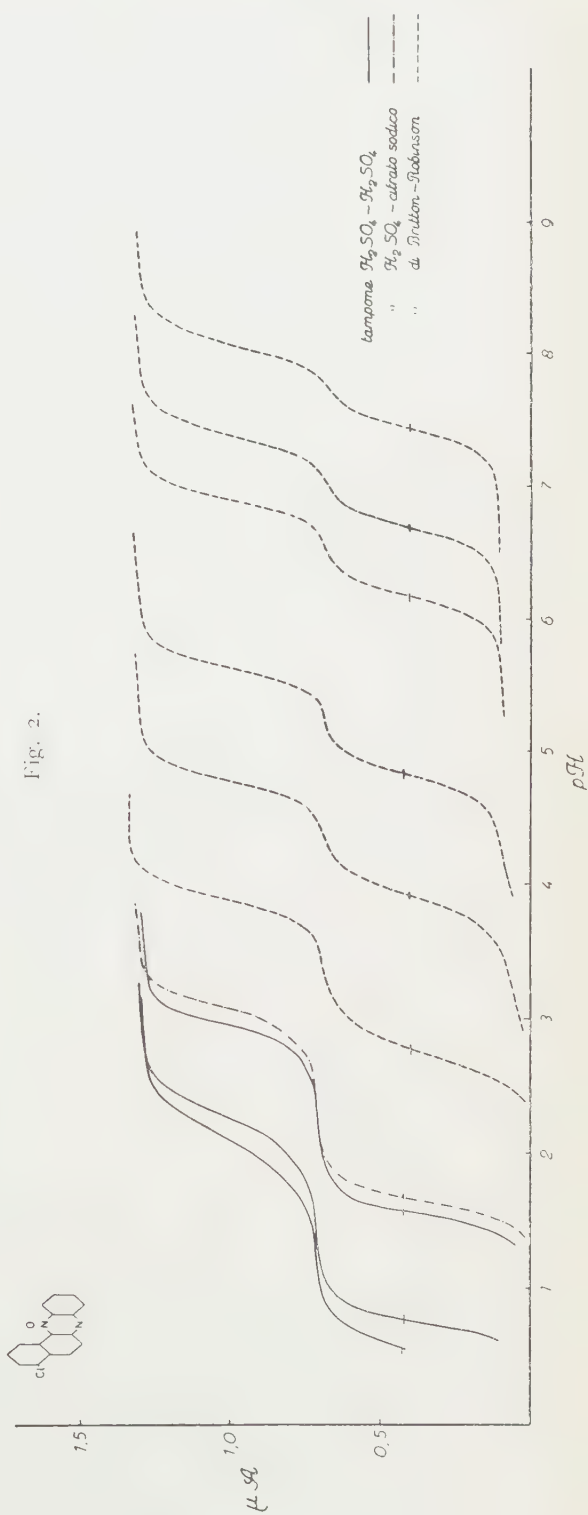


Fig. 2.



scopio ed inviato sugli elettrodi della cella polarografica mantenuti a potenziale costante. In queste nuove ricerche il tempo di goccia era alquanto inferiore ad  $1/15$  di secondo, tempo adottato in precedenza. In tutte le curve di

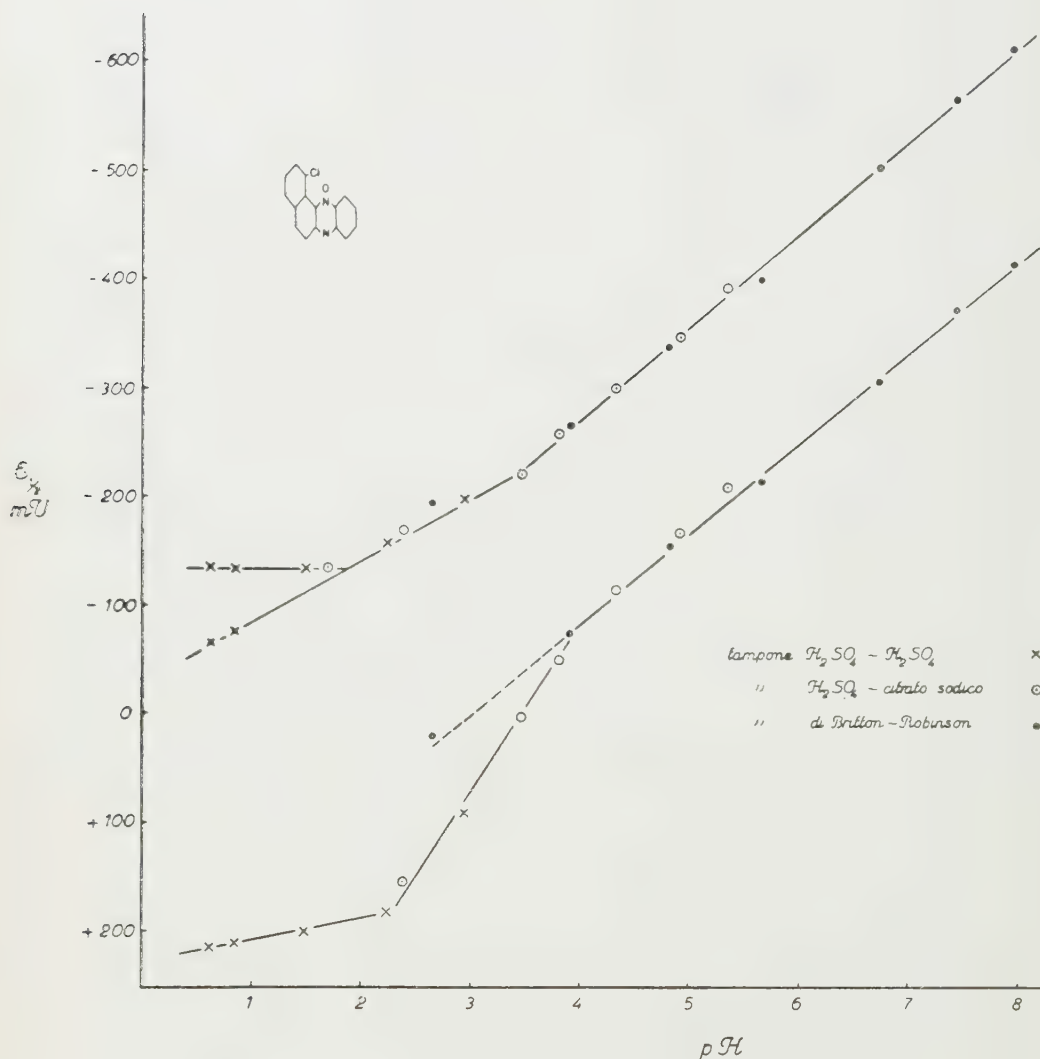


Fig. 3.

riduzione all'ossigeno eseguite l'intensità della corrente di diffusione si accorda per un processo complessivo bieletronico.

L'andamento delle curve di riduzione (figg. 1 e 2) presenta per i cloro-derivati (III) e (IV) un comportamento anche più caratteristico dei rispettivi N-ossidi (I) e (II); come generalmente si osserva in questi N-ossidi, la concentrazione idrogenionica maggiore di  $1/100$  favorisce la salificazione con conseguente impedimento alla formazione del radicale libero. Nel campo

di pH 2-5 per il cloroderivato (III) si presenta una ampia area di formazione del semichinone, che nel (IV) non si osserva che in misura molto limitata. Questo comportamento si accorda qualitativamente con quello degli

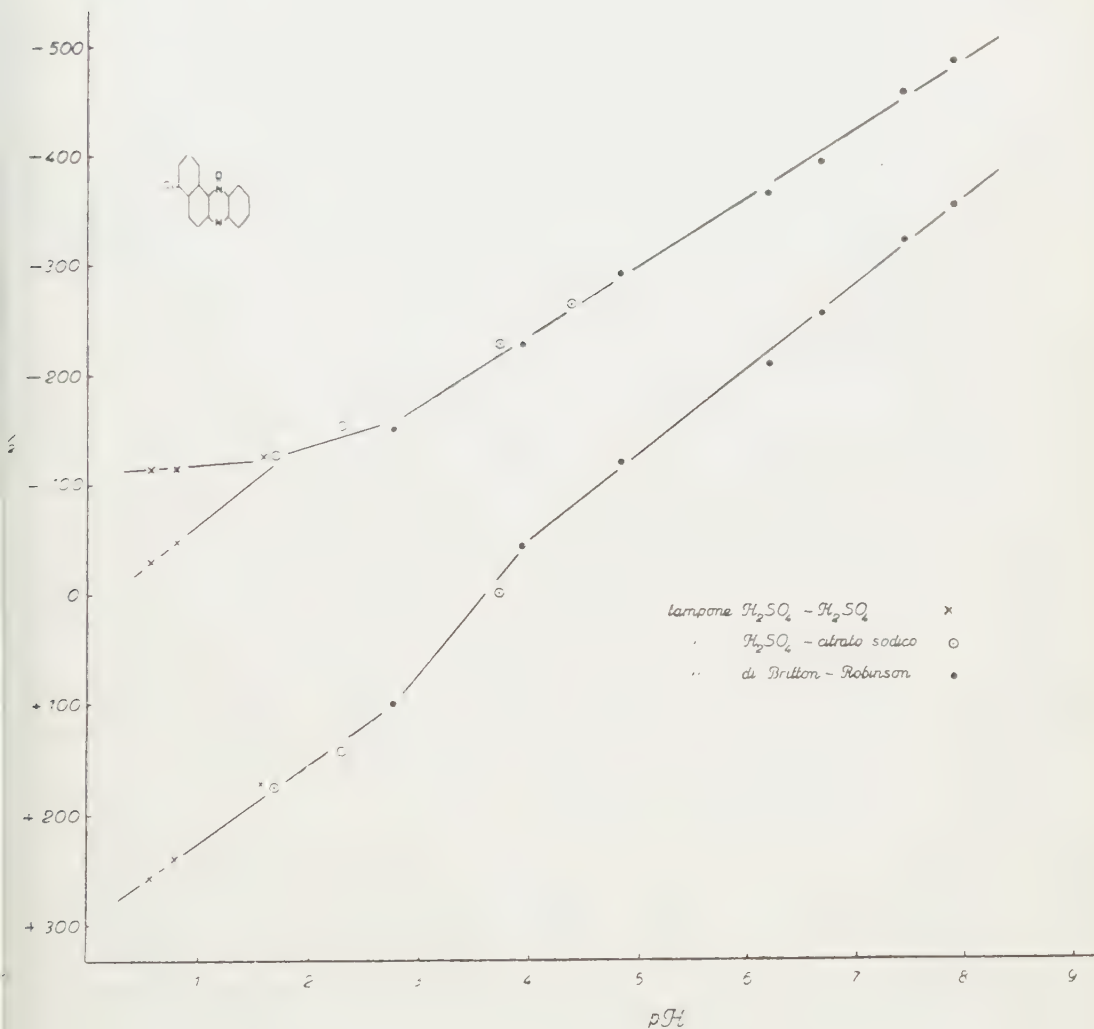


Fig. 4.

N-ossidi (I) e (II) già studiati. Per la sostanza (V) l'andamento delle curve polarografiche, che non riproduciamo per semplicità, dimostra l'assenza di radicale libero nella riduzione all'ossigeno per tutto il campo di pH esaminato.

Nei diagrammi 3 e 4 dove  $E_{1/2}$  per la riduzione all'ossigeno è posto contro la concentrazione in idrogenioni per le sostanze (III) e (IV), l'area di formazione del semichinone è denunciata dal deflettersi della curva inferiore



corrispondente alla riduzione all'ossigeno: anche qui è agevole il confronto fra i due termini clorosostituiti. Per dare un'evidenza qualitativa al comportamento di questi N-ossidi sono riprodotte nella fig. 5 quattro curve di riduzione ottenute nelle stesse condizioni per (I), (II), (III), (IV) ad una

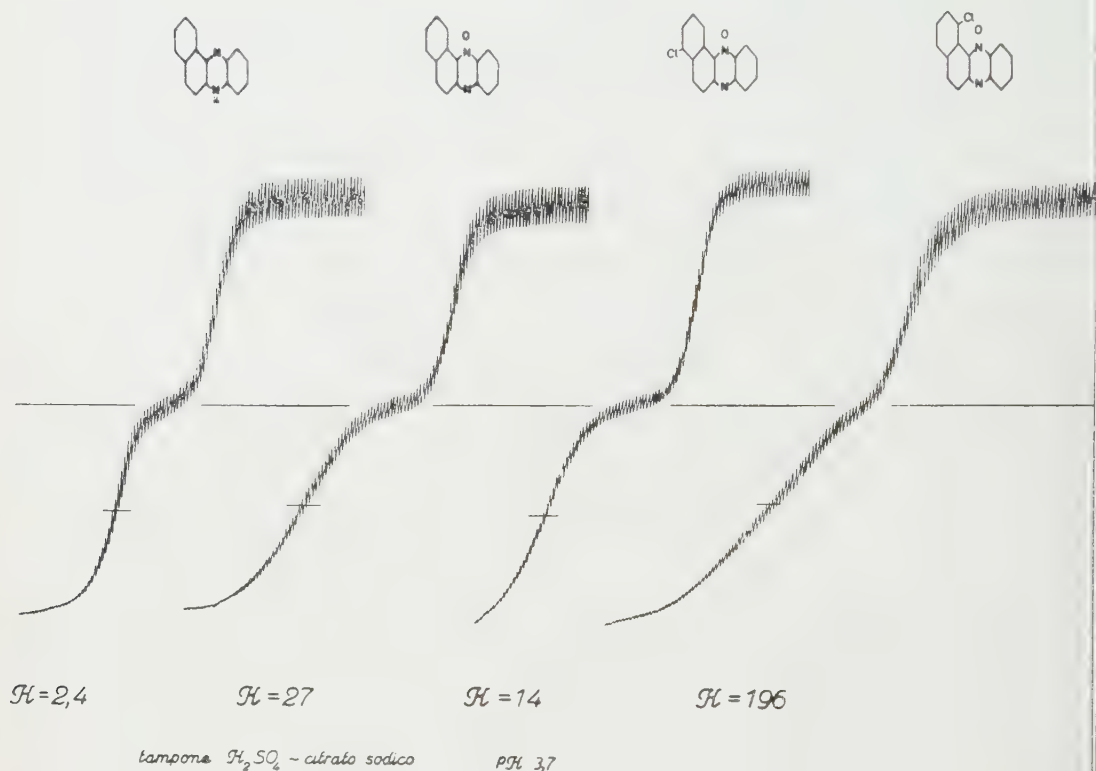


Fig. 5.

concentrazione di idrogenioni in cui l'area di formazione del radicale libero presenta la massima latitudine.

Dal confronto si può rilevare che nel caso del (IV) i due stadi monoelettronici della riduzione all'ossigeno determinano già un accenno di doppio gradino. Questo esame qualitativo mette in evidenza l'andamento del fenomeno che costituisce oggetto di questa ricerca.

Rimandiamo ad una successiva Nota lo studio quantitativo di questo comportamento.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Effetto dell'alta montagna sulla succinicodeidrogenasi del fegato, del rene e del cuore* (\*). Nota di CAMILLO LENTI, MATILDE CAFIERO e MARIA ANGELICA GRILLO, presentata (\*\*) dal Socio G. LEVI.

Nel soggiorno in alta montagna è noto da moltissimo tempo un aumento della concentrazione di emoglobina, così come della ritenzione di ferro nell'uomo. Di ciò è stata data chiara dimostrazione con ricerche compiute all'Istituto Angelo Mosso sul Col d'Olen e alla Capanna Regina Margherita, sezione del medesimo Istituto <sup>(1)</sup>. Uno di noi <sup>(2)</sup>, più tardi, nella stessa sede ha potuto constatare che il contenuto di ferro totale in topolini acclimatati, confrontato con quanto si riscontra in piano, è nettamente cresciuto e che tale modificazione è da attribuirsi solo in minima parte all'emoglobina. Per l'azione dell'alta quota un aumento della concentrazione di altri composti contenenti ferro, quali certe redossasi, sembra pertanto verosimile. Appoggia la presunzione l'interessante osservazione fatta da Viale <sup>(3)</sup> all'Istituto «Mosso» dell'aumento nel sangue della catalasi, cromoprotide che contiene come gruppo prostetico il ferriemo.

Abbiamo pertanto svolto indagini, confrontando l'attività succinicodeidrogenasica di taluni organi (fegato, rene, cuore) di ratti acclimatati in alta montagna con quanto si nota in piano, per porre in luce un eventuale parallelismo tra l'aumento del contenuto di ferro ed uno dell'enzima. Secondo recentissime indagini di Green, Kohout e Mii <sup>(4)</sup> spetta infatti alla succinicodeidrogenasi la struttura di cromoprotide pirrolico con gruppo prostetico costituito da quattro molecole di un ferroemo, di natura non ancora esattamente nota, e da 12-16 atomi di ferro non legati in emi. Anche la più pura preparazione di succinicodeidrogenasi ottenuta da Neufeld, Scott e Stotz <sup>(5)</sup> contiene una piccola quantità di un emo.

Gli esperimenti sono stati condotti su un lotto di 11 giovani ratti maschi del peso di 100-150 g dopo 10-14 giorni dall'arrivo all'Istituto «Angelo Mosso» al Col d'Olen (m. 2961 sul livello del mare) e ripetuti a Torino (m. 239 sul livello del mare) su un numero corrispondente di animali dello stesso sesso ed età. Il nutrimento era costituito nei due casi di pane e formaggio.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Torino e nell'Istituto «Angelo Mosso» sul Col d'Olen.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) G. VON WENDT, «Skand. Arch. Physiol.», 24, 247 (1911).

(2) C. LENTI, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», 13, 850 (1938).

(3) G. VIALE, «Rend. R. Acc. Lincei», 33 (serie 5<sup>a</sup>), 290 (1924).

(4) D. E. GREEN, P. M. KOHOUT a. S. MII, «Biochim. Biophys. Acta», 14, 295 (1954).

(5) H. A. NEUFELD, C. R. SCOTT a. E. STOTZ, «J. Biol. Chem.», 210, 869 (1954).

Gli animali, digiuni da 12 ore, venivano uccisi mediante decapitazione. Tosto erano prelevati il fegato, i reni ed il cuore, lavati con acqua ghiacciata e quindi raffreddati su ghiaccio. Ogni organo era ridotto in piccoli frammenti con forbice e quindi omogeneizzato nell'apparecchio di vetro di Potter ed Elvehjem per 5 minuti con una soluzione formata di 2 parti di NaCl 0,15 M e 1 parte di soluzione regolatrice della reazione di fosfati 0,07 M (pH 7,2), raffreddata in ghiaccio (ml 19 per g di tessuto). Questi omogenati, passati per garza, venivano adoperati nelle indagini.

L'attività succinicodeidrogenasica era seguita adoperando come accettore di idrogeno il cloruro di 2, 3, 5-trifeniltetrazolio, che per riduzione dà un composto rosso, il formazano, insolubile in acqua e poco sensibile all'ossigeno (Kuhn e Jerchel <sup>(6)</sup>). Il sistema sperimentale secondo le indicazioni di Sprinz e Waldschmidt-Leitz <sup>(7)</sup>, opportunamente adattate, si componeva di: ml 1 di omogenato; ml 0,5 di succinato sodico 0,05 M (o di acqua distillata nel caso delle prove in bianco); ml 1 di soluzione regolatrice della reazione di fosfati 0,07 M (pH 7,2); e ml 1 di cloruro di trifeniltetrazolio 0,0075 M. Le prove, sempre in doppio, si mantenevano in termostato ad acqua a 37° C per 60 minuti. Al termine dell'esperimento la reazione veniva arrestata dall'aggiunzione di ml 0,25 di acido cloridrico concentrato. Si centrifugava per 5 minuti, si decantava il liquido limpido, e, dopo aver accuratamente asciugato con carta da filtro le pareti del tubo da centrifuga, si aggiungevano al precipitato ml 10 di acetone e si agitava vigorosamente. Quindi si centrifugava ancora per 5 minuti e subito dopo si determinava la densità ottica della soluzione limpida di formazano a 485 mμ. I valori delle prove in bianco erano sottratti da quelli delle prove con substrato.

I risultati sono raccolti nella tabella.

Confrontando i valori medi dell'attività succinicodeidrogenasica del fegato, del rene e del cuore misurata a Torino con quelli ottenuti con identiche modalità sperimentali al Col d'Olen risultano interessanti modificazioni. Mentre in pianura l'attività massima si riscontra nel fegato, a cui segue il rene e quindi il cuore, in alta montagna essa è massima nel cuore, quindi nel rene e da ultimo nel fegato. Rispetto ai valori del piano l'aumento maggiore concerne la succinicodeidrogenasi del cuore (+ 33,7 %). Tale attivazione - calcolando la *t* di Student - è statisticamente significativa anche per  $P = 0,01$ . Per quanto meno intensamente risulta pur sempre aumentata anche la succinicodeidrogenasi del rene (+ 16,2 %). Dal calcolo della *t* di Student l'attivazione appare statisticamente significativa per  $P = 0,05$ , non però per  $P = 0,01$ . Nel fegato invece non sembrano essere avvenute variazioni evidenti: la differenza percentuale rispetto ai valori del piano di - 5,7 cade infatti entro i limiti di errore del metodo sperimentale adoperato.

(6) R. KUHN u. D. JERCHEL, « Ber. deutsch. chem. Ges. », 74, 941, 949 (1941).

(7) H. SPRINZ u. E. WALDSCHMIDT-LEITZ, « Z. physiol. Chem. », 293, 16 (1953).

## TABELLA.

*Attività succinicodeidrogenasica del fegato, del rene e del cuore di ratti al Col d'Olen e a Torino.*

Al Col d'Olen				A Torino			
N. degli animali	µg formazano formato			N. degli animali	µg formazano formato		
	fegato	rene	cuore		fegato	rene	cuore
1	419	508	577	1	421	466	459
2	395	423	560	2	—	409	371
3	449	442	513	3	459	425	381
4	—	533	422	4	457	416	302
5	426	424	407	5	436	401	364
6	457	483	539	6	345	320	297
7	376	—	481	7	496	390	349
8	452	501	500	8	441	397	370
9	401	425	361	9	377	380	383
10	400	434	423	10	503	401	408
11	349	409	452	11	438	330	231
media...	412	458	476	media...	437	394	356
σ...	± 33	± 41	± 65	σ...	± 49	± 38	± 58

I risultati ottenuti hanno un'interessante analogia con il comportamento del citocromo C osservato da Harnischfeger e Opitz <sup>(8)</sup> in taluni tessuti di conigli sottoposti in campana pneumatica per 40-140 giorni ad una depressione barometrica equivalente a circa 6.000-9.000 metri di altitudine. In queste condizioni sperimentali è aumentato il contenuto di citocromo C nel cuore e nel rene, mentre nel fegato risulta il più delle volte diminuito.

Concludendo, non par dubbia quindi un'azione dell'alta quota sul metabolismo ossidativo, almeno di taluni organi, come deriva dalle modificazioni che intervengono nella concentrazione così della succinicodeidrogenasi, redossasi essenziale del ciclo dell'acido citrico, come del citocromo C, che con la citocromossidasi costituisce il sistema citocromico, di importanza fondamentale per la respirazione cellulare.

(8) E. HARNISCHFEGER u. E. OPITZ, « Arch. ges. Physiol. », 252, 627 (1950).

**Fisiologia vegetale.** — *Dimostrazione spettrofotometrica della formazione di complessi auxin-proteici a livello dei gruppi sulfidrilici in preparati enzimatici vegetali* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Una serie di risultati precedentemente ottenuti suggerisce che alla base della complessa azione fisiologica dell'auxina e delle antiauxine possa individuarsi la capacità di questi composti di controllare determinati sistemi enzimatici, implicati nel metabolismo respiratorio della cellula vegetale (vedi, anche per la bibliografia [1-6]). Lo sviluppo di queste ricerche conduceva ovviamente al punto cruciale del problema: quello del meccanismo dell'azione di questi ormoni sui sistemi enzimatici ad essi sensibili. Come prima alternativa da risolvere, mi è parso importante il cercare di definire se l'interazione tra auxine ed enzimi sia da considerare come un fenomeno diretto, tra proteine e ormone (Tonzig e Trezzi [7]) ovvero se essa implichi l'intervento di fattori biochimici non proteici (coenzima A, ATP, Leopold [8]). Altro punto essenziale appariva quello della natura dei gruppi chimici eventualmente coinvolti nell'interazione tra auxine e proteine enzimatiche.

Nel ciclo di ricerche aperto dalle esperienze qui riferite questi problemi sono stati affrontati da due punti di vista ben distinti, seppure complementari tra loro: studiando cioè, da un lato, i cambiamenti d'ordine fisico che accompagnano la reazione tra auxine e preparati enzimatici quanto più possibile purificati, dall'altro, le modificazioni che, sull'attività degli enzimi presenti negli stessi preparati, potessero essere indotte dal trattamento con questi ormoni.

Le esperienze riferite nella presente Nota sembrano dimostrare come un'interazione tra auxina e proteine di preparati enzimatici purificati mediante precipitazione frazionata, più volte ripetuta, e dialisi, sia chiaramente rivelata da variazioni dello spettro di assorbimento dei composti interagenti. Esse sembrano inoltre permettere la localizzazione del fenomeno a livello dei gruppi sulfidrilici liberi delle molecole proteiche.

#### MATERIALI E METODI.

a) *Preparati enzimatici.* — Come materiale di partenza ho utilizzato la porzione distale (5 mm. circa) del fusticino di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska) coltivate per 7-8 giorni all'oscurità, a temperatura di 25 gradi C. La scelta di questo materiale era consigliata dalla sua caratteristica ricchezza in due sistemi enzimatici nettamente sensibili, anche in estratti, all'auxina: e cioè quello responsabile dell'ossidazione diretta

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.



del glucosio-6-fosfato [5], e quello che catalizza l'ossidazione dell'acido ascorbico [6].

Nell'allestimento dei preparati enzimatici il materiale (100-200 gm. peso fresco) appena prelevato, veniva estratto mediante triturazione in mortaio con un volume di tampone al triidrossimetilaminometano (tris) a concentrazione 0,1 M, pH 7,3, rapidamente filtrato su garza, centrifugato a 20.000 volte la gravità, per allontanare il residuo insolubile. Il soprannatante veniva quindi frazionato, secondo la consueta procedura, mediante precipitazioni successive a diversi livelli di saturazione con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ . Dopo ogni precipitazione (lasciata svolgersi per almeno 3 ore) il precipitato, condensato mediante centrifugazione a 5000 gravità per 15 minuti, veniva ridissolto in un piccolo volume di tampone.

Delle diverse frazioni così ottenute, in queste esperienze soltanto quella tra il 50 e il 60 % di saturazione di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  è stata utilizzata, in quanto essa è apparsa come la più ricca sia in glucosio-6-fosfato deidrogenasi che in ascorbico ossidasi, e quindi, come detto sopra, come quella più suscettibile, presumibilmente, di interagire con l'auxina. Questa frazione, ripresa in tampone, veniva, a seconda dei casi, utilizzata senza altri trattamenti, oppure ulteriormente purificata. Il grado di purificazione dei tre preparati usati nelle esperienze qui riferite risulta dal seguente prospetto:

Preparato  $E_1$ : Frazione precipitata tra il 50 e il 60 % di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ , ridissolta in 10 cc. di tris 0,05 M, pH 7,3, non ulteriormente purificata.

Preparato  $E_2$ : Come  $E_1$ , ma riprecipitata per aggiunta di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  in soluzione satura, fino a concentrazione finale corrispondente al 60 % di saturazione, quindi ridissolta in 10 cc. di tris 0,05 M e dializzata per 24 ore contro 1 litro di tris 0,05 M, pH 7,3, rinnovato 4 volte.

Preparato  $E_3$ : Come  $E_2$ , ma ridissolta, dopo la seconda precipitazione, in bicarbonato 0,02 M, riprecipitata con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  fino a saturazione del 60 %, ridissolta in 5 cc. di bicarbonato, e dializzata per 24 ore contro bicarbonato (5 cambi).

Tutte le operazioni sopra descritte sono state eseguite in camera refrigerata, a temperatura tra 0 e 3 gradi C.

I preparati apparivano caratterizzati da elevatissima solubilità in tris o in bicarbonato, e da ottima limpidezza. Il contenuto in proteine veniva determinato mediante una modifica quantitativa della reazione del biureto (Robinson e Hogden [9]). La ricchezza in gruppi sulfidrilici liberi era dimostrata dalle variazioni nell'assorbimento a lunghezza d'onda di 250 m $\mu$  indotte in frazioni dei preparati dall'aggiunta di acido paracloromercuribenzoico (vedi Boyer e Segal [10]): dati quantitativi a questo proposito verranno pubblicati in una prossima nota.

b) *Auxina impiegata*. - Come auxina ho scelto quella che per il suo spettro di assorbimento nell'ultravioletto mi è apparsa più adatta al rilevamento di eventuali variazioni: e cioè l'acido naftalenacetico (NA). Questo composto presenta infatti, oltre ad uno spiccato massimo a 284 m $\mu$ , un massimo secondario a 274 m $\mu$ , separato da quello principale da una ben di-

stinta depressione in corrispondenza di 276 m $\mu$  (fig. 1). La scelta del NA mi era inoltre consigliata dal fatto che esso già in precedenza si era dimostrato come forse la più costante, tra le diverse auxine impiegate, nei suoi effetti sull'attività dei sistemi enzimatici ossidanti il glucosio-6-fosfato e l'acido ascorbico.

c) *Determinazioni dell'assorbimento nell'ultravioletto.* - Appropriati volumi delle soluzioni di NA, preparato enzimatico e, eventualmente, altri reagenti, a concentrazioni adatte a fornire le concentrazioni finali desiderate, venivano mescolate nelle vaschette di quarzo di uno spettrofotometro Beckman modello DU, portati con tampone a volume di 3 cc., e i valori di assorbimento alle varie lunghezze d'onda determinati (ripetendo le letture almeno tre volte) a brevi intervalli di tempo, usando come bianco una soluzione contenente enzima, tampone, e, eventualmente, altri reagenti,

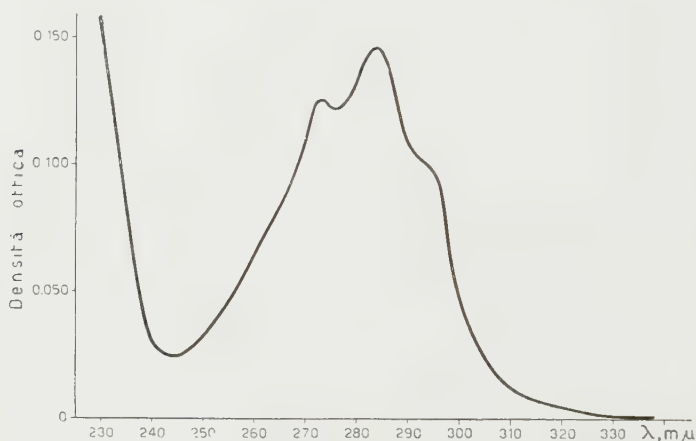


Fig. 1. - Assorbimento nell'U. V. di una soluzione di NA  $2 \times 10^{-5}$  M. Solvente: tris 0,1 M., pH 7,3.

alle concentrazioni in cui essi erano presenti nei saggi. Concentrazione di tutti i reagenti, pH, ordine di aggiunta dei componenti la reazione, tempi di esposizione all'ultravioletto sono stati sempre rigorosamente controllati, così che non sembra che questi fattori possano aver introdotto significative cause d'errore nei risultati sperimentali ottenuti.

*Esperienze e risultati.* - I grafici delle figure 2 e 3 dimostrano come in presenza di preparati enzimatici a considerevole grado di purificazione ( $E_2$  e  $E_3$ ) la curva di assorbimento del NA differisca nettamente da quella risultante dalla somma dei valori di assorbimento propri del NA più quelli propri del preparato enzimatico, separatamente determinati. La modificazione più importante consiste nella scomparsa della caratteristica depressione a 276 m $\mu$ : mentre altre modificazioni, in altre regioni dello spettro, sono apparse meno costanti e riproducibili. La reazione che porta alla scomparsa della depressione a 276 m $\mu$  risulta assai rapida, un equilibrio stabile raggiungendosi nell'intervallo di meno di 5 minuti dall'inizio dell'esperimento.

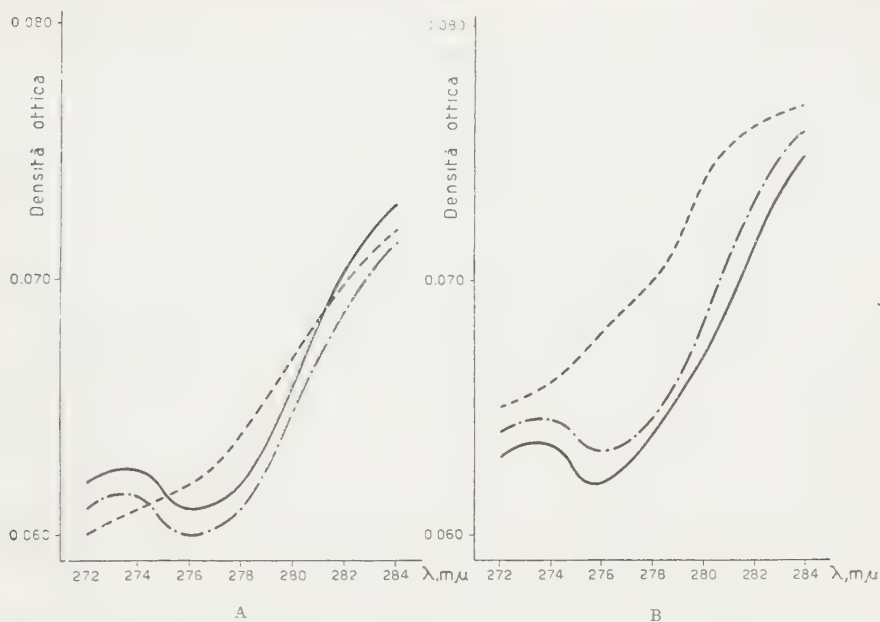


Fig. 2. - Assorbimento nell'U. V. di soluzioni contenenti: NA  $10^{-5}$  M (—); preparato  $E_2$  (A), e  $E_1$  (B) (---) più NA; acido paracloromercuribenzoico  $5 \cdot 10^{-5}$  M, preparato  $E_2$  o  $E_1$ , più NA. Solvente:  $\text{NaHCO}_3$  0,02 M (A) o tris 0,05 M, pH 7,3 (B). Valori corretti per l'assorbimento dei preparati enzimatici e dell'acido paracloromercuribenzoico, quando presenti.

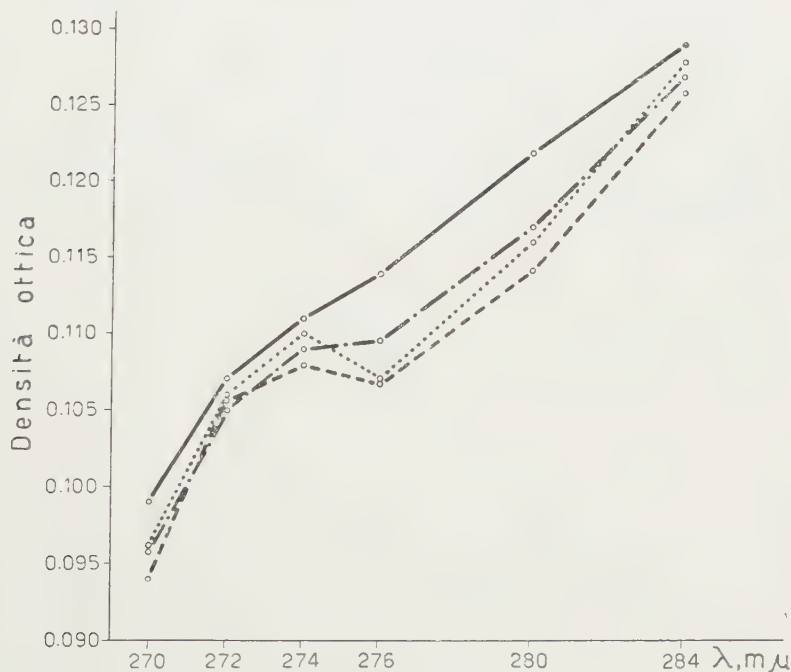


Fig. 3. - Assorbimento di soluzioni contenenti NA  $10^{-5}$  M e concentrazioni diverse del preparato  $E_2$  (...: o; ----: 2 mg proteine/cc; - - - - : 4 mg; —: 8 mg) Valori corretti per l'assorbimento del preparato. Solvente: tris 0,05 M;

Le figure 2 e 3 illustrano pure un altro importante aspetto del fenomeno, e cioè la sua totale inibizione ad opera di concentrazioni relativamente basse di acido para-cloromercuribenzoico: composto noto per la caratteristica specificità con cui si lega ai gruppi sulfidrilici liberi. Il dato sembra quindi implicare la necessità, perché l'interazione tra auxina e preparato enzimatico abbia luogo, della presenza di gruppi sulfidrilici liberi a livello delle molecole proteiche.

I dati delle figure 3 e 4 illustrano la proporzionalità quasi lineare, ai livelli di concentrazione usati, tra concentrazione del preparato enzimatico e effetto sulla progressiva scomparsa della depressione a 276 m $\mu$ : andamento che, mentre da un lato suggerisce la natura chimica, piuttosto che di semplice

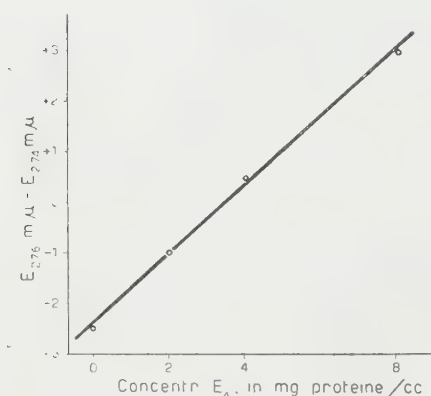


Fig. 4. - Proporzionalità tra concentrazione in preparato E<sub>2</sub> (in mg/cc.) e effetto di scomparsa della depressione della curva del NA a 270 m $\mu$ . Ascisse: differenze tra assorbimento a 276 e a 274 m $\mu$ . Concentrazione in NA: 10<sup>-5</sup> M. Solvente: tris 0,05 M, pH 7,3

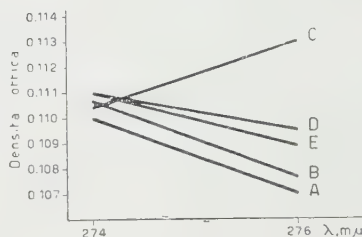


Fig. 5. - Effetto del cloruro mercurico sull'assorbimento a 274 m $\mu$  e 276 m $\mu$ , in soluzioni contenenti: A) NA 1,6  $\times$  10<sup>-5</sup> M; B) NA e HgCl<sub>2</sub> 6  $\times$  10<sup>-5</sup> M; C) NA e preparato enzimatico E<sub>2</sub> (6 mg/cc); D) NA, E<sub>2</sub> e HgCl<sub>2</sub> aggiunto prima del NA; E) NA, E<sub>2</sub> e HgCl<sub>2</sub> aggiunto 5 primi dopo il NA. Solvente: tris 0,05 M, pH 7,3.

adsorbimento, della reazione, dall'altro sembra escludere che la suaccennata variazione di spettro sia imputabile a modificazioni enzimatiche della molecola del NA (quali potrebbero, ad esempio, derivare da fatti di ossidazione). In tal caso infatti la reazione dovrebbe svolgersi, in presenza di concentrazioni diverse in enzima, fino al raggiungimento, sia pure in tempi diversi, di un medesimo equilibrio, indipendente dalla concentrazione dell'enzima stesso.

L'ipotesi di modificazioni enzimatiche del NA durante il periodo dell'esperienza è pure contraddetta dall'esame dei grafici della figura 5, che illustra l'effetto sulla reazione del cloruro mercurico, impiegato a concentrazioni relativamente molto modeste (5  $\times$  10<sup>-5</sup> M). Questo composto, anch'esso noto per le sue caratteristiche di bloccatore dei gruppi sulfidrilici (seppure di gran lunga più grossolano, nella sua azione, dell'acido paracloromercuribenzoico), mentre da un lato inibisce totalmente la scomparsa della depressione a 276 m $\mu$ , quando esso viene aggiunto al preparato enzi-

matico prima del NA, dall'altro, aggiunto a interazione avvenuta, ripristina in misura pressoché totale la depressione scomparsa in seguito alla reazione tra NA e preparato enzimatico. La scomparsa della depressione in questione sembra quindi doversi interpretare come espressione della formazione di un complesso reversibile tra auxina e molecole del preparato enzimatico.

#### RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I. Variazioni ben definite nello spettro di assorbimento nell'ultravioletto compaiono quando un'auxina (l'acido naftalenacetico) viene portata in contatto con preparati enzimatici notevolmente purificati.

II. Queste variazioni non compaiono quando i gruppi sulfidrilici liberi dei preparati enzimatici sono bloccati dall'acido paracloromercurobenzoico o dal cloruro mercurico, a concentrazioni relativamente molto basse. L'aggiunta di cloruro mercurico, a interazione avvenuta, annulla le variazioni di spettro caratteristiche dell'interazione stessa.

III. L'intensità delle variazioni dello spettro di assorbimento, in determinate condizioni di concentrazioni, risulta pressoché direttamente proporzionale alla concentrazione del preparato enzimatico.

IV. L'effetto spettrofotometrico non è imputabile a un fenomeno enzimatico, e cioè ad una trasformazione dell'auxina, catalizzata da enzimi presenti nel preparato enzimatico.

V. Il notevole grado di purificazione di almeno alcuni dei preparati impiegati (3 precipitazioni con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ , seguite da dialisi) suggerisce che nel nostro caso ci si trovi in presenza di un'interazione diretta tra auxina e proteine, senza l'intermediario di altri sistemi metabolici.

Questi risultati, mentre mi sembrano aprire larghe prospettive sperimentali per ulteriori ricerche, appaiono già di per se stessi interessanti, in quanto confermano nel concetto che l'azione fisiologica delle auxine *in vivo*, come pure le manifestazioni biochimiche della loro azione *in vitro* (regolazione dell'attività di determinati enzimi) possano derivare, almeno in larga parte, dalla capacità di questi ormoni di legarsi reversibilmente con le molecole proteiche, a livello dei gruppi sulfidrilici.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 433 (1953).
- [2] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 758 (1954).
- [3] E. MARRÈ e C. DUGNANI, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., 61 (1954).
- [4] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16 (1954).
- [5] O. ARRIGONI e E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16 (1954).
- [6] E. MARRÈ e C. BIAGGI, in corso di stampa.
- [7] S. TONZIG e F. TREZZI, VIII Congrès Int. de Botanique, Paris, 1954.
- [8] A. C. LEOPOLD and F. S. GUERSNEY, « Proc. Nat. Acad. », 39, 1105 (1953).
- [9] H. W. ROBINSON and C. G. HODGEN, « Journ. Biol. Chem. », 135, 707 (1940).
- [10] C. D. BOYER and H. T. SEGAL in *The mechanism of enzyme action*, di MC ELROY and GLASS, « J. Hopkins Press », Baltimora (1954).



**Fisiologia vegetale.** — *Azione del flavin-mono-nucleotide e del flavin-adenin-dinucleotide sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in frazioni enzimatiche parzialmente purificate* (\*). Nota di ORESTE ARRIGONI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Nell'ossidazione dei substrati respiratori, la catena ossido-riduttiva si snoda attraverso una serie di reazioni, di cui la più nota può così riassumersi: substrato-coenzima piridinico-flavoproteina-citocromi-ossigeno.

Ai soliti mezzi di indagine dell'intensità con cui i diversi substrati vengono ossidati *in vitro*, primo fra tutti il consumo di ossigeno, si è oggi aggiunto l'uso del metodo al cloruro di trifenil-tetrazolio, che, pur occupando nella catena respiratoria un posto presumibilmente identico a quello del blu di metilene, usato nel classico metodo di Thunberg, sembra però fornire per la tecnica d'uso maggiori garanzie (1).

Ricerche di Tewfik e Stumpf (2) e di Gibbs (3), rispettivamente sull'ossidazione del fruttosio-1-6-fosfato e degli esosio-fosfati in estratti di tessuti vegetali, mettevano in evidenza una spiccata attivazione del consumo di ossigeno, da parte del flavin-adenin-dinucleotide (FAD) e del flavin-mono-nucleotide (FMN).

Nella presente ricerca mi sono proposto di vedere se l'attivazione da FMN, osservata determinando il consumo di ossigeno, riapparisse anche nel caso della determinazione dell'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica, con la tecnica al tetrazolio (TTC).

Parallelamente ho studiato l'effetto, sulla stessa reazione, del FAD. Da una precedente ricerca (4) risultava infatti che l'aggiunta di ATP stimolava in estratti di tessuti vegetali l'attività glucosio-6-fosfato-deidrogenasica; effetto possibilmente imputabile a una sintesi di FAD dall'ATP e dal FMN (5) inizialmente presente o aggiunto agli estratti.

**MATERIALE E METODI.** — Come materiali enzimatici ho utilizzato:

1° estratti grezzi di piantine di *Pisum sativum* v. Alaska, coltivate per 8-10 giorni al buio e alla temperatura di 25 gradi C. L'estratto veniva preparato tritutando in un mortaio, in presenza di sabbia di quarzo e di un volume di tampone al Tris (Tris-idrossimetil-amino-metano) gli apici ezio-lati. Dopo avere filtrato con garza si centrifugava a 7000 g. allo scopo di eliminare quarzo, amido e gruppi di cellule integre;

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, 1954, « Giorn. di Biochimica » (in corso di stampa).

(2) S. TEWFIK and P. K. STUMPF, 1951, « J. Biol. Chem. » (192), 530.

(3) M. GIBBS, « Plant Physiology », 1954.

(4) O. ARRIGONI e E. MARRÈ, 1954, « Giorn. di Biochimica » (in corso di stampa).

(5) A. W. SCHRECKER and A. KORNBERG, 1950, « J. Biol. Chem. », 182 (795-803).

2° preparato enzimatico ottenuto sempre dagli apici di pisello coltivati come sopra citato, ma l'estratto era successivamente centrifugato a 20000 g. allo scopo di eliminare i mitocondri. Indi si sottoponeva ad una serie di precipitazioni con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  a diverso grado di saturazione;

3° frazione enzimatica tra 33-50 % di saturazione di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ , sottoposta a dialisi per una notte contro Tris 0,1 M, pH 7,4 alla temperatura di 3 gradi C.

La reazione al TTC avveniva all'oscurità e in un essiccatore, evacuato mediante un'efficiente pompa ad olio.

L'estrazione del colore si effettuava aggiungendo 5 cc. di acetone ed eliminando per centrifugazione il residuo insolubile.

La lettura della quantità di TTC ridotto si otteneva leggendo al colorimetro EEL con un filtro a lunghezza d'onda di 495 millimicron.

Come reagenti ho usato Tris, glucosio-6-fosfato, TPN, FMN e FAD al 30 % di purezza forniti dalla ditta « Sigma » di St. Louis.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

a) Azione del FMN in funzione della concentrazione, sulla frazione enzimatica tra 33-50 % saturazione di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ .

b) Azione del FMN in funzione della concentrazione, sulla frazione enzimatica tra 33-50 % saturazione  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  dializzata per una notte contro Tris 0,1 M, pH 7,4 alla temperatura di 3 gradi C.

c) Azione del FMN e dell'ATP sulla frazione tra 33-50 % saturazione  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  non dializzata.

d) Azione del FMN e del FAD sulla frazione tra 45-60 saturazione  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ .

e) Azione del FMN sull'estratto fresco di apici di pisello.

#### TABELLA I.

*Composizione dell'incubato: frazione enzimatica corrispondente a 1 grammo di peso fresco in tampone al Tris 0,1 M, Ph 7,4. Glucosio-6-fosfato (Gl-6-P) 3 mg/cc, Trifosfopiridinnucleotide (TPN) 30  $\gamma$ /cc, TTC 10<sup>-3</sup>. Volume finale 1 cc. Tempo di reazione 1 ora.*

	$\gamma$ TTC ridotto	Stimolazione
Gl-6-P: TPN	17	—
» » - FMN $2,5 \cdot 10^{-6}$ M	20,7	21 %
» » » $10^{-5}$ M	22,6	32,9 %
» » » $5 \cdot 10^{-5}$ M	33,2	95,2 %
» » » $10^{-4}$ M	40,8	140 %
» » » $5 \cdot 10^{-4}$ M	45	164 %

I dati delle tabelle illustrano assai chiaramente come tanto il FMN che il FAD attivino, in misura non sostanzialmente diversa, la riduzione del TTC nelle mie condizioni sperimentali, dimostrando così che nei miei estratti è presente e partecipa, nella via di trasporto dell'idrogeno da i substrati impiegati al TTC, un enzima a gruppo prostetico di natura flavinica: dato che conferma quelli di Brodie e Gots <sup>(6)</sup> e di Smith <sup>(7)</sup>.

TABELLA II.

*Composizione dell'incubato come in tabella I, ma frazione dializzata.*

	TTC ridotto	Stimolazione
Gl-6-P - TPN	14	
»        »    - FMN $5 \cdot 10^{-6}$ M	16	14,3 %
»        »        » $5 \cdot 10^{-5}$ M	19,4	38,3 %
»        »        » $10^{-4}$ M	27,3	95 %
»        »        » $2,5 \cdot 10^{-4}$ M	30,1	113 %
»        »        » $5 \cdot 10^{-4}$ M	32	128 %

TABELLA III.

*Composizione dell'incubato come in tabella I.*

	$\gamma$ TTC ridotto	Stimolazione
Gl-6-P-TPN	18	
»        »    - FMN $10^{-4}$ M	39,5	119 %
»        »        » $5 \cdot 10^{-5}$ M	40,2	123 %
»        »    ATP $3 \cdot 10^{-4}$ M	23	27,7 %
»        »        »    - FMN $10^{-4}$ M	45,5	152 %
»        »        »    » $5 \cdot 10^{-4}$ M	46,5	158 %

Inoltre, la pratica equivalenza dell'effetto del FMN e del FAD, sembra indicare, che mentre il FMN non necessita di una ulteriore trasformazione strutturale per esplicare il proprio effetto, altrettanto non si può dire per il

(6) A. F. BODIE and J. F. GOTS, 1951, « Science », 114 (40-41).

(7) F. C. SMITH, 1952, « Plant Physiology », 27 (445-446).

FAD, che nel corso della reazione potrebbe subire l'azione demolitrice da parte di enzimi liberanti acido adenilico, e agire, quindi, dopo conversione in FMN.

TABELLA IV.

*Composizione dell'incubato come in tabella I, ma frazione enzimatica tra 45-60 sat.  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ .*

	$\gamma$ TTC ridotto	Stimolazione
Gl-6-P - TPN	28	
»       »   - FMN $10^{-5}$ M	33,5	19,7 %
»       »       » $5 \cdot 10^{-5}$ M	39	39,7 %
»       »   FAD $10^{-5}$ M	33	17,7 %
»       »       » $5 \cdot 10^{-5}$ M	36,2	29 %

TABELLA V.

*Composizione dell'incubato: estratto 15 % in tampone al Tris 0,1 M, Ph 7,4, Gl-6-P 3 mg/cc. TPN 30  $\gamma$ /cc, TTC  $10^{-3}$ . Volume finale 1 cc, tempo di reazione 1 ora.*

	$\gamma$ TTC ridotto	Stimolazione
Gl-6-P-TPN	41	
»       » - FMN $5 \cdot 10^{-4}$ M	70,3	71,4 %
»       »   ATP $3 \cdot 10^{-4}$ M	53	29 %
»       »       » - FMN $5 \cdot 10^{-4}$ M	87	112 %

Una conseguenza interessante di questi risultati, consiste nel fatto che essi dimostrano come, in preparati del tipo di quelli da me usati, l'attività della flavoproteina costituisca un fattore limitante; condizione di cui è da tenere conto nello studio dell'eventuale azione di altri fattori sull'attività deidrogenasica determinata con questo metodo, essendo la quantità di TTC ridotto evidentemente in funzione non solo e non tanto dell'attività della deidrogenasi specifica per il substrato studiato, quanto di quella della flavoproteina.

Questo concetto sembra trovare una conferma nel fatto, che nelle mie condizioni sperimentali, l'attività della glucosio-6-fosfato deidrogenasi misurata come riduzione spettrofotometrica del TPN è risultata molto maggiore dell'attività deidrogenasica dosata determinando la riduzione del TTC.

**Anatomia.** — *Considerazioni sul braccio temporale della commessura bianca anteriore dell'encefalo*<sup>(\*)</sup>. Nota di LUIGI CATTANEO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. PENSA.

In una precedente Nota pubblicata lo scorso anno negli «Atti» di questa Accademia, avevo riferito sulla origine ed il comportamento del braccio frontale della commessura bianca anteriore dell'encefalo; è ora mio intendimento esporre alcune considerazioni sul braccio temporale o sfenoidale della commessura stessa.

Anche queste mie osservazioni, come quelle che furono oggetto della precedente Nota, si riferiscono all'encefalo del cane e del gatto e furono fatte su sezioni seriali, colorate col metodo di riduzione argentea Bielschowsky-Palumbi.

Come avevo fatto notare nell'altra Nota, il braccio frontale della commessura bianca anteriore è formato da tre o quattro fasci midollati che fattisi evidenti entro la radiazione olfattiva profonda, in corrispondenza della parte posteriore del peduncolo olfattivo, entrano nella testa del nucleo caudato ove si riuniscono in un unico fascio; questo decorre poi in addietro e medialmente e, giunto in corrispondenza della parete anteriore del terzo ventricolo, passa nell'emisfero opposto.

Nelle sezioni frontali di encefalo condotte a livello della zona ove la commessura bianca anteriore, ripiegando medialmente e un po' verso l'alto, si fa controlaterale, si nota un grosso fascio di fibre, per la maggior parte almeno midollate, che, attraversando la parte più bassa della capsula interna, si congiunge da una parte col margine inferiore della capsula esterna e dall'altra col braccio frontale della commessura, unitamente al quale si continua nell'emisfero opposto. Questo fascio è il braccio temporale o sfenoidale della commessura bianca anteriore; è risaputo infatti in base alle osservazioni del Kölliker e del Cajal che esso trovasi, negli animali macrosomatici, teso frontalmente tra le capsule esterne dei due emisferi.

Dai miei preparati risulta in modo manifesto che il braccio temporale e la capsula esterna non sono soltanto adiacenti, ma che vi è continuità di fibre fra l'una e l'altra formazione; le mie osservazioni concordano inoltre con l'opinione del Cajal che tali fibre, per la via della capsula esterna, vadano dalla corteccia neopalliale (della zona di emisfero antistante al piano del solco pseudosilvio) alla commessura bianca anteriore oppure

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di studio del sistema nervoso dell'Università di Pavia diretto dal prof. A. Pensa.

(\*\*) Nella seduta dell'11 dicembre 1954.



che da questa risalgano a detta corteccia. L'esistenza di fibre neopalliali nella commessura anteriore fu ammessa anche da altri Autori come dal Loo in opossum, dal Brodal nel ratto, da Fox, Fisher e Desalva nel macaco.

Queste fibre data la loro provenienza dalla corteccia neopalliale sembrerebbero essere le sole, tra quelle che entrano nella costituzione del braccio temporale della commessura bianca anteriore, non in connessione con i centri olfattivi encefalici; è risaputo infatti come detta commessura rappresenti il sistema commessurale proprio del rinencefalo. È tuttavia da tener presente che in corrispondenza della zona nella quale il peduncolo olfattivo si fonde con la soprastante parte neopalliale dell'emisfero un gran numero di fibre della radiazione olfattiva profonda, come ho potuto ripetutamente constatare nel cane e nel gatto, abbandona questa per irradiarsi in alto verso la corteccia cerebrale antistante al piano del solco pseudosilvio; orbene il fatto che da questa zona corticale prendano origine le sopra ricordate fibre neopalliali che entrano nel braccio temporale della commessura induce a mio avviso a ritenere che anche dette fibre siano, almeno in parte, sotto il dominio del senso dell'odorato.

I miei reperti mi hanno indotto a confermare il fatto che il contingente maggiore di fibre che entra nella costituzione del braccio temporale della commessura non è tuttavia rappresentato da quelle che attraversano la capsula esterna, ma dalle fibre provenienti dalla corteccia piriforme e dal nucleo amigdaloido.

Le fibre provenienti da queste zone (corteccia piriforme e nucleo amigdaloido) destinate alla commessura bianca anteriore, come ho potuto osservare in sezioni frontali seriali, si addensano nella parte più profonda del lobo piriforme formando una rete a maglie fitte; si raccolgono poi in un fascio che decorre nella profondità del lobo piriforme stesso e che si porta verso l'avanti per unirsi al braccio temporale della commessura, nello stesso punto dove questo prende connessione anche con il margine inferiore della capsula esterna.

Ho potuto da ultimo constatare come nel braccio temporale entrino, oltre ai ricordati sistemi di fibre, dei quali era già nota da tempo la partecipazione alla costituzione di quello, anche fibre del fornice. È noto che la commessura bianca anteriore, in corrispondenza della parete anteriore del terzo ventricolo, trovasi posta subito al davanti delle colonne del fornice e che ciascuna di queste nel suo cammino verso il corpo mammillare del corrispondente lato, incurvandosi verso l'indietro, viene a diretto contatto con il contorno supero-posteriore della commessura. Orbene l'osservazione di sezioni sagittali, orizzontali e frontali condotte serialmente mi ha rivelato che fra queste formazioni, colonne del fornice e commessura bianca anteriore, non vi è un semplice rapporto di vicinanza, ma che esiste costantemente scambio di fibre.

Reperto analogo fu da me osservato, oltre che nell'encefalo del cane e del gatto, anche in quello dell'uomo.

## AUTORI CITATI.

- BRODAL A., *The origin of the fibers of the anterior commissure in the rat. Experimental studies*, « J. comp. neur. », 88, 157-205 (1948).
- CAJAL S. RAMON, *Estructura de la corteza cerebral olfativa del hombre y mamíferos*, « Trab. Lab. invest. biol. de Univ. Madrid », 1, 1-140 (1901-1902).
- CATTANEO L., *Contributo alla conoscenza della commessura bianca anteriore dell'encefalo*, « Atti Acc. Naz. Lincei », 14, 819-823 (1953).
- CATTANEO L., *Sulle connessioni fra la corteccia del tubercolo olfattivo e la commessura bianca anteriore dell'encefalo*, « Atti Soc. It. Anat. », XV Conv. Milano 1953. In: Suppl. « Monit. Zool. It. », 62, 482-484 (1954).
- FOX C. A., FISHER R. R. and DESALVA S. J., *The distribution of the anterior commissure in the monkey (Macaca mulatta). Experimental studies*, « J. comp. neur. », 89, 245-277 (1948).
- KOELLIKER A., *Handbuch der Gewebelehre des Menschen*, 2° Bd., Leipzig, Engelmann, 1896.
- LOO Y. T., *The forebrain of the opossum, Didelphis virginiana. Part. II. Histology*, « J. comp. neur. », 52, 1-148 (1931).

**Biologia.** — *Prime osservazioni citologiche e istochimiche sulla pseudobranchia spiracolare di « Cyprinus carpio »* <sup>(\*)</sup>. Nota di VALDO MAZZI e ORNELLA AGOSTINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio N. BECCARI.

Le formazioni pseudobranchiali dei Pesci hanno attirato, fino dalla seconda metà del secolo scorso, l'attenzione di molti ricercatori che ne hanno studiata, da un punto di vista comparativo, la struttura, la vascolarizzazione, la innervazione, e ne hanno tentato la interpretazione in termini funzionali e la precisazione del valore biologico generale <sup>(1)</sup>.

Le indagini intorno alla fine struttura delle formazioni pseudobranchiali sono state, però, meno approfondite. Dopo le ricerche precorritrici di Maurer e le ricerche, per quel tempo del tutto esaurienti, di Granel e di Vialli, la letteratura tace in proposito. Solo del tutto di recente V. Rossi <sup>(2)</sup> si è accinto alla ricerca istotopochimica delle fosfatasi nelle branchie, e, parallelamente, anche nelle pseudobranchie. Nel quadro di una ricerca organica intorno alla pseudobranchia spiracolare della carpa, abbiamo pertanto ritenuto opportuno applicare alcuni moderni metodi della citologia e della istochimica, allo scopo di ricavare dati che potessero tornare utili anche per una interpretazione in termini funzionali della pseudobranchia.

La pseudobranchia spiracolare della carpa è un organo relativamente complesso: esso non è visibile per trasparenza sul fondo della camera bran-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Per ogni riferimento bibliografico cfr. le seguenti opere: F. GRANEL, « Arch. Anat. Micr. », 23, 175 (1927); S. G. KRYŽANOVSKY, « Zool. Jahr., Abt. Anat. », 58, 174 (1934); H. A. STORK, « Zool. Jahrb., Abt. Anat. », 55, 505 (1932); M. VIALLI, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 23, 49 (1926).

(2) « Riv. Istochimica », 1, 145 (1954).

chiale, poi che, come già rilevò Granel, un fitto strato connettivale rinforza l'epitelio che tappezza la camera stessa. Pertanto essa cade nel IV gruppo della classificazione proposta da Granel (e non del tutto accettata da Vialli); è comunque la tipica pseudobranchia coperta di J. Müller. L'esame istologico mette in chiaro che la pseudobranchia della carpa è del tutto circondata da tessuto connettivo; ciò determinerebbe, secondo Granel, l'irregolare piegheggiamento delle lamine e delle lamelle. Ogni lamina consta di un corpo, formato da una porzione connettivale molto appiattita, entro la quale decorrono l'asse scheletrico, consistente di una asticciola cartilaginea, e i vasi afferente e efferente. Dai fianchi del corpo della lamina si dipartono le singole lamelle pseudobranchiali, fra di loro separate da peculiari cellule connettivali.

È noto che ogni lamella consta di un'asse vascolare, composto, come nelle branchie, da lacune delimitate dalle cellule a pilastro, o di Bietrix, che a loro volta costituiscono anche la lamina vascolare, e da cellule epiteliali di rivestimento. Queste sono disposte in uno strato unico, hanno la forma di prismi esagonali o pentagonali e poggiano con la base interna sulla lamina vascolare, con quella esterna sulle particolari cellule connettivali, sopra menzionate, che isolano l'una dall'altra le singole lamelle.

Dalle ricerche di Vialli e di Granel sappiamo soltanto che le cellule di rivestimento manifestano una spiccata acidofilia, dovuta alla presenza di granulazioni del diametro di 0,5 – 1 micron. Vialli, in base anche ai risultati di somministrazione di pilocarpina e di atropina, ritiene le granulazioni espressione di una attività secretoria di tipo endocrino; Granel le considera alla stregua di paraplasmi, mentre Kryžanovsky non attribuisce ad esse alcun particolare valore.

Nella carpa la fissazione nel liquido di Susa e la successiva colorazione con il primo metodo di Galgano o con la ematossilina cromica-floxina secondo Gomori, hanno permesso di mettere in evidenza, con grande chiarezza, i granuli acidofili, colorati rispettivamente dalla fucsina e dalla floxina. I granuli appaiono piuttosto minuti, ed hanno un diametro non uniforme. Come già rilevarono Vialli e Granel in altre specie, anche nella carpa non tutte le cellule hanno uno stesso contenuto in granuli: cellule fortemente granulate sono collegate a cellule molto degranulate (una completa degranulazione non l'abbiamo mai osservata) da tutta una serie di stadi di transizione. Sono inoltre presenti cellule ipercromatiche, con nucleo più scuro, nelle quali i granuli tendono a coalescere e più marcata è la basofilia del citoplasma fondamentale (vedi in seguito). I granuli si addensano preferibilmente verso la lamina vascolare e sono più rari intorno al nucleo, di norma spostato verso la lamina connettivale che separa le singole lamelle. Inoltre i granuli lasciano libera una o più aree citoplasmatiche nettamente circoscritte, spesso ubicate in prossimità del nucleo. Queste aree si colorano intensamente con il bleu di metile del metodo di Galgano e manifestano una marcata basofilia nei confronti del bleu di toluidina ai pH alcalini: questa basofilia si estingue a pH 5 (circa). Il citoplasma fondamentale delle zone granulate ha, di norma, una basofilia meno accentuata. Sempre dopo fissazione in Susa la sostanza

fondamentale citoplasmatica si colora in diverse tonalità di verde-giallo con la colorazione allocromica di Lillie, con la quale non si ottiene una buona messa in evidenza delle granulazioni. Con la reazione PFAS (acido performico Schiff) di Lillie, il citoplasma assume una colorazione rossa, che si attenua o scompare se la reazione viene fatta precedere da bromurazione per un'ora. Segnaliamo infine la presenza saltuaria di uno o più vacuoli nelle cellule degranulate.

Intorno alla natura chimica delle granulazioni fino ad oggi ben poco è noto. Viali dimostrò che esse, nella scardola, hanno una certa siderofilia, sono argentofile ma non argentaffini, non si colorano con i metodi per i grassi né con il metodo di Ciaccio per i lipoidi.

Noi abbiamo confermato, nella carpa la siderofilia (ematossilina ferrica di Heidenhain) la argentofilia e la negatività della reazione argentaffine (secondo Gomori). Abbiamo inoltre accertato che né le granulazioni né il citoplasma fondamentale reagiscono ai metodi per la messa in evidenza dei polisaccaridi (PAS reazione, met. allocromico di Lillie, Bauer, Hale). Le granulazioni danno una reazione debole o debolissima con la Millon sec. Bensley, con la Millon tricloroacetica e solforica sec. Pollister e Ris.

Con il Sudan III e il solfato di bleu Nilo si ottiene una debole colorazione diffusa, mentre in sezioni al congelatore i granuli vengono colorati con notevole intensità dal Sudan nero: questa colorabilità in parte permane anche nelle sezioni in paraffina. Inoltre le granulazioni si colorano pallidamente con la emateina acida del test di Baker, colorazione che non compare nelle sezioni di controllo previamente trattate con piridina. Il test di Baker mette ancora in evidenza, in molte cellule acidofile, e in quantità variabile da cellula a cellula, granulazioni o masserelle irregolari, fortemente colorate in bleu-nero dalla emateina acida. Spesso queste masserelle (liposomi di Bensley?) presentano una zona centrale quasi cromofoba e una zona periferica intensamente cromofila. Anche queste formazioni non appaiono più nelle sezioni slipoidate con piridina. Aggiungiamo infine che le granulazioni sono annerite dall'acido osmico del metodo di Mann-Kopsh e non si colorano con la reazione PFAS (acido performico-Schiff) di Lillie. Inoltre i granuli non sono birifrangenti in luce polarizzata e non danno fluorescenza primaria.

Per meglio chiarire la natura delle cellule acidofile abbiamo compiuto anche la ricerca degli acidi nucleinici. Nel nucleo la quantità di materiale Feulgen positivo è scarsissima, e per questa via abbiamo confermato i vecchi reperti di Viali e Granel, che parlarono appunto di nucleo vuoto. Il nucleo ha, di norma, forma subsferica o ellissoidale ed è dotato di una membrana nucleare piuttosto spessa, ben colorabile, regolare. Soltanto nelle cellule ipercromatiche esso presenta fenomeni di incipiente picnosi, si fa diffusamente colorabile, e la carioteca si raggrinza. Nel nucleo sono presenti sempre uno o due nucleoli, discretamente grandi, e intensamente colorati dalla pironina del metodo di Brachet; la colorabilità si attenua notevolmente, ma non si estingue, dopo un trattamento di un'ora a 37° con ribonucleasi salivare. Onde si può supporre che il nucleolo contenga dell'acido ribonucleinico in forte quantità o a un alto grado di polimerizzazione. Il nucleolo raramente è roton-



deggianti, più spesso è affusato, e ad un più attento esame appare composto di due masserelle fortemente basofile e pironinofile, collegate da un'area meno intensamente cromatica. Quest'area non viene più colorata dal bleu di toluidina a pH 4 né dalla pironina dopo digestione con ribonucleasi salivare.

La posizione del nucleolo, o dei nucleoli, in seno al nucleo è variabile; frequente è il reperto di nucleoli accollati alla membrana nucleare: ma è difficile stabilire se tale posizione sia la espressione di un particolare atteggiamento funzionale della cellula o sia dovuta a semplici fenomeni di sedimentazione per gravità.

La sostanza cromidiale del citoplasma è, di norma, assai scarsa. A giudicare dai preparati istologici molte cellule non ne contengono affatto; in poche altre si notano moderati accumuli in prossimità del nucleo.

Per quanto concerne le cellule di Bietrix – le tipiche cellule colonnari delle branchie che si ritrovano anche nella pseudobranchia – ecco in breve quello che abbiamo osservato. In primo luogo abbiamo confermato che esse formano, con le loro espansioni alariformi, la membrana vascolare. La cosa appare estremamente chiara in preparati sui quali sia stata praticata la reazione PAS: nel preparato spiccano, intensamente colorate in rosso, il corpo delle cellule colonnari, portante il nucleo tipicamente polimorfo, e la membrana vascolare; le cellule acidofile, ed anche le cellule connettivali interposte fra le lamelle, danno invece una reazione negativa. Talvolta nella porzione colonnare delle cellule si mettono in evidenza minute granulazioni più intensamente PAS positive.

Oltre a colorarsi in bleu con il metodo di Galgano, in bleu-nero pallido con la ematossilina cromica del metodo di Gomori, e ad assumere la fucsina-paraldeide dopo ossidazione permanganico-solforica, le cellule di Bietrix si colorano, naturalmente, in rosso con il metodo allocromico di Lillie, in bleu con il metodo di Hale, danno una reazione di Bauer positiva. Evidentemente quindi contengono dei polisaccaridi.

Attendiamo il risultato di nuove indagini, tutt'ora in corso, prima di trarre delle deduzioni intorno alla natura e alla possibile funzione delle cellule acidofile della pseudobranchia spiracolare. Per il momento, tenendo conto del loro comportamento nei confronti delle reazioni per le proteine e per i lipoidi, possiamo supporre per i granuli una natura lipoproteica. Riteniamo interessante il reperto della basofilia del citoplasma fondamentale, basofilia apparentemente non dipendente dalla presenza di acidi nucleinici. Questi infatti sono di norma molto scarsi, contrariamente a quanto potremmo attenderci in cellule apparentemente secernenti. Tenendo conto del fatto che la reazione PFAS di Lillie è positiva, e si attenua o scompare previa bromurazione, si può supporre, in via di ipotesi, che la basofilia del citoplasma fondamentale sia dovuta alla presenza di lipidi acidi insaturi.

Le cellule di Bietrix, che, ripetiamo, da sole formano la membrana vascolare, palesemente contengono dei polisaccaridi <sup>(3)</sup>.

(3) La ricerca delle lipasi con la tecnica dei Tweens (40, 60 e 80 Atlas) e della esterasi non specifica con il metodo all' $\alpha$ -naftil-acetato ha dato esito negativo sia nelle cellule acidofile che nelle cellule di Bietrix (*aggiunta alle bozze*).



**Biologia generale.** — *Espansioni membraniformi e fenomeni di pinocitosi negli assoni embrionali che crescono « in vitro »*<sup>(\*)</sup>. Nota di GIOVANNI GODINA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

È noto da lungo tempo che l'accrescimento degli assoni, i quali irradiano da espianti di tessuto nervoso coltivati *in vitro*, avviene per una particolare forma di ameboidismo dell'espansione terminale; questa è provvista di esilissimi filamenti, che vengono di continuo emessi e retratti. Uno dei filamenti si ispessisce per il fluire in esso della sostanza del neurite; esso persiste e diviene a sua volta sede di emissione di nuovi filopodi. In tal modo il neurite si allunga progressivamente.

Recentemente W. H. Lewis (1950) ed A. Hughes (1953), in microcinematografie a contrasto di fase di neuriti che crescono in coltura hanno messo in evidenza delle espansioni terminali di aspetto alquanto diverso. Essi osservarono all'apice di certi assoni esili membranelle ialine in continuo movimento e notarono che, come le membrane ondulanti dei macrofagi, esse assumono dal mezzo gocce di liquido le quali penetrano nella sostanza del neurite.

In questa Nota riferirò brevemente i risultati delle mie ricerche, eseguite sopra colture viventi con il microscopio a contrasto di fase, sul meccanismo di accrescimento degli assoni, con particolare riguardo all'aspetto che presentano le espansioni membraniformi ed ai fenomeni di pinocitosi.

Le osservazioni furono condotte su colture in goccia pendente, in plasma diluito ed estratto, di espianti di gangli spinali e di varie parti di nevrasse di embrioni di pollo a vario grado di sviluppo.

Oltre a colture allestite con la tecnica comune, in vari casi, dopo circa un'ora dalla preparazione, il plasma, ormai perfettamente coagulato, veniva inciso con un taglio netto in vicinanza dell'espianto, secondo il metodo proposto da H. Fell; per la sineresi del coagulo si produceva in tal modo una lacuna nel plasma, nella quale si raccoglieva immediatamente un sottile velo liquido. I neuriti, che avanzano nella lacuna, procedono in un mezzo liquido aderendo al vetrino e si prestano meglio di quelli, che crescono in colture allestite con la tecnica usuale, per le osservazioni a contrasto di fase.

#### OSSERVAZIONI PERSONALI.

*Espansioni dei neuriti in forma di membranelle ialine.* — Confermo i dati dei precedenti autori (R. G. Harrison, M. T. Burrows, W. H. Lewis, G. Levi,

(\*) Dal centro di Studio sull'Accrescimento e sulla Senescenza degli Organismi e dall'Istituto di Anatomia degli animali domestici di Torino. Ricerche eseguite con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

S. Mossa, ecc.) per quanto riguarda le espansioni a fini filamenti ameboidi transitori, che si apprezzano all'apice della maggior parte dei neuriti in accrescimento.

All'estremità di certe fibre si vedono però anche membranelle ialine sottilissime (figg. 1-2), nelle quali il neurite trapassa espandendosi in superficie e perdendo a poco a poco la sua caratteristica rifrangenza. Questi veli ialini sono animati da un continuo movimento e possono assumere varia estensione. La loro forma muta continuamente sotto gli occhi dell'osservatore in breve volger di tempo; certe parti della membrana vengono retratte, mentre altre si espandono ulteriormente. Le membrane appaiono costituite da un materiale omogeneo, nel quale, anche con i più forti ingrandimenti, non si riesce a distinguere alcuna struttura formata.

Talora in queste lamine, durante il movimento, si costituiscono delle pieghe, le quali appaiono come zone più rifrangenti, di varia forma, della membrana; di solito dopo un certo tempo scompaiono.

Il contorno della membrana è spesso irregolare per la presenza di dentellature, la cui forma si modifica in breve tempo; e non di rado da esso irradiano fini filamenti ameboidi più o meno numerosi (fig. 2); dopo un certo tempo essi vengono retratti, mentre nuovi ne sorgono in punti diversi. Certi filamenti sono estremamente sottili e diventano probabilmente dopo un certo tratto di dimensioni submicroscopiche; altri sono più spessi e più lunghi (fig. 1) e permangono per un maggior tempo prima di essere retratti.

Le espansioni membraniformi, qualunque ne sia l'estensione, sono formazioni transitorie; se si segue al microscopio una fibra in accrescimento, si vede quasi sempre che, dopo un certo tempo, la membrana terminale viene retratta e sostituita da fini filamenti ameboidi indipendenti; più tardi al loro posto può nuovamente ricostituirsi una tenue lamina.

Del resto tra le caratteristiche espansioni membraniformi e quelle, da lungo tempo note, a filamenti ameboidi indipendenti, si apprezzano forme intermedie.

Per altro la formazione di membranelle non si ha esclusivamente alla estremità della fibra nervosa principale, ma lamine ialine, sebbene meno estese, si vedono comparire di tanto in tanto anche all'apice di certi rami collaterali.



Fig. 1. — Da un espianto di ganglio spinale di embrione di pollo di 9 giorni di incubazione. Coltura di 30 ore di vita. Foto a contrasto di fase. Ingrand. circa 800  $\times$ .

I due rami di biforcazione di un assone si espandono in membranelle ialine; quella di destra emette filopodi. Nel punto di biforcazione, numerose goccioline assunte per pinocitosi.

E nei neuriti che crescono in mezzo liquido (colture in plasma ritagliato) ho visto persino formarsi membrane, anche estese, sul decorso della fibra, a spese di un tratto più o meno lungo del neurite, che, perdendo a poco a poco la sua caratteristica refrangenza, si espande in superficie (fig. 3). Questi velamenti ialini, intercalati sul decorso dell'assone, sono in continuità prossimalmente e distalmente con tratti della fibra che conservano i caratteri tipici. Come le membrane ialine terminali anch'essi sono transitori; dopo un certo tempo si riducono di estensione e finiscono per scomparire. La loro retrazione è accompagnata dal ricostituirsi in quella zona di un tratto di fibra con i caratteri tipici.

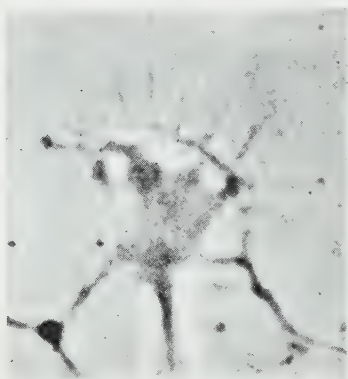


Fig. 2. - Da un espianto di ganglio spinale di embrione di pollo di 9 giorni di incubazione. Coltura di 24 ore di vita. Foto a contrasto di fase. Ingrand. circa 850  $\times$ .

Estesa espansione membraniforme, dal cui contorno irradiano numerosi, esilissimi filamenti. Nella zona marginale della membrana gocce di vario volume, assunte per pinocitosi.

*Pinocitosi nelle espansioni terminali degli assoni.* - I neuriti che crescono in coltura, siano le loro espansioni terminali costituite da membranelle ialine, oppure da fini filamenti ameboidi, incorporano dal mezzo goccioline di liquido (figg. 1, 2, 4). Il processo di pinocitosi si manifesta nelle varie fibre nervose con intensità diversa, variabile nel tempo; le sue diverse fasi si seguono molto bene al microscopio a contrasto di fase.

Nelle colture allestite in plasma ed estratto si vedono comparire nelle immediate vicinanze delle espansioni minute goccioline di liquido che si separano dal mezzo e sono riconoscibili per la minor rifrangenza. Dopo pochi istanti esse sono penetrate nell'interno del neurite.

Nelle espansioni laminari sembra che le goccioline vengano trattenute e circondate da piccole pieghe della membrana, mentre in quelle a fini filamenti ameboidi ho osservato che esse aderiscono ai filopodi e vengono circondate da uno o due filamenti vicini, i quali, ripiegandosi, finiscono con l'abbracciarle.

Una volta incorporate nella sostanza del neurite, le goccioline appaiono come vacuoli chiari, per lo più tondeggianti, di vario volume (figg. 1, 4) animati da un lento, continuo movimento; dopo un tempo variabile si dileguano, talune dopo essersi spostate per un certo tratto lungo la fibra in direzione prossimale (fig. 4). Nel frattempo nuove goccioline vengono assunte dall'espansione terminale. In certi neuriti il processo di pinocitosi è molto attivo; esso perdura per tutto il periodo del loro accrescimento.

Fenomeni di pinocitosi, oltre che in corrispondenza dell'espansione terminale della fibra principale, sono manifesti anche nelle collaterali più robuste e, quantunque più raramente, si osservano persino lungo il decorso

del neurite, in zone nelle quali esso emette esilissimi ramuscoli transitori, apparentemente privi di espansione terminale.

### CONSIDERAZIONI E CONCLUSIONI

Le espansioni terminali degli assoni che crescono *in vitro* possono presentare aspetti diversi, variabili nel tempo. La forma più comune è quella ben nota di ingrossamenti dell'apice del neurite forniti di esili filamenti ameboidi, che vengono alternativamente emessi e retratti. Ma in certe fibre nervose si vedono espansioni in forma di lamine ialine estremamente sottili,

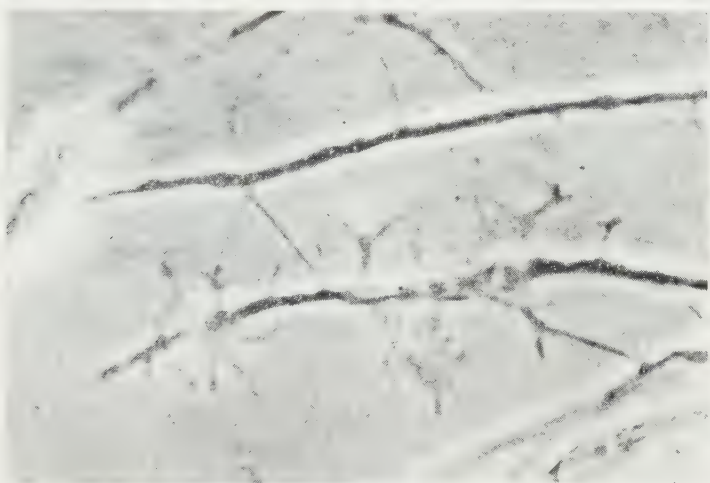


Fig. 3. — Da un espianto di ganglio spinale di embrione di pollo di 11 giorni di incubazione. Coltura di 34 ore di vita. Foto a contrasto di fase. Ingrand. circa 550  $\times$ .

L'assone inferiore emette membrane ialine estremamente tenui e trasparenti in corrispondenza dell'espansione terminale e lungo il decorso.

animate da un continuo movimento; sia per la forma, sia per la struttura, esse ricordano le membrane ondulanti dei macrofagi (W. H. Lewis) ed i sottili veli di ialoplasma, che vengono emessi spesso dai fibrociti espansi in superficie durante la loro migrazione.

Sui fattori che determinano la comparsa dell'uno o dell'altro tipo di espansione degli assoni nulla si sa. Sta di fatto però che membranelle ialine si vedono prevalentemente all'apice delle fibre le quali crescono a contatto di una superficie consistente, quale è quella rappresentata nelle colture dal vetrino, oppure dalla superficie inferiore del coagulo di plasma. Espansioni membraniformi sono più frequenti infatti nelle colture allestite in uno strato di plasma molto sottile e specialmente in quelle in mezzo liquido (colture in plasma ritagliato); in quest'ultimo caso, com'è noto, i neuriti crescono ade-



rendo alla superficie inferiore del vetrino. Mentre nelle colture allestite in un grosso coagulo, quasi tutte le fibre, che procedono in seno al plasma, presentano espansioni a fini filamenti ameboidi.

Sembra pertanto che, per la formazione delle membrane ialine, sia necessaria l'adesione dell'apice del neurite ad una superficie consistente, liscia e regolare; ma tale condizione non è sufficiente, come è dimostrato dalla circostanza che molti neuriti che crescono a contatto con il vetrino presentano mazze terminali con filamenti ameboidi.

Affinché l'apice di un neurite possa espandersi in veli sottili, sono necessari probabilmente dei mutamenti nel suo stato fisico, mutamenti che sembrano avvenire per abbassamento della tensione superficiale, associato a fenomeni di imbibizione della sostanza nervosa; in tali condizioni si determina

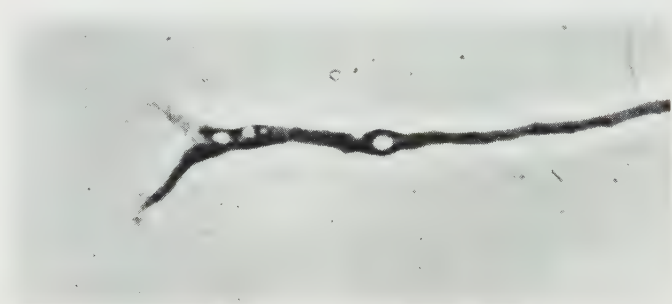


Fig. 4. - Un assone cresciuto da un espianto di ganglio spinale di embrione di pollo di 9 giorni di incubazione. Coltura di 26 ore di vita. Foto a contrasto di fase. Ingrand. circa  $850\times$ .

Numerose goccioline, assunte per pinocitosi, nell'espansione terminale ed anche in sede più prossimale.

verosimilmente una diminuzione delle forze di coesione che tengono unite le micelle colloidali della sostanza nervosa.

Le membranelle ialine possono essere in breve tempo retratte e sostituite da filamenti ameboidi e viceversa; d'altronde tra l'uno e l'altro tipo di espansioni esistono forme intermedie. La variabilità di aspetti che possono assumere le espansioni terminali dei neuriti dimostra la grande plasticità della sostanza nervosa, la quale è in grado di adattarsi nel modo più opportuno alle particolari condizioni del mezzo nel quale i neuriti si accrescono.

Negli assoni che crescono in coltura, siano essi provvisti di mazze terminali a filamenti ameboidi indipendenti, oppure di espansioni membraniformi, sono manifesti processi di pinocitosi. Ed interessante mi sembra l'aver messo in evidenza che la pinocitosi non si verifica esclusivamente nelle espansioni terminali, ma anche nei rami collaterali e persino lungo il decorso del neurite, nei punti in cui esso emette esilissimi filamenti transitori, apparentemente privi di espansione terminale. In accordo con Hughes, ritengo che il fenomeno abbia notevole importanza; con tale meccanismo, a mio avviso,



similmente a quanto si verifica in cellule di altra natura (macrofagi, cellule epiteliali, ecc.), i neuriti assumono dall'ambiente acqua e sostanze disciolte, che vengono utilizzate per il loro accrescimento.

Tale ipotesi si accorda con una esperienza di G. Levi (1926; G. Levi e H. Meyer, 1945), recentemente ripetuta e confermata dallo stesso Hughes: se si recide con l'ago del micromanipolatore una fibra nervosa di una coltura, il moncone periferico, separato dal centro trofico, sopravvive per alcune ore e durante questo tempo continua ad accrescersi con una velocità quasi uguale a quella delle fibre integre. Bisogna necessariamente ammettere che in questo caso l'accrescimento in lunghezza avvenga a spese di materiali che il tratto distale del neurite assume direttamente dall'ambiente. Non intendo con questo negare l'importanza preponderante del pirenoforo quale centro trofico, il quale presiede ad una continua elaborazione di nuova sostanza nervosa che fluisce nell'assone, come è dimostrato, tra l'altro, dalle esperienze di P. Weiss (1944) e di P. Weiss e H. B. Hiscoe (1948). Mi sembra però che le ricerche di micurgia di G. Levi e quelle più recenti di Hughes e mie dimostrino che, oltre ai materiali che gli vengono forniti dal pirenoforo, il neurite utilizza per il suo accrescimento anche sostanze che esso assume direttamente dall'ambiente.

RIASSUNTO. — Osservazioni a contrasto di fase sovra assoni che crescono *in vitro* dimostrano che le loro espansioni terminali presentano aspetti diversi, variabili nel tempo. Oltre ad espansioni a fini filamenti ameboidi, transitori, esistono espansioni a forma di tenui membrane ialine, animate da un continuo movimento. Vengono discussi i fattori che determinano la comparsa dell'una o dell'altra varietà di espansioni.

Gli assoni in accrescimento presentano evidenti fenomeni di pinocitosi. Essi avvengono sia in corrispondenza dell'espansione terminale, sia nelle collaterali, sia infine lungo il decorso del neurite, in zone nelle quali esso emette esilissimi filamenti transitori, apparentemente privi di espansione terminale. Si ritiene che, con l'introduzione di goccioline di liquido, il neurite assuma dall'ambiente acqua e materiali disciolti, i quali, insieme alle sostanze che in esso fluiscono dal pirenoforo, verranno utilizzati per il suo accrescimento.

**Genetica.** — *Su un nuovo ceppo di Drosophila « podoptera » ad alta penetranza* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIORGIO MORPURGO e LAURA MORPURGO-CHITI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Si comprende sotto il nome di *podoptera* un gruppo di mutanti che hanno azione pleiotropica sui più vari organi della *Drosophila*. Goldschmidt (1951) <sup>(1)</sup> include i mutanti *podoptera* nel gruppo delle mutazioni « omeotiche », quelle mutazioni cioè in cui si avrebbe la sostituzione di un organo con un altro organo diverso, ed attribuisce a questo gruppo di mutanti notevole importanza per la spiegazione della macroevoluzione. Nel gruppo di mutanti *pod* si ha infatti in alcuni casi la sostituzione di un ala con un appendice più o meno simile ad un abbozzo di gamba. Lerner (1954) <sup>(2)</sup> invece considera tutti i ceppi *pod* come un gruppo di fenodevianti. La causa sarebbe da ricercare in una imperfetta tamponatura dovuta probabilmente all'inincrocio troppo spinto.

Il nuovo ceppo *pod* è stato isolato circa venti mesi orsono da un ceppo CIB/+ in cui comparivano saltuariamente mosche con 4 o 5 gambe. La selezione del ceppo è stata resa difficile dalla sterilità quasi assoluta delle mosche mutate. Col procedere della selezione la fertilità è considerevolmente aumentata pur restando bassissima. La selezione è inoltre resa difficile dal fatto che la vita media delle ♀♀ *pod* non supera generalmente i due o tre giorni.

Nelle condizioni attuali la penetranza del ceppo è molto vicina al 100 %, ma regredisce rapidamente se ad ogni generazione non si ha cura di accoppiare i fenotipi più estremi.

L'espressività è anche nella maggioranza dei casi molto buona. Maggiormente colpite sono di solito le gambe. Più dei due terzi della popolazione ha infatti un numero di gambe minore del normale, ed anche le mosche normalmente esapode possono avere le gambe variamente deformate o mancanti di alcuni tarsi. In tabella I si vede la frequenza del tipo a 4, 5, e 6 gambe rispettivamente per il ♂ e per la ♀.

Come si vede la frequenza dei vari tipi non è uguale nei due sessi. Nella ♀ la classe di maggior frequenza è quella a 4 gambe mentre nel ♂ la classe di maggior frequenza è quella a 5 gambe e subito dopo a 6 gambe.

Molto chiaramente si ha quindi nelle ♀♀ una maggior penetranza ed espressività; è possibile infatti in questo sesso trovare anche delle mosche con tre o anche due gambe: questo ultimo tipo non riesce però mai a spupare.

Gli arti mancanti appartengono generalmente, ma non sempre, all'ultimo paio; ho trovato anche dei casi in cui tre gambe appartenevano ad un lato ed una sola all'altro (fig. 1). In rari casi ho trovato anche un aumentato

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Genetica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) R. B. GOLDSCHMIDT, A. HANNAH and L. PITERICK. V. CALIF, « Publ. Zool. », 55, 67-294.

(2) I. M. LERNER, *Genetic homeostasis*, Oliver and Boyd, 1954.

numero di arti: in due individui l'arto soprannumerario era dato dallo sdoppiamento subito dopo l'origine di una delle gambe dell'ultimo paio; in un terzo l'arto prendeva origine lateralmente al corpo, immediatamente sotto il bilanciante. Le ali possono presentare varie malformazioni: la malforma-



Fig. 1. — Mosca *podoptera* tetrapode asimmetrica. La mosca è inoltre *hemithorax* e manca di un'ala; *a* lato destro, *b* lato sinistro.

zione più frequente, quando il ceppo non era ancora fortemente selezionato, era il carattere « ala disposta ad angolo retto col corpo ». L'ala, o in qualche caso le ali sono disposte in posizione ortogonale al corpo della drosophila, pur essendo perfettamente formate. Questo carattere presente anche nei ceppi di Goldschmidt è considerato da questo autore il primo indizio della presenza di fattori *pod* nel ceppo. Questo carattere è nei nostri ceppi presente soltanto nei ♂♂. Attualmente le ali sono molto spesso assenti o atrofiche, *scal-*

*loped*, non espanse, vescicolate ed in casi estremi completamente trasformate in un pallone ripieno di liquido. È possibile anche in alcuni casi vedere la trasformazione dell'ala in un abbozzo di arto.

Uno o tutti e due i bilancieri sono spesso assenti. Le mosche mostrano poi, quasi costantemente rottura o anomalità dei tergiti. Saltuariamente compaiono anche altri tipi di malformazione: *hemithorax*, ginandromorfismo; è stata anche trovata una mosca con tre ariste. In un caso il torace e lo scutello risultavano spezzati in due longitudinalmente; mentre una metà restava *in loco*, il resto molto modificato si spostava lateralmente ruotando di 90°, fino a disporsi ventralmente al bilanciere. La mortalità delle uova è estremamente forte, ed è stata saggiata in due momenti diversi durante il corso della selezione. In un primo momento su mille uova non se ne sono sviluppate 258 ossia il 25,8 %. In un secondo tempo, ad un grado di selezione più avanzato l'esperimento è stato ripetuto: su 316 uova 176 non sono sviluppate pari al 56,6 %.

TABELLA I.

	4 gambe	5 gambe	6 gambe	Totali
♂♂ . . . . .	276	451	413	1140
♀♀ . . . . .	471	186	106	763
	747	637	519	1903

Il rapporto dei sessi è fortemente spostato a favore dei ♂♂ (tab. I) e attualmente è pari a circa 0,6 a 1. Questo rapporto è considerevolmente cambiato durante il corso della selezione; il ceppo è stato in alcuni momenti molto vicino all'estinzione per la mancanza quasi assoluta di ♀♀.

Dobbiamo anzi notare a questo proposito che contrariamente a quanto succede generalmente in *Drosophila*, il ♂ sfarfalla considerevolmente prima della ♀.

Il meccanismo ereditario di queste malformazioni è molto probabilmente poligenico. Se si incrocia un ♂ od una ♀ *pod* con una mosca normale scompare ogni traccia di malformazione; né le caratteristiche *pod* sono ricomparse incrociando gli animali così ottenuti per un periodo di 4 generazioni. Il carattere poligenico è anche dimostrato da tutto l'andamento della selezione; l'aumento di fertilità che è avvenuto recentemente può far pensare che la selezione possa ancora procedere. Non credo però che sia possibile ottenere mosche vitali più malformate di quelle ottenute fino ad oggi. È possibile invece che la fecondità e la vitalità aumentino a tal punto da poter ottenere un ceppo tetrapode abbastanza vigoroso da essere stabile in condizioni ordinarie. Esiste certamente una certa influenza del sesso, come dimostra la differente percentuale di devianti estremi nelle ♀♀. Il fatto che il carattere « ala ad angolo retto col corpo » sia presente soltanto nei ♂♂ può far pensare ad una influenza del cromosoma Y, ma anche questo carattere scompare non appena il ♂ « ala diritta » venga accoppiata ad una ♀ normale.



## COMMEMORAZIONI

## Commemorazione del Corrispondente Giorgio Valle

Tenuta (\*) dal Socio GIOVANNI POLVANI

Il dolore prodotto dalla morte di una persona cara, pur riaccendendosi ogni volta che di essa venga fatto di parlare, trae un suo lieve e dolce lenimento dalle parole stesse che per ricordarla vengono pronunciate, specie se dirette a far rivivere dinanzi a comuni amici la vita, l'attività, l'opera, la figura dell'Estinto.

Sono quindi particolarmente grato ai Colleghi della Classe di avermi incaricato di ricordare in questa sede il compianto amico e consocio professor Giorgio Valle, al quale mi legarono grande affetto e profonda stima fin da quel lontano Settembre 1921 in cui c'incontrammo per la prima volta a Trieste: io colà andato per il Congresso della Società Italiana di Fisica, ed egli già prima tornatovi da Bologna cedendo all'acuta nostalgia della città natale.

A Trieste infatti egli era nato il 15 Dicembre 1888 da Antonio Valle ed Emilia Moroni. Triestini entrambi di antiche famiglie triestine, forti di carattere e italiane nello spirito e nell'azione, allevarono l'unico figlio nel senso più stretto del dovere: la madre, musicista, molcendone l'educazione con l'ineffabile diletto della musica, il padre, appassionato naturalista, zoologo, alimentando nel figlio la tendenza innata alla osservazione dei fenomeni del mondo fisico, già in lui manifestatasi chiaramente fin da ragazzo, quando, nel 1906, organizzò, richiamando su di sè l'attenzione delle autorità culturali austriache, un suo sistema di telefonia senza fili funzionante dall'uno all'altro capo delle colline dominanti gli estremi della città.

A Trieste il Valle trascorse tutta la sua prima giovinezza, frequentando con onore le scuole del luogo; nel 1906 passò all'Istituto Tecnico C. Cattaneo di Milano; nel 1907 al Politecnico di Vienna; nel 1909 alla Facoltà filosofica dell'Università di quella medesima città, dove, alla scuola di Exner e di Jodl, superati con distinzione e maggioranza di voti gli esami rigorosi di Fisica matematica e Filosofia e conseguita la laurea, fu da Lecher subito assunto quale assistente.

Scoppiata la guerra del 1914, il Valle tornò a Trieste, dove riuscì, per la protezione di persone amiche, ad evitare il servizio militare, restando in lunga, penosa e pericolosa attesa della liberazione dalla dominazione austriaca.

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.



Godé, esultando, dell'entrata dei marinai e dei soldati italiani nella città; e ormai italiano tra italiani venne nella nuova patria, dove dapprima ebbe, nel 1919, un posto di supplente per l'insegnamento delle Scienze naturali nella Scuola Tecnica di Terni; l'anno dopo per quello di Fisica all'Istituto Tecnico di Bologna; donde, nel 1927, si trasferì ad Asti, vincitore del concorso della Cattedra di Fisica del Liceo Ginnasio classico di quella città. E l'anno successivo, sulla base dei lavori che aveva eseguito a Vienna prima della guerra e di quelli che, profittando nelle vacanze dell'ospitalità offertagli, dal prof. Corbino all'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, e dal prof. Pochettino all'Istituto di Fisica dell'Università di Torino, aveva compiuto in Italia, conseguiva nella stessa Torino la libera docenza in Fisica sperimentale.

Il nuovo titolo permise che la Facoltà di Scienze di quella città gli conferisse l'incarico dell'insegnamento di Fisica superiore. Così per dieci anni attese e all'insegnamento secondario ad Asti e universitario a Torino, con lo scrupolo, lo zelo che la sua retta coscienza gli imponeva e la sua forte resistenza al lavoro fortunatamente gli permetteva: gli permetteva tanto da potere aggiungere l'ulteriore fatica, prodotta dalle ricerche sperimentali che, con grande entusiasmo e bravura, perseguì all'Istituto del prof. Pochettino, fino al conseguimento, nel 1932, della cattedra universitaria di Fisica sperimentale all'Università di Ferrara.

Con la morte del Valle si assottiglia pertanto quella nobile schiera, una volta assai numerosa ed oggi troppo esigua, di fisici pervenuti alla cattedra universitaria attraverso la scuola secondaria. L'ammirazione per tutti costoro, e particolarmente per il Nostro, per la prova di volontà e di duro sacrificio sostenuta, si unisce al rammarico che ai fisici italiani, oltre allo scienziato, sia venuto a mancare, proprio oggi che l'insegnamento secondario della Fisica avrebbe bisogno di tante cure e riforme, uno fra i pochi che, per esperienza personale direttamente acquisita, aveva di quell'insegnamento particolare conoscenza e competenza.

A Ferrara, il Valle rimase solo un anno accademico: nel 1932 infatti veniva chiamato all'Università di Parma, dove, nonostante le difficoltà e la sosta imposta dall'ultima guerra, seppe, come Preside della Facoltà di Scienze, elevare il tono degli insegnamenti di questa fino ad ottenere l'istituzione della laurea in Fisica.

Infine, nel 1947, saliva alla cattedra di Fisica sperimentale che fu già del Righi e del Majorana a Bologna, dove l'attendeva il pesante lavoro della riorganizzazione dell'Istituto fortemente danneggiato dalla guerra.

Ma proprio quando, riparati i danni subiti dall'Istituto, ridati a questo nuovi strumenti, nuove macchine e soprattutto nuova vita; goduta appena la meritata gioia di mostrare agli italiani e agli stranieri convenuti a Bologna nel 1950 per il Congresso in onore di Augusto Righi, quanto egli aveva fatto per la ripresa d'uno dei più gloriosi Istituti di Fisica italiani; proprio quando infine aveva potuto riprendere il lavoro scientifico, il male che già lo minava e che tutti intuimmo minaccioso, quasi incombente, durante

la sua bella commemorazione del Righi nell'Aula Magna dell'Università a Bologna, lo afferrò inesorabilmente, e nel 1952 lo portava alla perdita cruenta della voce.

Non si avvili; anzi più che mai mostrò allora la sua forza d'animo e la sua vitalità; e alla voce perduta sostituendo o informi suoni gutturali o gesti nervosi o scritti velocemente vergati su foglietti di carta, riuscì per un anno ancora a riempire di sua vita e la casa e l'Istituto e a quasi dissuadere gli altri – certo più che sé – dell'agguato mortale, in cui viveva; finché per lo sforzo stesso della sua volontà, la sua fibra fu rotta; e allettatosi nel Novembre passato, doveva, al meriggio del 9 Dicembre 1953, giacer morto in quello stesso Istituto che egli aveva riportato a nuova vita.

\*  
\* \* \*

*Sed mortuus non omnis.*

A chi sfogli l'ottantina di lavori a stampa lasciati dal Valle, fanno subito spicco, per numero e per importanza, quelli relativi allo studio della scarica elettrica. Essi, che costituiscono quasi la metà di tutta la sua produzione e si estendono su tutto il periodo della sua lunga attività scientifica (il primo infatti porta la data del 1912, l'ultimo la data del 1952) hanno dato al Valle, in Italia e all'estero, giusta rinomanza come d'uno che del complesso fenomeno della scarica elettrica in gas rarefatti più ampiamente ebbe a indagare, conseguire più profonda conoscenza e portare a questa più largo contributo; tanto che, in tutti i trattati che riguardano la scarica elettrica, il nome del Valle è al posto d'onore insieme a quello di Gossiat, Townsend, Seeliger, Holm, Geiger. . .

Tale è la messe delle osservazioni originali raccolte nella sperimentazione della scarica dal Valle, che troppo lungo sarebbe qui illustrarle minutamente: accennerò quindi ai punti più salienti ed importanti.

Il Valle, iniziando questi suoi studi nel 1910-12 sotto la guida prima dell'Exner e poi del Lecher, mosse dal caso, indubbiamente più significativo, ma anche assai più complicato e meno indagato, delle scariche discontinue, cioè di quelle che non raggiungono mai uno stato di tranquilla stazionarietà, ma più o meno rapidamente e frequentemente si accendono, si evolvono, si estinguono per poi ripetere periodicamente, dopo una sosta più o meno lunga, dipendente in prevalenza dalle condizioni del circuito, il ciclo dall'accensione all'estinzione.

L'aver intrapreso lo studio della scarica movendo dal caso più complesso, e l'aver attentamente studiato il fenomeno, mediante lo specchio rotante per ciò che riguarda la luminosità globale della scarica e del telefono per il comportamento della corrente, gli meritano la scoperta, nel campo della discontinuità della scarica elettrica, di due tipi estremi di discontinuità, che chiamò rispettivamente di prima e di seconda specie; i quali hanno luogo il primo per valori abbastanza grandi della capacità e qualsiasi della resistenza, al disopra del valore critico che impone la disconti-

nuità stessa, l'altro invece per valori abbastanza piccoli della capacità e opportunamente grandi della resistenza rispetto al valor critico che impone la discontinuità.

L'aver sorpreso una differenza sostanziale tra i due tipi esterni di scariche discontinue è grande merito del Valle, se si considera che, se si toglie la maggior frequenza della scarica di seconda specie rispetto a quella di prima specie, altre modificazioni sostanziali tra i due tipi non si rivelano né allo specchio rotante, né al telefono: fenomenologicamente l'esistenza di una differenza tra i due tipi di scarica è più che altro convalidata dalla circostanza che, analogamente a quanto avviene per i regimi idraulici, non si può passare dall'uno all'altro tipo senza attraversare stati intermedi nei quali la corrente si organizza a gruppi di scariche labili che sembrano partecipare simultaneamente dell'uno e dell'altro tipo.

Queste acute osservazioni fenomenologiche ebbero poi, da parte dello stesso Valle, una brillante conferma interpretativa, attraverso la scoperta e lo studio dell'isteresi ionica, per la quale, mentre nella scarica di prima specie l'ionizzazione residua di ogni singola scarica è praticamente estinta quando la successiva s'inizia, nel secondo tipo questa condizione non avendo luogo, la ionizzazione lasciata da ogni scarica partecipa alla scarica successiva e quindi influisce su tutto l'andamento della corrente elettrica.

A lungo e a più riprese il Valle studiò questi fenomeni della isteresi ionica, determinando la «durata di rimanenza» e indagandone gli effetti secondari, tra cui quello della dipendenza del potenziale di scarica dalla frequenza della scarica discontinua.

L'interpretazione di questa circostanza, il concetto di deformazione del campo elettrico per effetto della carica spaziale lasciata da ogni singola scarica, e la scoperta, dal Valle stesso conseguita, nel 1922, dello spazio oscuro della colonna positiva (detto poi spazio oscuro del bagliore di Townsend), fanno del Valle un anticipatore di risultati conseguiti poi nel 1926 dal Rogowsky nella sua revisione dei lavori del Townsend, basata sul concetto di carica spaziale, e dettero all'Holm lo spunto per una prima corretta interpretazione funzionale della scarica di Geiger.

Sempre nel campo delle ricerche sulla scarica, il Valle determinò inoltre l'ordine di grandezza del tempo di rimanenza, studiò l'effetto di temperatura, a densità costante, del gas ove ha luogo la scarica, riconoscendo, oltre al conseguente aumento della corrente di alimentazione, il passaggio dalla scarica discontinua di prima specie a discontinua di seconda specie e infine da discontinua di seconda specie a continua; il quale passaggio è dovuto ad una progressiva diminuzione del tempo di rimanenza ed è collegato ad una costante contrazione della colonna positiva.

Con successive e ancor più vaste indagini sperimentali, durate anni e anni, dei problemi relativi alla scarica, e svolte soprattutto seguendo la dipendenza del tempo della scarica a bagliore alle varie pressioni, il Valle raggiunse infine, nel 1928, quel ben noto diagramma, detto appunto «diagramma teorico del Valle» che, riportato in vari trattati, è ancor oggi sostanzialmente

alla base di ogni studio circa le fasi stazionarie e transitorie della scarica elettrica nei gas. Nel 1933 poi egli affronta la determinazione delle leggi quantitative della scarica a bagliore e ne stabilisce le principali proprietà in dipendenza dalla pressione del gas, dalla capacità del circuito e dalla corrente di alimentazione.

Torna ancora sull'argomento nel 1935 con più raffinata tecnica sperimentale, studiando col Gawhen i fenomeni d'isteresi anche nelle caratteristiche dinamiche della scarica a bagliore rappresentata sempre nel piano del suo diagramma.

Infine negli ultimi anni della sua vita, studiò teoricamente e sperimentalmente l'andamento del potenziale di scarica in campo magnetico trasversale, indicando le variazioni che subisce il diagramma di Paschen al crescere della intensità del campo.

Purtroppo la morte gli ha impedito di proseguire questi studi per i quali aveva in mente nuovi esperimenti e nuove prove da svolgere.

\* \* \*

Altro campo di ricerche coltivate dal Valle fu quello dei fenomeni di Wiedemann o del tipo di quelli di Wiedemann.

A tale proposito ricorderò anzitutto come egli, nel 1932, studiando l'effetto elettrotorsionalemagnetico di Wiedemann usando corrente alternata, trovasse che, ad ogni inversione di questa, seguiva alla magnetizzazione longitudinale Wiedemann, una lieve magnetizzazione contraria, entrambe rivelate portando i colpi d'induzione, prodotti in un piccolo rocchetto circondante il filo, ad un oscillografo. Il Valle interpretò il fenomeno nella teoria dei domini di Weiss, assegnando l'effetto classico di Wiedemann allo spostamento di pareti separanti i vari domini con magnetizzazione antiparallela e il secondo effetto a rotazioni privilegiate della direzione di magnetizzazione dei singoli domini.

Inoltre il Valle riconobbe l'esistenza di un fenomeno, del tipo magnetomagnetico, che può essere interpretato al solito nella schematizzazione dei domini di Weiss, e che, data la potenza dei moderni amplificatori, permette di rivelare anche piccole magnetizzazioni longitudinali del filo. Di qui la possibilità, attuata dal Valle stesso nel 1939, di costruire un magnetometro particolarmente semplice.

Ed io sono veramente lieto che l'invito, rivolto alla Società Italiana di Fisica dalla consorella francese, di partecipare nel prossimo giugno all'Esposizione di strumenti e apparecchi di Fisica alla Sorbona, permetta di presentare, tra le altre cose italiane, questo nuovo apparecchio, che giustamente può fregiarsi del nome di « magnetometro Valle ».

\* \* \*

Un gruppetto di lavori assai eleganti compiuti dal Valle riguarda la questione, ben nota e ben spinosa, dei suoni interrotti incoerenti di Seebeck. L'indagine è svolta sia per via teorica sia per via sperimentale, propriamente



acustica; e il risultato più importante conseguito è che i suoni interrotti incoerenti di Seebeck, equivalgono al suono interno ottenibile con due sorgenti che diano luogo a battimenti, e come possano quindi ottenersi con un'unica sorgente. Sicché il metodo dei suoni interrotti di Seebeck potrebbe essere senz'altro sostituito a quei metodi sperimentali che, basandosi sulla produzione di battimenti tra due sorgenti sonore distinte, sono stati ideati per la determinazione del campo di risonanza e quindi dello smorzamento dei risonatori dell'orecchio.

\*  
\* \* \*

Di contro a tutti i lavori che ho ricordato, i quali sono sostanzialmente di ricerca fenomenologica, sorretta, ove occorra, da trattazione analitica interpretativa, stanno quelli strettamente critici relativi all'ottica dei corpi in moto.

Il Righi, nelle sue quattro ben note memorie sull'interpretazione dell'esperimento di Michelson, aveva creduto poter provare che la consueta previsione classica di un risultato positivo dell'esperimento stesso, è dovuta al trascurare alcuni dati accessori sperimentali; ma che essa, tenendo conto di questi, conduce invece e proprio al risultato nullo dato dall'esperimento.

Il Valle, attraverso un'acuta critica delle memorie del Righi, ne rivelò l'errore; e tolse così quel senso di diffidenza che la grande autorità del fisico bolognese aveva per un momento diffuso sull'esperienza posta a fondamento della teoria di Einstein.

La revisione classica dell'Ottica dei corpi in moto venne poi estesa dal Valle anche ad altri effetti.

Tuttociò a prima giunta può sembrare superfluo e quindi lavoro vano. Ma se si pensa a quanti hanno creduto di dare per via classica una spiegazione dell'esperimento di Michelson e più in generale un'interpretazione dell'Ottica dei corpi in moto, che sia coerente con la fenomenologia, si riconosce che la posizione critica assunta dal Valle, che è unica tra tutti i fisici che si sono occupati della fenomenologia relativistica, è logicamente necessaria; e che il contributo portato è essenziale in quanto, convalidando sostanzialmente i risultati della teoria classica, anche nel caso che questa sia svolta tenendo conto delle minime particolarità sperimentali, mostra i limiti della stessa teoria classica, e ne conferma la sostanziale incapacità alla interpretazione corretta della fenomenologia ottica dei corpi in moto, e quindi, indirettamente, convalida ed avvalora la teoria einsteiniana.

\*  
\* \* \*

Per quanto breve e sommaria voglia essere questa mia rievocazione dell'attività scientifica del Valle, non posso tralasciare di ricordare gli scritti sulla sensibilità fotoelettrica delle lampade al neon in regime di contatore, il lavoro, non solo di pura osservazione sistematica, ma anche di rassegna



sintetica, sul comportamento meteorologico nel parmense, le monografie pubblicate su vari argomenti, tra le quali veramente pregevoli quelle sulle scariche elettriche, sull'ottica elettronica, sul ferromagnetismo.

\* \* \*

Uomo di sorprendente vitalità e strenua energia fino agli ultimi giorni prima della morte; modesto di quella modestia che contraddistingue chi dallo studio è spinto, non a gloriarsi di quanto ha trovato, ma a studiare ancora e a mortificarsi per quanto resta a sapere; discreto e semplice anche dopo i riconoscimenti ufficiali pervenutigli con la nomina alla nostra Accademia, a quella di Torino, a quella di Bologna, al Consiglio della Società Italiana della Fisica, egli non ebbe altro scopo nella sua vita che quello di lavorare per la scienza, per la scuola, per la famiglia.

Integro cittadino, nutrì religioso affetto per la patria, per la sua Trieste; schietto e d'animo aperto, fu circondato da larga schiera di amici; amatissimo della famiglia, si sentiva felice soltanto in seno ad essa, tra la mamma la consorte, il figlio, la nuora e il piccolo Giorgio, sua ineffabile gioia.

Ed oggi, purtroppo, i famigliari, gli amici, la scienza, qui piangono l'immatura sua perdita.

#### ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI G. VALLE (\*)

*Beiträge zur Kenntniss der diskontinuierlichen Entladungen in gasverdünnten Räumen*, «Wien. Ber.», II, 121, 63 (1912).

*Ueber diskontinuierliche Entladungen*, «Wien. Ber.», II, 123, 1753 (1914).

*Ueber die charakteristischen Kurven der Glimmentladung*, «Wien. Ber.», II, 127, 1339 (1918).

*Sulle curve caratteristiche della scarica a bagliore*, «N. Cimento», 18, 155 (1919).

*Le scariche discontinue in rapporto allo studio generale delle scariche elettriche*, «N. Cimento», 18, 205 (1919).

*Sulla teoria dei suoni interrotti incoerenti*, «N. Cimento», 19, 245 (1920).

*Sui suoni interrotti incoerenti*, «Rend. R. Acc. Lincei», 1, 268 (1920).

*Sull'effetto dell'aumento della temperatura sulle scariche discontinue*, «Ann. scient. ind.», 1,

*Sull'aspetto della colonna positiva nelle scariche discontinue di seconda specie*, «N. Cimento», 23, 243 (1922).

*Sulla relazione esistente fra i vari fenomeni delle scariche elettriche, che si manifestano a differenti pressioni*. Trieste 1922.

*Sull'effetto dell'aumento di temperatura sulle scariche elettriche discontinue*, «N. Cimento», 25, 87 (1923).

*Fotografie di scariche elettriche con la colonna positiva in moto*, «N. Cimento», 1, 99 (1924).

*Complementi alla teoria del Righi sull'esperienza di Michelson*, «N. Cimento», 2, 39 (1925).

*Questioni riguardanti l'ottica nei sistemi in moto*, «N. Cimento», 2, 20 (1925).

*Ueber die Zündspannung der Glimmentladung, zugleich Bemerkungen zu H. Geffckens Arbeit, «Zündspannung und Stabilität der Glimmentladung»*, «Physik. Zeitschr.», 26, 495 (1925).

(\*) A cura del prof. G. C. DALLA NOCE.

- Le leggi della riflessione nei sistemi in moto*, «N. Cimento», 3, 33 (1926). (In collaborazione con G. Fiegna).
- Die diskontinuierlichen Entladungen*, «Physik. Zeitschr.», 27, 473 (1926).
- Onde stazionarie nei sistemi in moto ed effetto Doppler*, «Atti R. Acc. Scienze Torino», 62, 185 (1927).
- Diagramma teorico delle fasi stazionarie e transitorie della scarica elettrica nei gas*, «N. Cimento», 5, 195 (1928).
- Sull'interpretazione dei fenomeni acustici cui danno luogo i suoni di Seebeck*, «Ann. R. Liceo Asti», 43 (1929).
- Scariche elettriche discontinue in tubi a vuoto alimentati dalla corrente di saturazione di un diodo*, «Note e Memorie sulle Radiocomunicazioni; Comitato Radiotelegrafico del Consiglio Naz. delle Ricerche», 2, 317 (1930).
- Ricerche sperimentali sulla scarica a bagliore*, «Rendicond. R. Acc. Lincei», 13, 395 (1931).
- Sul valore massimo che raggiunge l'intensità della corrente al principio d'una scarica*, «N. Cimento», 8, 194 (1931).
- Ricerche e vedute moderne sulle scariche elettriche nei gas*, Conferenza tenuta il 9 marzo 1931 nella Facoltà di Scienze dell'Università di Torino; Torino 1931.
- Teoria dell'accensione della scarica a bagliore*, «Atti Soc. Ital. Progr. Sc., XX Riunione», Milano, settembre 1931.
- Scariche elettriche; Misure elettriche*, Voci della *Enciclopedia Italiana Treccani*.
- Ueber die Zündung der Glimmentladung*, «Ann. d. Physik», 13, 732 (1932).
- Ueber die Wirkung schon vorhandener Raumladungen auf die Zündspannung und das Aussehen einer Entladung*, «Arch. Elektrotechn.» (1932).
- Sull'effetto del passaggio di una corrente alternata in un filo ferromagnetico sottoposto a torsione e sull'effetto inverso*, «Atti R. Acc. Scienze Torino», 67, 319 (1932).
- Sulla liberazione di elettroni da un metallo per opera dei raggi canale più lenti*, «Atti R. Acc. Scienze Torino», 67, 490 (1932).
- Ioni e mezzi ionizzati. - Leggi e processi di ionizzazione*. «Atti A.E.I., XXXVII Riunione A.E.I., Firenze», settembre 1932.
- Il microscopio elettronico*, «Elettronica, Giornale ed Atti A.E.I.», 20 (1932).
- I gas come conduttori*, «Atti A.E.I., XXXVII Riunione A.E.I.», Sorrento, settembre 1933.
- I problemi dell'atmosfera*. Discorso tenuto il 5 novembre 1933 alla R. Università di Ferrara. Ferrara 1933.
- L'elettrone*, Discorso tenuto il 6 novembre 1933 alla R. Università di Parma. Parma, 1934.
- Full Period Effect in Miller's Ether Drift Experiment*, «Nature», 133, 758 (1934).
- Sulla sensibilità fotoelettrica delle lampadine al neon in regime di contatore*, «La Ricerca Scientifica», 11, 19 (1934). (In collaborazione con Biagio Rossi).
- Fenomeni d'isteresi nelle caratteristiche dinamiche della scarica a bagliore*, «La Ricerca Scientifica», 11, 281 (1934). (In collaborazione con H. Gawhen).
- Hysteresiserscheinungen bei dynamischen Charakteristiken der Glimmentladung*, «Naturwissenschaften», 22, 792 (1934). (In collaborazione con H. Gawhen).
- Potenziale e ritardo di scarica nelle lampadine al neon fotosensibili*, «N. Cimento», 11, 663 (1934).
- Lampadine al neon in regime di contatore. I. Limite del campo di sensibilità fotoelettrica* «N. Cimento», 11, 708 (1934).
- Sviluppo nel tempo del fulmine lineare*. Nono Rapporto Annuale, «Osserv. Meteorologico della R. Università di Parma». Parma 1935.
- I fondamenti dell'elettronica nella fisica moderna*, «N. Cimento», 12, 171 (1935).
- Lampadine al neon in regime di contatore. II. Potenziale e ritardo di scarica. Processi di estinzione e di riaccensione*, «N. Cimento», 12, 426 (1935).
- Sulla dinamica delle scariche elettriche non stazionarie nei gas. Fenomeni di isteresi nelle caratteristiche dinamiche della scarica a bagliore*, «N. Cimento», 12, 473 (1935). (In collaborazione con H. Gawhen).

- Zur Dynamik niestationärer Gasentladung*, «Ann. der Phys.», 23, 381 (1935). (In collaborazione con H. Gawhen).
- La camera di Wilson nello studio dei fenomeni preparatori della scintilla*. Decimo Rapporto Annuale; «Osserv. Meteorologico della R. Università di Parma». Parma 1935.
- R. Seeliger, «*Angewandte Atomphysik*». Recensione, «N. Cimento», 15, 567 (1938).
- Sul funzionamento dei contatori a luminescenza*, «N. Cimento», 16, 59 (1939). (In collaborazione con G. Dascola).
- Sul funzionamento dei contatori a luminescenza*, «Memorie R. Acc. Scienze Torino», 69, 199 (1939).
- Le scariche elettriche*, «Scientia», 33, 241 (1939).
- Sulle possibilità di realizzazione di un nuovo dispositivo magnetometrico*, «La Ricerca Scientifica», 10, 569 (1939). (In collaborazione con G. Tribulato).
- Di un nuovo dispositivo magnetometrico a compensazione*, «N. Cimento», 16, 441 (1939). (In collaborazione con G. Tribulato).
- Di alcuni effetti magneto-magnetici e magneto-torsionali in corrente alternata*, «N. Cimento», 16, 515 (1939).
- La nuova sistemazione dell'Istituto di Fisica e dell'Osservatorio Meteorologico della R. Università di Parma*. Dodicesimo e Tredicesimo Rapporto annuale; «Osserv. Meteorologico R. Università di Parma». Parma 1939.
- Il ferromagnetismo*, «N. Cimento», 17, 74 (1940).
- Di alcuni effetti magneto-magnetici e magneto-torsionali in corrente alternata*, «Atti Soc. Ital. Progr. Sc. XXVIII Riunione», Pisa, ottobre 1939.
- Di un nuovo dispositivo magnetometrico a compensazione*, «Atti Soc. Ital. Progr. Sc., XXVIII Riunione», Pisa, ottobre 1939. (In collaborazione con G. Tribulato).
- Untersuchungen über die Dynamik der Glimmentladung und des Zähleffektes in Glimmröhren*, «Phys. Zeitschr.», 43, 473 (1942).
- Proprietà magnetiche ed elastiche dei ferromagnetici*, «Scientia», 39, 9 (1945).
- Magnetometro a compensazione a filo caldo ferromagnetico*. Quindicesimo-Ventunesimo Rapporto annuale; «Osserv. Meteorologico R. Università di Parma, Parma 1947.
- Conduzione elettrica nei gas*, «Il Filomate», 1 (1948).
- Sulla teoria dell'accensione della scarica elettrica in campo magnetico trasversale*, «N. Cimento», 7, 174 (1950).
- La vita e l'opera di Augusto Righi*, «Suppl. al N. Cimento», 8, 19 (1951).
- Teoria della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici coassiali in campo magnetico trasversale*, «N. Cimento», 9, 145 (1952).

\* \* \*

- Acustica*, Vol. II del *Trattato di Fisica* di Battelli e Cardani, Milano 1928.
- Lezioni di Fisica Superiore tenute nella R. Università di Torino*. Vol. I, II, III, V, VI, VIII, X. Torino 1922-1932.
- Lezioni di Fisica Superiore tenute nella R. Università di Bologna*. Parma 1949. (In collaborazione G. C. Dalla Noce).
- Scelta di scritti di Augusto Righi*. Bologna 1950. (In collaborazione con G. C. Dalla Noce).
- Corso di Fisica Sperimentale tenuto all'Università di Bologna*. Vol. I, II. Bologna 1953.
- Elettrostatica*. Monografia preparata per le «Questioni di Fisica» di G. Bernardini, G. Gentile j., G. Polvani, e rimasta inedita.

## CONGRESSI

Il Presidente ricorda ai Colleghi che nella riunione con gli « Amici dell'Accademia », tenuta nel mese di giugno 1954, i rappresentanti della Società Adriatica di Elettricità (S.A.D.E.) proposero che l'Accademia, d'intesa con la predetta Società, organizzasse un Convegno sul tema: « I modelli nella tecnica », da tenersi in Venezia, nell'autunno del 1955, nel quadro delle varie manifestazioni che avranno luogo in detta città in occasione del cinquantenario della fondazione della S.A.D.E. Il Consiglio di Presidenza nominò, con l'incarico di organizzare tale Convegno, una Commissione, presieduta dallo stesso prof. Giordani, e composta dai Soci Crocco, De Marchi, Perucca, Picone, Signorini e Vallauri e dagli Ingg. Semenza e Tonini, in rappresentanza della S.A.D.E. La Commissione ha tenuto diverse riunioni e il Presidente Giordani desidera ora mettere al corrente i Soci dei lavori svolti dalla Commissione stessa e del programma della manifestazione.

Il Convegno, che avrà luogo a Venezia, nei primissimi giorni del mese di ottobre, sarà inaugurato con un discorso introduttivo del Socio Signorini sul tema: « Origini e direttive delle teorie dei modelli ». I lavori sono stati così suddivisi:

## Sezione I - Relazione generale su i « Modelli idraulici ».

## Relazioni di settore:

- a) « Modelli nell'idraulica fluviale ».
- b) « Modelli navali ».
- c) « Modelli di moti ondosi ».
- d) « Modelli di macchine idrauliche ».
- e) « Modelli di correnti di densità ».
- f) « Modelli di opere marittime ».
- g) « Modelli di correnti a pelo libero ».
- h) « Modelli di correnti rapide ».
- i) « Modelli idrodinamici di correnti in pressione ».
- l) « Modelli idrodinamici in presenza di aria ».

## Sezione II. - Modelli aerodinamici.

## Parte I. - Relazione generale su i « Modelli aerodinamici ».

## Relazioni di settore:

- a) « Modelli in aerodinamica subsonica ».
- b) « Modelli in aerodinamica transonica ».
- c) « Modelli in aerodinamica supersonica ».
- d) « Modelli in aerodinamica ipersonica ».
- e) « Modelli in aeroelasticità ».
- f) « Modelli di macchine a fluido ».

Parte II. — Relazione generale su i «Modelli termogasdinamici».

Relazioni di settore:

- a) «Modelli in termogasdinamica».
- b) «Modelli in termoelasticità».

Sezione III. — Relazione generale su i «Modelli strutturali».

Le relazioni di settore tratteranno l'attività svolta nelle diverse Nazioni in questo campo.

Sezione IV. — Relazione generale su i «Modelli acustici e fotometrici».

Relazioni di settore:

- a) «Modelli per lo studio della diffusione e distribuzione sonora».
- b) «Modelli di teatri ed auditori».
- c) «Modelli di propagazione e teatri all'aperto».
- d) «Modelli fotometrici».

Sezione V. — Relazione generale su i «Modelli elettrici».

Relazioni di settore:

- a) «Modelli di trasformatori».
- b) «Modelli di reti».
- c) «Modelli di antenne».
- d) «Vasche elettrolitiche».
- e) «Calcolatrici analogiche».

Sezione VI. — Relazione generale su i «Modelli analogici».

Relazioni di settore:

- a) «Modelli analogici nella meccanica applicata».
- b) «Modelli analogici nell'elasticità».
- c) «Modelli analogici in aerodinamica».
- d) «Modelli nella cibernetica».
- e) «Modelli elettrici di equazioni».
- f) «Modelli analogici di fenomeni termici».
- g) «Modelli analogici del comportamento dinamico dei reattori nucleari».
- h) «Modelli analogici nell'idraulica».

Sezione VII. — Relazione generale su i «Modelli nell'economia della tecnica».

Le relazioni di settore riguarderanno le diverse industrie.

Per ciascuna Sezione si è provveduto a invitare un certo numero di relatori, ad ognuno dei quali verrà assegnata la trattazione di un determinato settore, mentre altri studiosi sono stati pregati di svolgere le relazioni generali per ognuna delle singole Sezioni.

Si ha ragione di ritenere che sarà possibile assicurare una larga partecipazione al Convegno di studiosi italiani e stranieri, molti dei quali americani, grazie soprattutto alla munificenza della S.A.D.E., che si è assunta l'onere finanziario dell'importante manifestazione.

Il prof. Giordani, nella certezza di interpretare gli unanimi sentimenti dei Colleghi, invia alla S.A.D.E. e al suo Presidente, Conte Cini, un vivo ringraziamento.

La Classe si associa con un vibrante applauso.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Giordani è lieto di annunciare che il Collega Giorgio Dal Piaz, aderendo alle sue vive preghiere, ha accettato di commemorare il compianto Socio Fabiani e che i Colleghi Gortani, Edoardo Amaldi e Natta hanno assicurato di commemorare rispettivamente i compianti Soci Feruglio, Fermi e M. G. Levi. Tali commemorazioni avranno luogo, nell'ordine, nei prossimi mesi di febbraio, marzo e aprile.

Il Presidente informa poi la Classe che il Consiglio di Presidenza, accogliendo una proposta presentata in tal senso dai Soci U. Amaldi e Chisini, ha deliberato di onorare la Memoria di Federico Enriques, promuovendone, per il 1956, nella ricorrenza del primo decennio dalla scomparsa del sommo matematico, la pubblicazione delle memorie geometriche. È stato costituito, a tal fine, un Comitato, presieduto dallo stesso prof. Giordani e composto dai Soci U. Amaldi, Chisini, Bompiani, Segre, Severi e dal prof. Luigi Campedelli dell'Università di Firenze.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Vernoni presenta il volume I del suo «Trattato di Patologia Generale» e osserva che tale opera si presenta con alcune caratteristiche diverse da quelle proprie di una trattatistica normale com'è comunemente intesa. Infatti, mentre un trattato, formalmente considerato, dovrebbe contenere una esposizione obiettiva della materia, nel libro del Socio Vernoni l'esposizione è in gran parte strettamente soggettiva, essendo spesso l'espressione di idee, concetti e di apprezzamenti personali.

Il prof. Vernoni ricorda che egli ha dedicato gli ultimi anni della sua attività universitaria al completamento di tale trattato, che vede la luce quando egli ha già abbandonato l'insegnamento ufficiale, per lasciare un documento non del tutto effimero della sua lunga attività didattica, documento che egli confida possa rappresentare una specie di messa a punto dello stato della patologia generale alla metà di questo secolo, nel momento cioè che corrisponde a una sosta nel progresso della patologia sperimentale che, negli ultimi cento anni, si è evoluta con incredibile rapidità. Oggi ci troviamo in una fase di arresto che prelude indubbiamente a una prossima ripresa e il Socio Vernoni auspica che tale ripresa possa avvenire, a parte ogni innovazione tecnica e conseguenti possibilità di nuove acquisizioni, grazie a nuovi indirizzi che menti originali o geniali, su base prima intuitiva che sperimentale, aprano all'indagine e alle conoscenze nel campo della biologia normale e patologica.

Il prof. Vernoni spera che la sua opera non sia del tutto inutile e confida di poter presentare entro quest'anno il II volume del Trattato.

Il Presidente e tutti i Soci rivolgono al Collega Vernoni un affettuoso applauso.

Il Socio Andreatta presenta una copia della monografia sulla Val di Peio e la Catena Vioz-Cevedale e ne illustra ampiamente il contenuto con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare una copia della monografia sulla Val di Peio e la Catena Vioz-Cevedale. Si tratta di un lavoro geologico-petrografico e minerario con carattere petrotettonico, già iniziato con rilevamenti sul terreno nel 1937 e concluso solo ora con la stampa resa possibile per i generosi contributi del C.N.R.

« Oltre alle descrizioni della giacitura, della costituzione, della petrografia e del chimismo delle tre fondamentali formazioni della Val di Peio e delle valli confluenti, ho voluto dare nel lavoro particolare risalto alle deduzioni di carattere petrotettonico. Dallo studio delle tre formazioni delle filladi quarzifere, dei parascisti di meso-epizona e dei parascisti di catazona, queste ultime separate dalle altre due da una potente lamina di miloniti della linea di Peio, ho potuto ricostruire con precisi e multipli dati di fatto la complessa storia geologica delle tre formazioni.

« Si tratta di nove distinte fasi petrogenetiche sicuramente documentate e di una o due altre fasi molto probabili. Le formazioni portano l'impronta di due fondamentali metamorfismi corrispondenti rispettivamente ai corrugamenti caledoniano ed ercinico e di almeno tre fasi di manifestazioni magmatiche alternate alle fasi di metamorfismo. Il corrugamento alpino ha prodotto l'accavallamento dei complessi delle filladi e dei parascisti m.-e. da una parte e dei parascisti di catazona dall'altra ed ha lasciato nelle tre formazioni solo tracce di una milonisi talora più o meno sanata da tardive cristallizzazioni. La fase di compressione massima del corrugamento alpino è stata seguita da una distensione accompagnata da fratturazioni nelle quali circolarono per lungo tempo le soluzioni di mobilizzazione metamorfica tettonica.

« Vorrei far notare che ho potuto trarre anche diverse conclusioni di carattere generale e non puramente regionale: tali sono l'identificazione di miloniti ritenute in precedenza sedimenti clastici del verrucano, l'attribuzione del metamorfismo fondamentale delle filladi al corrugamento ercinico, la sovrapposizione di diversi quadri cinematici attribuibili singolarmente ai diversi corrugamenti e la precisazione di diverse modalità nella mobilizzazione e nella circolazione di materia durante i metamorfismi tettonici. Circa la sovrapposizione di diversi quadri cinematici nelle rocce polimetamorfiche, devo in particolare fare notare che è un errore rilevare sul terreno direzioni o vettori di tali quadri e fonderli in unica sintesi, come attualmente si tende a fare in certe ricerche petrotettoniche, mescolando elementi appartenenti a distinte fasi della complessa storia geologica di questi scisti polimetamorfici ».

Il Socio Bompiani presenta il volume, ciclostilato a cura dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma, del prof. Kentaro Yano, dal titolo

«Gruppi di trasformazioni in spazi geometrici differenziali», osservando che tale studio è estremamente interessante perché illustra gli importanti risultati moderni conseguiti dal predetto professore e dalla scuola giapponese nel campo della geometria degli spazi di Riemann, a connessione e di Kaehler e, in particolare, sui gruppi di movimenti.

Presenta poi l'opera del Collega Tricomi sulle «Funzioni ipergeometriche confluenti», che costituisce il 1° volume della nuova collezione «Monografie matematiche». Tale collezione, dopo una lunga interruzione, è stata ora ripresa, a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche, appunto con il lavoro del prof. Tricomi, che dà conto di molte importanti ricerche effettuate dall'Autore stesso.

Il Socio Polvani presenta il fascicolo n. 2 (pp. 163-498) del *Supplemento* al volume XII, serie IX, 1954, di *Il Nuovo Cimento*, che contiene i «Rendiconti del Congresso Internazionale sulle particelle instabili pesanti e sugli eventi di alta energia nei raggi cosmici», svoltosi a Padova dal 12 al 15 aprile 1954. Il fascicolo, che si apre con una introduzione del Socio Rostagni, al quale va il merito dell'organizzazione del Congresso, si compone di dieci Sezioni e di una Appendice.

Le Sezioni rispecchiano fedelmente e in forma critica la situazione nella quale erano, nell'aprile del 1954, le questioni che sono state oggetto delle discussioni di Padova. In particolare sono da mettere in rilievo, per la loro importanza, i sei rapporti contenuti nella Sezione IX, i quali non sono opera di singoli relatori, ma di vari Comitati internazionali, costituiti con il compito di collazionare i risultati numerici relativi alle varie particelle osservate e riferirne nella seduta finale, nella forma più adatta alla discussione e alla valutazione comparativa.

Inoltre la Sezione X contiene le proposte generali per la normalizzazione delle misure relative agli eventi osservati in emulsioni fotografiche. A queste proposte fanno rispecchio quelle, della Direzione del giornale, presentate nelle «Avvertenze», della Sezione I, circa l'unificazione delle abbreviazioni, dei simboli, delle sigle, delle notazioni che più frequentemente ricorrono nella descrizione qualitativa e quantitativa degli eventi nucleari e particolarmente di quelli sorpresi proprio in emulsioni fotografiche.

Infine l'Appendice fornisce una ampia relazione illustrativa delle due spedizioni, effettuate in Sardegna nel 1952 e 1953, per le ricerche sulla radiazione cosmica in alta atmosfera.

Il Socio Polvani presenta poi il fascicolo n. 1 (pp. 1-276) gennaio 1955, del volume I, serie X di *Il Nuovo Cimento*, il quale fascicolo ha questo di singolare, di segnare l'inizio del secondo secolo di vita del giornale stesso. - Questo, fondato nel 1855 da C. Matteucci e R. Piria, professori all'Università di Pisa, ha seguito passo passo la storia della Fisica italiana, onorandosi della collaborazione di tutti i più grandi fisici italiani. Oggi il giornale, che ha voluto nella sua nuova copertina richiamarsi alla colleganza ideale con l'antica Accademia del Cimento, fregiandosi dell'insegna di questa, ha acquistato un carattere internazionale, come può attestare il fascicolo presen-

tato, dove, su sedici articoli originali, ben quattordici sono di stranieri, tra i quali i Premi Nobel Schrödinger, Dirac, De Broglie, Hess.

Nel considerare la posizione di merito acquistata dal giornale nella scienza internazionale, il Socio Polvani prende occasione per esprimere sia la sua profonda gratitudine verso i suoi collaboratori, sia la gratitudine di tutti i fisici italiani verso coloro, enti e persone – e sono molti – che in un modo o in un altro, ma tutti con alto senso di comprensione e di affetto, hanno aiutato e aiutano, hanno sostenuto e sostengono, materialmente e moralmente, *Il Nuovo Cimento*, tra i quali desidera particolarmente ricordare il Consiglio Nazionale delle Ricerche e il Comitato Nazionale per la Fisica e, personalmente, i Colleghi Colonnetti e Perucca.

Il Socio Polvani chiude la sua presentazione formulando il voto che il giornale possa sempre mantenere alto in tutto il mondo, il nome della nostra scienza.

Il Presidente Giordani si congratula vivamente con il Collega Polvani e ne ricorda le alte benemerienze, per le quali tutti i fisici gli debbono essere grati.

Il Presidente ringrazia poi tutti i Soci che hanno presentato opere.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Beccari, Natta, Segre, Bompiani, Tonzig, Semerano, Margaria, Armellini e Montalenti.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CURTI R. e LOCCHI S. – Ulteriori ricerche sulla riduzione di N-ossidi del gruppo delle Azine. Nota III (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

Il Socio Tonzig presenta una Memoria dal titolo: « Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico-XII. Rapporto tra effetto dell'acido ascorbico sulla respirazione e la sua attività quale inibitore dell'accrescimento ».



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta dal 15 gennaio 1955*

- AMERIO Luigi. — *Questioni di analisi funzionale*. Lezioni raccolte dal Dr. Guido Bortone. Roma, Istituto Matematico, 1954. Pp. 67, in-4° (In litografia).
- ANDREATTA Ciro. — *La Val di Peio e la catena Vioz-Cevedale*. Studio geo-petro-tettonico e minerario di una parte del massiccio dell'Ortles. Bologna, Società Tipografica Mareggiani, 1954. Pp. 336, in-8°, con figg. (Acta Geologica Alpina, n. 5).
- BOMPIANI Enrico. — *Preliminari di geometria iperspaziale*. Roma, Istituto Matematico, 1953. Pp. IV-200, in-4° (In litografia).
- CARRETTA Umberto. — Vedi: MAMELI Efisio e CARRETTA Umberto.
- COLANGELI CESARE. — *Materia — Radiazione — Gravitazione. Universo meccanico*. Milano, Hoepli, 1954. Pp. III, in-8°.
- Colloque Junius Massau tenu à Mons et Gand les 26 et 27 avril 1952. Estr. da «Mémoires de l'Académie Royale de Belgique», Classe des Sciences, collection in-8°, t. XXVIII, n. 6 (Comité National de Mécanique théorique et appliquée).
- COPPADORO Angelo. — *VII Congresso Nazionale di Chimica*. Genova 30 maggio-5 giugno 1954. Estr. da «La Chimica e l'Industria», a. XXXVI, 1954.
- CUGIANI Marco. — *Cenni sulla teoria della distribuzione*. S. n. t. Pp. 15, in-4° (In litografia).
- FANTAPPIÉ Luigi. — *I funzionali analitici e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali*. Appunti raccolti da F. Succi. Roma, Istituto Matematico, 1954. Pp. 77, in-4° (In litografia).
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE D'ASSOCIATIONS NATIONALES D'INGÉNIEURS. — *I<sup>er</sup> Congrès International des Ingénieurs organisé par l'«Associazione Nazionale Ingegneri ed Architetti Italiani (ANIAI)»*. Rapports au Congrès de Rome e Rapport sommaire. Roma, 1953. Pp. 102, in-4° e 78, in-8°.
- GILBERT Bruce W. — *Shore scleroscope hardness made on Mohs' scale minerals from Talc to Quartz, inclusive*. Urbana, University of Illinois, 1954. Pp. 23, in-8°.
- GUARINO E. — *Progetto di un nuovo calendario solare*. Sampierdarena, Tip. R. Tucci, 1954. Pp. 4, in-8°.
- LICHNEROWICZ André. — *Geometria differenziale in grande. Gruppo d'olonomia e omologia*. Roma, Istituto Matematico, 1954. Pp. 132-VI-4, in-4° (In litografia).
- LORCH Edgar R. — *Anelli normali*. Appunti raccolti da D. Del Pasqua. Roma, Istituto Matematico, 1954. Pp. 33, in-4° (In litografia).
- *La teoria delle trasformazioni lineari negli spazi di Banach*. Lezioni tenute presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Roma, 1953-54. Pp. 67, in-4° (In litografia).
- MAMELI Efisio e CARRETTA Umberto. — *Due secoli di indagini fisiche e chimiche sulle acque minerali ipertermali, sui fanghi e sui gas euganei*. Estr. da «Memorie dell'Accademia Patavina di Scienze, Lettere ed Arti», vol. LXVI, 1953-1954.
- MASSAU Junius. — *Appendice au mémoire sur l'intégration graphique et ses applications*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890. Pp. 264, in-8°, con tavv.
- *Leçons de mécanique rationnelle*. T.I: *Géométrie vectorielle-statique*. T.II: *Cinématique. Compléments concernant certaines questions étudiées précédemment*. Gand, Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales, 1911-1913. Voll. 2, in-8°, con figg.
- *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles*. Mons, G. Delporte, s. d. Pp. 152, in-8° (Édition du Centenaire par les soins du Comité National de Mécanique).



- NOORDHOFF P. — *Wiskundige tafels in 5 decimalen*. Groningen, 1953. Pp. VIII-272, in-8°.
- Il Nuovo Cimento*. S. 9<sup>a</sup>, suppl. n. 2. al vol. XII, 1954 e s. 10<sup>a</sup>, vol. I, 1955, n. 1.
- RIZZA Giovanni Battista. — *Teoria delle funzioni monogene nelle algebre complesse commutative dotate di modulo*. Roma, Istituto Matematico, 1954. S. n. t. Pp. 15, in-4° (Primo corso. Varenna, 17 giugno 1954) (In litografia).
- ROSEN Edward. — *Did Galileo claim he invented the telescope?* Estr. da «Proceedings of the American Philosophical Society», vol. XCVIII, 1954, n. 5.
- SCIMONE Giovanni. — *Sinfonia cosmica*. Trieste, Ed. Libreria Sirio, 1954. Pp. 115, in-8°.
- TRICOMI Francesco G. — *Funzioni ipergeometriche confluenti*. Roma, Edizioni Cremonese, 1954. Pp. XIII-309, in-8°, con figg. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie Matematiche, 1).
- VERNONI Guido. — *Trattato di patologia generale*. Vol. I. Firenze, Sansoni, 1954. Pp. XIII-1442, in-4°, con figg. e tavv.
- YANO Kentaro. — *Gruppi di trasformazioni in spazi geometrici differenziali*. Roma, Istituto Matematico, 1953-54. Pp. 281, in-4° (In litografia).

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 febbraio 1955

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

## NOTE DI SOCI

**Geometria algebrica.** — *Sugli antigheneri d'una varietà algebrica.* Nota (\*) del Socio FRANCESCO SEVERI.

La Nota del prof. Erich Kähler dell'Università di Lipsia<sup>(1)</sup>, che presento insieme a questa, mi dà l'occasione di tornare sulla nozione di anti-genere d'una varietà, considerata in precedenti miei lavori<sup>(2)</sup>; e di esporre intorno ad essa talune conseguenze sulle superficie algebriche.

1. Sia  $V$  una varietà algebrica irriducibile (non singolare) di dimensione  $n$ . È ben noto<sup>(3)</sup> che se  $|C|$  è un sistema lineare di ipersuperficie su  $V$  e  $|C'|$  il sistema aggiunto a  $|C|$ , il sistema  $|C' - C|$  è indipendente da  $|C|$  e invariante per trasformazioni birazionali regolari di  $V$ . È il sistema canonico impuro  $|K|$  della varietà. La sua dimensione aumentata di 1 è il genere geometrico  $P_n^g$  di  $V$ , ed è un invariante assoluto per ogni trasformazione birazionale della varietà. L'annullarsi di  $P_n^g$  caratterizza le varietà sulle quali  $|K|$  è soltanto virtuale.

(\*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) *Tensori razionali di 1<sup>a</sup> specie sopra una varietà algebrica*, questo fascicolo, p. 151.

(2) SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche geometriche sopra una superficie e sopra una varietà*, «Memorie della R. Accademia d'Italia», 1932, n. 27. Ivi il sistema anticanonico è così denominato per la prima volta e considerato per stabilire una proprietà aritmetica della varietà che B. Segre ha chiamato di Severi-Brauer. Ved. inoltre: SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Seconda Memoria), «Annali di Matematica», 1951, n. 9. (Nel riferire gli elementari esempi dell'Osservazione finale di questo numero è sfuggita qualche inessenziale imprecisione ovviamente rettificabile). Il sistema  $|C - C'|$  (cioè il sistema anticanonico) interviene prima incidentalmente in una Memoria di Castelnuovo del 1897 (ved. in seguito una più precisa citazione in proposito).

(3) *Fondamenti* (citati) § 2.

La dimensione di  $|K|$  è assolutamente invariante; non così il sistema  $|K|$  stesso. Se  $P_n^g > 0$ , di  $|K|$  fanno parte, quali componenti fisse, le ipersuperficie eccezionali esistenti su  $V$  (necessariamente in numero finito); il sistema, depurato da tali eventuali componenti, riducesi al sistema canonico puro  $|K^*|$ , che è invariante assoluto. Le ipersuperficie di  $|K^*|$ , danno i coefficienti delle forme differenziali covarianti di 1<sup>a</sup> specie, appartenenti a  $V$ .

Se  $P_n^g = 0$ , non esiste effettivo il sistema canonico puro e mancano queste forme differenziali.

Il sistema canonico impuro è, come s'è detto, un *invariante relativo* per trasformazioni birazionali, in quanto s'altera per l'introduzione o la scomparsa di qualche ipersuperficie eccezionale. Esso è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali *regolari* (cioè biunivoche senza eccezioni).

2. Il sistema anticanonico (impuro)  $|C - C'|$  può esistere effettivamente soltanto quando il sistema canonico  $|K|$  è virtuale ( $P_n^g = 0$ ) oppure quando  $|K|$ , depurato dalle eventuali componenti fisse eccezionali, equivale allo zero dell'equivalenza lineare (come accade per esempio sopra una varietà di Picard o sopra un'ipersuperficie non singolare d'ordine  $r + 1$  dello spazio  $S_r$ , ecc.). In quest'ultimo caso tanto il genere geometrico quanto i valori massimi dell'antigenere (e degli antiplurigeneri) sono uguali ad 1.

La dimensione del sistema anticanonico, aumentata d'un'unità, è in ogni caso appunto l'*antigenere*, invariante relativo per trasformazioni birazionali, al pari del sistema anticanonico.

Come conseguenza della Nota di Kähler si può affermare che le ipersuperficie effettive  $C - C'$ , quando l'antigenere è  $> 0$ , sono i coefficienti dei tensori razionali di 1<sup>a</sup> specie <sup>(4)</sup>.

Dalla definizione di sistema anticanonico, siccome in uno spazio  $S_r$  il sistema aggiunto al sistema delle ipersuperficie d'ordine  $m$  è quello delle ipersuperficie d'ordine  $m - r - 1$ , segue che il sistema anticanonico di un  $S_r$  è il sistema delle ipersuperficie di ordine  $r + 1$  e quindi l'antigenere vale  $\binom{2r+1}{r}$ .

3. Esaminiamo in modo particolare il caso  $n = 2$ , ossia il caso delle superficie.

Se esiste effettivo sopra una superficie  $V$  il sistema anticanonico  $| - K |$  (lo designeremo più comodamente con  $|H|$ ) e non riducesi allo zero dell'equivalenza lineare, il genere geometrico  $p_g (= P_2^g)$  di  $V$  è certo nullo.

Se il sistema canonico puro di  $V$  è lo zero dell'equivalenza lineare, il sistema anticanonico è ancora lo zero lineare, qualora  $V$  non contenga curve eccezionali, ed allora l'antigenere vale 1. Quando invece  $V$  contiene curve eccezionali (necessariamente di 1<sup>a</sup> specie) il sistema anticanonico è ineffettivo,

(4) Per esempio sopra una superficie iperellittica, uniformizzata dalle variabili  $u, v$ , la  $c/du dv$  ( $c$  costante) è una (l'unica) forma anticanonica di 1<sup>a</sup> specie, mentre  $c du dv$  è una (l'unica) forma canonica da 1<sup>a</sup> specie.

equivale alla somma delle curve eccezionali, cangiata di segno, e l'antigenere vale 0.

Quando  $|H|$  è effettivo e non nullo non esistono in conseguenza neppure i multipli di  $|K|$ , ossia sono nulli tutti i plurigeneri. Sicché la superficie, per un fondamentale teorema di Castelnuovo-Enriques, appartiene alla classe delle superficie razionali o delle superficie rigate.

È per queste ultime classi di superficie che è utile la considerazione dell'antigenere. Si può prevedere che antigenere e antiplurigeneri avranno importanza nello studio della razionalità o unirazionalità di una varietà <sup>(5)</sup>.

Quando il sistema anticanonico esiste esso diminuisce di ogni nuova curva eccezionale di 1<sup>a</sup> specie, se questa non nasce da un suo punto base. Ciò risulta subito dalla definizione. Sicché l'antigenere o diminuisce di 1 o resta immutato.

4. Dimostriamo anzitutto che:

*Le superficie razionali (normali) a curve sezioni razionali hanno tutte l'antigenere  $a = 9$  eccezion fatta pel piano e per la superficie di Veronese, che hanno l'antigenere  $a = 10$ .*

L'affermazione circa la superficie di Veronese, segue senz'altro dal fatto ch'essa è lineare <sup>(6)</sup> e quindi ha lo stesso antigenere del piano.

Se la superficie  $V$  di cui trattasi, a curve sezioni razionali, non è la superficie di Veronese ed ha l'ordine  $m \geq 2$ , per un teorema di Del Pezzo <sup>(7)</sup>, essa è una rigata razionale (normale) dello spazio  $S_{m+1}$ . Per trovare su  $V$  il sistema anticanonico, consideriamo il sistema  $|C|$  delle sue sezioni con le ipersuperficie quadriche di  $S_{m+1}$  e cerchiamo di determinare il sistema aggiunto  $|C'|$ . Poiché  $|C|$  ha il grado (virtuale = effettivo)  $4m$  e il genere (virtuale = effettivo)  $m - 1$ , la sua serie caratteristica è non speciale, epperò la dimensione del sistema completo  $|C|$  vale  $4m - (m - 1) + 1 = 3m + 2$ . La  $C$  è iperellittica, la sua  $g_2^1$  essendovi segata dalle generatrici di  $V$ . Pertanto la serie canonica su  $C$  è ivi staccata dai gruppi di  $m - 2$  generatrici. Il sistema lineare di questi gruppi è dunque il sistema aggiunto  $|C'|$  a  $|C|$  <sup>(8)</sup>. Cerchiamo ora di determinare  $|H| = |C - C'|$ .

All'uopo osserviamo che la dimensione  $d$  del sistema lineare delle ipersuperficie quadriche passanti per  $V$ , essendo  $3m + 2$  la dimensione del sistema segato  $|C|$ , è espressa da

$$d = \binom{m+3}{2} - 3m - 4;$$

(5) Ved. in proposito ROTH, Nota in seguito citata e questi « Rendiconti », t. XII, 1952, p. 265.

(6) Ved. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Lezioni raccolte da F. Conforto ed E. Martinelli), « Edizioni Cremonese, Roma », 1942, p. 21. Le *superficie lineari* o d'ordine invariante relativo 1 son quelle che possono porsi in corrispondenza birazionale senza eccezioni col piano.

(7) Ved., per esempio, BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2<sup>a</sup> ed., Principato, Messina, 1923, p. 398.

(8) Ved. le citate *Serie e sistemi d'equivalenza*, ecc., p. 201.



mentre la dimensione  $d'$  del sistema delle ipersuperficie quadriche passanti per  $m - 2$  generatrici generiche di  $V$ , è espressa da:

$$d' = \binom{m+3}{2} - 3m + 5.$$

Perciò la dimensione del sistema  $|C - C'|$  è data da

$$d' - d - 1 = 8.$$

Così resta provato che l'antigenere di  $V$  è  $a = 8 + 1 = 9$ .

5. Vi sono superficie razionali aventi per antigenere uno qualunque degli interi da 0 a 10? A ciò rispondono i seguenti lemmi a), b):

a) *Una superficie razionale (normale) d'ordine  $m \geq 3$ , a curve sezioni ellittiche, ha l'antigenere uguale ad  $m + 1$ .*

E dunque l'antigenere va da 4 a 10 quando  $m$  va da 3 a 9, che è il massimo valore possibile, per una siffatta superficie, a norma di un altro teorema di Del Pezzo <sup>(9)</sup>.

*Tutte le superficie del teorema a) sono anticanoniche, cioè il sistema lineare delle loro sezioni iperpiane è anticanonico.*

b) *Esistono superficie razionali per le quali l'antigenere assume rispettivamente i valori 0, 1, 2, 3.*

Il teorema a) è ovvia conseguenza del citato teorema di Del Pezzo, secondo cui una superficie  $V$  d'ordine  $m$  normale nello spazio  $S_m$  è una superficie a curve sezioni ellittiche, rappresentata nel piano da un sistema lineare di cubiche per  $9 - m$  punti base oppure, per  $m = 8$ , dal sistema delle quartiche piane con due dati nodi.

Invero, il sistema aggiunto al sistema delle curve sezioni, che hanno la serie canonica d'ordine zero, è lo zero dell'equivalenza lineare, sicché il sistema di quelle sezioni è anticanonico (completo).

Dimostriamo il teorema b).

Consideriamo all'uopo una superficie razionale  $V$  (non singolare, normale) rappresentata sul piano dal sistema lineare delle curve  $C$  di ordine  $m$  (abbastanza alto), passanti per  $v = 10$  o  $v = 9$  punti generici del piano. Il sistema  $|C'|$  è in ambo i casi di curve d'ordine  $m - 3$  non soggette ad alcuna condizione; perciò, se  $|C - C'|$  esiste effettivo, dovrà esistere qualche curva di 3° ordine contenente i punti base. Una tal curva non esiste per  $v = 10$ . La superficie corrispondente non contiene dunque curve anticanoniche; per essa è  $a = 0$ . Invece, quando  $v = 9$ , esiste una ed una sola curva del 3° ordine contenente i 9 punti base; e dunque  $a = 1$ .

Similmente, il sistema delle curve d'ordine  $m$  passanti pei 9 punti base d'un fascio di cubiche dà luogo ad una  $V$  con  $a = 2$  e il sistema delle curve d'ordine  $m$  passanti per 8 punti generici del piano dà luogo ad una  $V$  razionale con  $a = 3$ .

(9) « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », 1887, p. 241.

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — Gli esempi sovra addotti provano già che *se è necessario perché due superficie razionali sieno equivalenti rispetto alle trasformazioni birazionali regolari ch'esse abbiano lo stesso antigenere, la condizione non è per nulla sufficiente.*

Infatti, una quadrica  $V$  di  $S_3$  e la superficie  $\bar{V}$  rappresentata dal sistema delle cubiche piane per un punto hanno lo stesso antigenere 9, ma non sono riferibili in una trasformazione birazionale senza eccezioni, perché  $V$  non contiene curve eccezionali di 1<sup>a</sup> specie, mentre  $\bar{V}$  contiene una retta eccezionale di 1<sup>a</sup> specie; una quadrica e una rigata  $\bar{V}'$  del 3<sup>o</sup> ordine dello spazio  $S_4$  hanno lo stesso antigenere 9 e non son equivalenti per trasformazioni birazionali senza eccezioni, perché la rigata del 3<sup>o</sup> ordine contiene una retta eccezionale di 1<sup>a</sup> specie; ma neppure  $\bar{V}$  e  $\bar{V}'$  sono da questo punto di vista equivalenti, a malgrado che abbiano antigenere 9 e contengano ciascuna una curva eccezionale di 1<sup>a</sup> specie, perché  $\bar{V}'$  contiene un fascio lineare di curve di grado zero, mentre  $\bar{V}$  non lo contiene; i due tipi di superficie anticanoniche di 8<sup>o</sup> ordine non sono equivalenti a malgrado che abbiano lo stesso antigenere 9, perché uno contiene due curve eccezionali di 1<sup>a</sup> specie che non s'incontrano, mentre l'altro ne contiene due che s'incontrano; ecc. ecc.

È chiaro che *due superficie equivalenti rispetto alle trasformazioni birazionali regolari sono anche topologicamente equivalenti.*

Circa la questione inversa rinvio alla mia conferenza riemanniana di Berlino. Ad ogni modo *l'antigenere è un invariante topologico.*

È d'altronde ovvio che *tra due superficie equivalenti rispetto a trasformazioni birazionali regolari possono esistere anche trasformazioni birazionali irregolari.* L'esempio più immediato è quello di due piani, giacché ogni trasformazione cremoniana fra essi, se non è un'omografia, è irregolare.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — Sarebbe interessante di cercare a quanti tipi distinti, dal punto di vista delle trasformazioni birazionali regolari, e quindi in sostanza dal punto di vista topologico, si riducono le rigate razionali normali d'ordine  $m$ , tenuto conto dell'ordine delle loro direttrici minime <sup>(10)</sup>.

Il problema è stato posto e parzialmente trattato per le rigate di genere qualunque in una mia Memoria del 1941 <sup>(11)</sup>. Nel caso delle rigate razionali normali d'ordine  $m = 2\mu$  pari e direttrice minima d'ordine massimo  $\mu$ , si riconosce subito ch'esse costituiscono un solo tipo, comprendente la quadrica di  $S_3$ . Invero, ognuna di esse contiene un fascio di grado zero di tali direttrici, tutte irriducibili; e per mezzo di questo fascio e del fascio delle generatrici, riferiti proiettivamente ai due fasci di generatrici d'una quadrica, si pone fra le due superficie una corrispondenza birazionale regolare.

Si tratta anche di sapere se si perviene a un numero finito di tipi o se il numero dei tipi cresce con  $m$ . Se si verificasse la seconda alternativa, si avrebbero infiniti ordini invariantivi possibili per le superficie razionali.

6. Quando per una classe di superficie birazionalmente equivalenti l'antigenere relativo ammette un massimo, questo diviene un invariante assoluto della classe; lo chiameremo *l'antigenere assoluto*. Per le superficie la cui curva canonica è linearmente zero l'antigenere assoluto vale 1, per le altre superficie di genere  $p_g > 0$  l'antigenere assoluto vale zero.

(10) Ved. C. SEGRE, *Sulle rigate razionali normali in uno spazio lineare qualunque*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 1884.

(11) SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*, «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», 1941. Ved. specialmente i nn. 14 e 25. Si trova per esempio che qualunque sia il loro genere, due rigate proiettive (non singolari) non possono essere birazionalmente equivalenti senza eccezioni se i loro ordini non hanno la stessa parità.

Che cosa si può dire in proposito delle superficie razionali? Esiste per esse un massimo degli antigeneri relativi, cioè una antigenere assoluto finito?

Prima di procedere oltre, sono opportuni a questo punto alcuni richiami bibliografici e qualche riflessione critica.

Taluni Autori affermano che la dimensione del sistema  $|C - C'|$ , sulle superficie razionali, è  $\leq 9$  (raggiungendosi il massimo per esempio sul piano): affermazione esatta, come più innanzi vedremo. Però tale asserzione si fa di solito derivare dal fatto che le  $C - C'$  son curve ellittiche, mentre in realtà son soltanto curve, eventualmente anche spezzate, di genere *virtuale* 1<sup>(12)</sup>. Per poter poggiare sulla proprietà dei sistemi lineari di curve ellittiche piane di aver la dimensione  $\leq 9$ <sup>(13)</sup> o sulle proprietà che una superficie con un sistema lineare almeno  $\infty^2$  di curve ellittiche è razionale o riferibile a una rigata ellittica<sup>(14)</sup>, occorrerebbe sapere che le  $C - C'$  son curve ellittiche propriamente dette (cioè curve irriducibili di *genere effettivo* 1) perché è in tale ipotesi che (a quanto io so) sono stati dimostrati i teoremi predetti. La difficoltà nasce quando si debba analizzare l'ipotesi in cui  $|H| \equiv |C - C'|$  è riducibile, perché in tal caso fra le componenti di  $H$  potrebbe altresì entrare qualche curva razionale (eccezionale o no)<sup>(15)</sup>.

Non è neppure sufficiente il ragionamento che segue:

Il sistema  $|\bar{C}|$  rappresentativo sul piano della superficie razionale data  $V$  d'ordine  $m > 2$ , non rigata (che sia a sezioni curvilinee  $C$  di genere  $> 1$ ) possiede un aggiunto  $|\bar{C}'|$ , le cui curve passano pei punti base di  $|\bar{C}|$  con molteplicità inferiore di un'unità; epperò  $|\bar{C} - \bar{C}'|$  è sul piano l'immagine del sistema anticanonico  $|C - C'|$  di  $V$ . Ma siccome  $|\bar{C} - \bar{C}'|$  consta di curve del 3° ordine, così la sua dimensione è  $\leq 9$ <sup>(16)</sup>.

Tale argomentazione però non vale quando  $|\bar{C}'|$  possiede componenti fisse, le quali nascono dagli eventuali punti (semplici) di  $V$  fondamentali per la trasformazione da  $V$  al piano; trasformazione su cui non abbiamo la possibilità di fare ipotesi limitative, perché è quella che definisce la razionalità di  $V$  e bisogna accettarla com'è.

Per venire a capo della questione, occorre ricorrere alla penetrante analisi a cui Castelnuovo sottopose nel 1891 le proprietà generali dei sistemi lineari di curve piane e specialmente quelle del sistema aggiunto<sup>(17)</sup> e ai

(12) La proprietà segue subito dal fatto che, detta  $H'$  una curva aggiunta ad  $H$ ,  $H' \equiv K + H \equiv C' - C + C - C' \equiv 0$ , oppure dal lemma del successivo n. 7.

(13) Come in CASTELNUOVO-ENRIQUES nella loro classica Memoria, *Sopra alcune questioni fondamentali nella geometria sulle superficie algebriche*, «Annali di Matematica», t. VI, 1901, n. 21. A questa Memoria fa riferimento anche FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, «Atti del Congresso internazionale dei Matematici, Bologna, 1928», t. IV, p. 119, quando indica l'estremo superiore della dimensione di  $|C - C'|$ .

(14) Come in CASTELNUOVO, *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione cui esso dà luogo*, «Rendiconti di questa Accademia», t. VI, 1897; oppure *Memorie scelte*, p. 454.

(15) L'ipotesi che le  $H$  possano essere spezzate vien accennata in un recente lavoro di ROTH, *Sulle  $V_3$  algebriche che possiedono un sistema anticanonico*, «Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana», Taormina, 1951; pubblicati nel 1953, n. 1 della Nota. Ma l'analisi è accennata e non sviluppata, perché lo scopo dell'Autore era diverso e la questione doveva ritenersi già risolta. Ringrazio il valoroso collega di Londra, mio antico e affezionato discepolo, per questa e per altre utilissime notizie datemi.

(16) Così in D'ORGEVAL, *Remarques sur la rationalité des variétés*, «Rendiconti» di questa Accademia, t. IV, 1948, p. 701.

(17) CASTELNUOVO, *Ricerche generali sui sistemi lineari di curve piane*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», 1891, n. 27. Ved. pure *Memorie scelte*, p. 174.

complementi dati da Enriques nel 1896<sup>(18)</sup> in relazione al teorema fondamentale dell'aggiunzione.

Anzitutto ricordiamo, con Castelnuovo, che le componenti fisse del sistema  $|\bar{C}'|$  son tutte e sole le curve fondamentali improprie<sup>(19)</sup> di  $|\bar{C}|$ ; e avvertiamo inoltre che  $|\bar{C}|$ , immagine del sistema  $|C|$  delle sezioni curvilinee di  $V$ , non possiede che curve fondamentali improprie, perché la superficie, nello spazio ove si suppone immersa, è priva di punti multipli. Supporremo d'aver ridotto  $V$  priva delle curve eccezionali, che la trasformazione trasporta in punti del piano: il che è sempre possibile, essendo  $m > 2$  e  $V$  non rigata, perché non vi sono curve eccezionali di 2<sup>a</sup> specie. Così l'antigenere originario non è certo diminuito (fine del n. 3).

Ci converrà di prendere per  $|C|$  il sistema lineare segato su  $V$  dalle ipersuperficie d'ordine abbastanza alto del suo spazio, così che il sistema segato dalle ipersuperficie passanti pei punti fondamentali della trasformazione da  $V$  al piano sia irriducibile e possenga punti base semplici in ciascuno dei punti fondamentali. Con riferimento a questo ultimo sistema non muta il sistema aggiunto  $|C'|$  né il sistema  $|C - C'|$ , a causa del teorema fondamentale dell'aggiunzione<sup>(20)</sup>.

Indicata con  $\bar{L}$  la somma delle curve fondamentali improprie generate dalla trasformazione, ossia l'insieme delle curve fisse di  $|\bar{C}'|$ , sarà  $|\bar{C}' - \bar{L}|$  l'aggiunto puro di  $|\bar{C}|$  e di  $|\bar{C} - \bar{L}|$ . D'altronde quest'ultimo aggiunto, attesa la mancanza di curve fondamentali su  $V$ , è proprio il trasformato di  $|C'|$ <sup>(21)</sup> e  $|\bar{C} - \bar{L}|$  è il trasformato del sistema ottenuto da  $|C|$  cogli indicati punti base semplici. Perciò il trasformato di  $|H| = |C - C'|$  è (a prescindere dal comportamento nei punti base)  $|\bar{H}| = |(\bar{C} - L) - (\bar{C}' - L)|$ ; e dunque,  $|\bar{H}|$  consta proprio di curve del 3° ordine e la dimensione di  $|H|$  è  $\leq 9$ <sup>(22)</sup>. Concludendo:

*Sopra una superficie razionale l'antigenere non supera 10 (e il massimo è raggiunto sul piano).*

OSSERVAZIONE. Si potrà osservare che la conclusione vale soltanto per le superficie prive di singolarità o dotate di singolarità ordinarie nello  $S_3$ , perché quest'ipotesi ha giocato in modo essenziale nella deduzione. Ma qui ci troviamo dinanzi ad una circostanza

(18) ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, «Memorie dei XL», 1896, n. 27.

(19) Denominazione di Enriques. Una curva fondamentale è *impropria* quando non abbassa il genere delle curve residue.

(20) ENRIQUES, loc cit., n. 27; *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc. (citati), p. 201.

(21) *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., p. 230.

(22) Quando  $V$  è una quadrica, rappresentata stereograficamente sul piano, a causa della presenza delle curve eccezionali di 2<sup>a</sup> specie, si ha un'eccezione effettiva, perché il sistema anticanonico vien rappresentato sul piano non da cubiche, ma dalle quartiche con 2 punti base doppi. Analoga eccezione (a causa della presenza di curve eccezionali di 2<sup>a</sup> specie) presentasi per le rigate razionali normali d'ordine  $m$  (n. 4) rappresentate ognuna da un sistema di curve piane d'ordine  $m$  con un punto base  $(m - 1)$ -plo  $O$  e  $m - 1$  punti base semplici  $P$ , il cui sistema anticanonico è rappresentato da curve piane d'ordine  $m + 2$  col punto  $m$ -plo  $O$  ed  $m - 1$  punti doppi  $P$ .



generale nella geometria sulle varietà; che cioè la maggior parte delle definizioni e delle proprietà di questa geometria sono date o dimostrate sopra modelli non singolari e riferite per astratto ai modelli singolari, in quanto esse spettano a tutta la classe delle trasformate non singolari di un dato modello singolare. Anche nel caso attuale l'antigenere assoluto di un modello singolare resta *definito* come l'antigenere di un qualsiasi modello non singolare, birazionalmente equivalente. E da questo punto di vista la conclusione precedente diviene generale.

7. Per arrivare alla piena caratterizzazione delle superficie razionali a mezzo dell'antigenere assoluto, occorre proseguire la nostra analisi. All'uopo premettiamo il lemma:

*Il grado virtuale del sistema anticanonico sopra ogni superficie vale  $\omega - 1$  <sup>(23)</sup> e il genere virtuale è sempre 1.*

È infatti  $\omega - 1 = [K^2]$  <sup>(24)</sup> e inoltre  $[K^2] = [(-K)^2] = [H^2]$ ; e ciò dimostra la prima parte del lemma. Quanto al genere virtuale, si osservi che da  $K + H \equiv 0$  segue: genere virtuale  $K +$  genere virtuale  $H + [H, K] - 1 =$  = genere virtuale curva zero; donde: genere virtuale  $H = 1$ , essendo  $[H, K] = -[K^2] = 1 - \omega$ .

OSSERVAZIONE. - Tenuto conto che il massimo di  $\omega$  sulle superficie razionali si raggiunge sul piano ed è ivi  $\omega = 10$  <sup>(25)</sup>, ne deriva che *il massimo grado virtuale del sistema anticanonico sopra una superficie razionale è uguale a 9 (e si raggiunge sul piano)*. Poiché inoltre il teorema di Riemann Roch sulla superficie, applicato al sistema  $|H|$ , dà come estremo inferiore della dimensione  $d$  di  $|H|$ ,  $d \geq \omega - 1$ , così risulta  $\omega \leq 10$  e il massimo di  $\omega$  viene uguale a 10, perché tale è il valore che  $\omega$  assume sul piano. È questa *una nuova dimostrazione del valore massimo di  $\omega$  sulle superficie razionali*.

8. Fra le superficie *regolari* le superficie razionali son caratterizzate dal fatto che il loro antigenere assoluto  $a$  vale 10. Invero, essendo  $a = 10$  è certo  $p_g = 0$  (se  $p_g > 0$  è  $a = 0$  o  $a = 1$ ) e la superficie appartiene alla classe delle superficie razionali o delle rigate irrazionali. Ma quest'ultima è da escludersi per la supposta regolarità di  $V$ .

Si può anche abbandonare l'ipotesi della regolarità di  $V$ : la conclusione circa la razionalità di  $V$  permane allora immutata.

Sia, invero,  $V$  una qualsiasi superficie (non singolare) birazionalmente equivalente a una rigata di genere  $p > 0$  e  $C$  sieno le curve razionali di  $V$

(23) Ved. le citate *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., p. 244. Il carattere  $\omega$  fu considerato per primo da Enriques in luogo del genere lineare di Noether e fu studiato largamente da lui e da Castelnuovo. Esso coincide col genere virtuale del sistema canonico impuro  $|K|$ , sia che sia  $|K|$  effettivo o virtuale.

(24) *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., p. 244.

(25) Questo massimo fu assegnato da Castelnuovo (Memoria citata) e da Castelnuovo-Enriques (Memoria citata del 1901), ma in ambedue le Memorie esso poggia sulla massima dimensione di  $|H|$ . A p. 254 delle *Serie, sistemi d'equivalenza* (citata) quel massimo vien dedotto a partire dalla base delle curve di una superficie razionale.



imagini delle generatrici della rigata. Fra esse c'è un numero finito ( $\geq 0$ ) di curve spezzate. Poiché è per  $V^{(26)}$

$$\omega - 1 \leq -8(p - 1),$$

se  $p > 1$ , il grado virtuale di  $H$  è al più  $-8$ ; epperò  $H$  o non esiste affatto e  $a = 0$ , qualora esista effettiva, è una curva isolata e l'antigenere relativo di  $V$  è  $a = 1$ . Orbene, questo è assurdo. Invero, la curva  $H$  di genere virtuale  $1$ , se è irriducibile, ha il genere effettivo  $1$  e su essa non potrebbe esistere un'involuzione di genere  $p > 1$ , quale vi sarebbe segata dalle  $C$ . Nè  $H$  può essere spezzata, perché nessuna sua componente potrebbe avere genere effettivo  $> 1$  <sup>(27)</sup>, e siccome una almeno delle componenti incontra ogni  $C$ , si avrebbe di nuovo su quella componente un'involuzione (di grado  $\geq 1$ ) e di genere  $p > 1$ . Dunque per  $V$  è  $a = 0$  <sup>(28)</sup>.

Esaminiamo l'ipotesi  $p = 1$ . Allora o è  $\omega - 1 < 0$  oppure  $\omega - 1 = 0$ . Nel primo caso  $H$  non esiste e  $a = 0$ , o esiste ed è isolata e allora  $a = 1$ . Nel secondo caso se  $H$  esiste o è isolata e di nuovo è  $a = 1$ , oppure appartiene ad un fascio irrazionale o razionale. Se il fascio è irrazionale,  $H$  è linearmente isolata e  $a = 1$ ; se il fascio è razionale invece è  $a = 2$ .

È possibile che un'ulteriore analisi delle ipotetiche conclusioni  $a = 1$  o  $a = 2$ , nel caso  $p = 1$ , porti ad escludere tali valori di  $a$ .

Occorrerà tener conto in modo particolare del fatto che  $H$ , di genere virtuale  $1$ , sega sulla generica  $C$ , che ha la serie caratteristica zero, un gruppo anticanonico, cioè una coppia di punti. Ne deriva, se  $p = 1$  ed  $a = 2$ , che vi sono due curve  $H$  aventi incontro bipunto con una generica  $C$  ed esse sono necessariamente spezzate, perché su una  $H$  irriducibile di genere virtuale  $1$  le  $C$  segano un'involuzione ellittica senza punti doppi. Variando  $C$ , le  $H$  spezzate descrivono tutto il fascio  $|H|$ , che è dunque riducibile.

La esclusione delle ipotesi  $a = 1$ ,  $a = 2$  si compie con relativa facilità (seguendo questa traccia di ragionamento) quando nessuna delle  $C$  è spezzata (e quindi  $V$  non contiene curve eccezionali di 1ª specie); ma ciò non è sufficiente per arrivare ad una conclusione circa il massimo valore di  $a$  su  $V$ , ossia circa il valore dell'antigenere assoluto.

Le conclusioni raccolte bastano invece per giungere alla caratterizzazione che volevamo delle superficie razionali, sicché tralasciamo qui la ulteriore analisi concernente le rigate.

Riassumendo: per una superficie birazionalmente equivalente ad una rigata di genere  $p = 1$  l'antigenere assoluto non supera 2.

(26) CASTELNUOVO-ENRIQUES, loc. cit., p. 57; SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., p. 254.

(27) Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche generali* (citato), n. 15. L'asserzione è del resto topologicamente evidente.

(28) Alla stessa conclusione perviene ROTH, loc. cit. però nell'ipotesi che la rigata sia priva di curve eccezionali di 1ª specie.

9. Da quanto precede risulta che:

*Le sole superficie aventi l'antigenere assoluto non nullo sono le superficie razionali (per cui l'antigenere assoluto è 10), le superficie con curva canonica zero (per cui l'antigenere assoluto vale 1) ed eventualmente le superficie birazionalmente equivalenti alle rigate ellittiche (per cui l'antigenere assoluto vale al più 2).*

Ne discende che:

*Condizione necessaria e sufficiente perché una superficie sia razionale è che il suo antigenere assoluto valga 10.*

Tale caratterizzazione, a differenza di quella classica di Castelnuovo ( $p_a = P_2 = 0$ ), pone in giuoco soltanto un carattere geometrico.

10. Proviamo infine che:

*Il valore 10 dell'antigenere relativo caratterizza le superficie lineari (topologicamente equivalenti al piano complesso).*

Sia  $V$  una superficie (non singolare) di antigenere relativo 10 e di ordine  $m > 2$ . Essa è non rigata pel n. 4. Poiché  $|\bar{H}|$ , immagine sul piano rappresentativo del sistema anticanonico  $|H|$  di  $V$ , è costituito da cubiche piane (n. 6) ed ha ora dimensione 9, esso coincide col sistema di tutte le cubiche.

D'altronde la corrispondenza tra  $V$  e il piano pone una corrispondenza birazionale senza eccezioni, cioè un'omografia, tra  $|H|$  ed  $|\bar{H}|$ : senza eccezioni perché nessuna delle curve  $H$ ,  $\bar{H}$ , essendo ellittiche, può esser eccezionale. Si può assumere allora  $|\bar{H}|$  quale sistema rappresentativo di  $V$  nel piano; epperò  $V$  è lineare.

**Astronomia.** — *Sopra le bande e la rotazione di Venere.* Nota (\*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. Come è notissimo, il pianeta Venere presenta le *fasi*, la cui scoperta è dovuta a Galileo Galilei, che la pubblicò per la prima volta nel 1610, nel suo celebre libro *Nuncius Sidereus magna longeque mirabilia spectacula pandens*; opera che può ben definirsi come il primo trattato di astrofisica moderna. Ed è inutile aggiungere che questa scoperta galileiana dimostrò in modo evidente ciò che Copernico aveva asserito settanta anni innanzi, nel suo *De Revolutionibus orbium caelestium*, pubblicato nel 1543 a Norimberga; e cioè che Venere, come tutti gli altri pianeti, ruotava intorno al Sole ed era illuminata dal Sole.

Ma, per quanto riguarda le osservazioni astronomiche sopra la costituzione fisica di Venere, deve notarsi che - a differenza di quanto avviene per la Luna - la distanza di questo pianeta dalla Terra varia grandemente col

(\*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1955.

variare delle sue fasi. E precisamente quando Venere è piena, essa si trova in *coniunzione superiore* col Sole e cioè alla *massima distanza* dalla Terra, che è di oltre 250 milioni di chilometri; il pianeta appare allora come un piccolo dischetto luminoso del diametro di circa 10'', che si proietta in cielo assai vicino al Sole e deve quindi osservarsi di pieno giorno. Al contrario, quando Venere è *nuova*, essa si trova in *coniunzione inferiore* col Sole, alla *minima distanza* dalla Terra e cioè a meno di 50 milioni di chilometri da noi; il suo disco presenta allora un diametro apparente di circa un minuto di arco, ma è ovviamente inosservabile giacché il pianeta rivolge a noi la faccia oscura. Infine, quando Venere è prossima al suo *primo od ultimo quarto*, la sua distanza da noi è compresa tra questi limiti ed inoltre il pianeta si trova angolarmente ben discosto dal Sole, in modo da poter essere esaminato quando il cielo è buio e cioè prima del levare o dopo il tramonto del Sole; ciò che ovviamente facilita le osservazioni. Ciò spiega perché gli astronomi che si sono occupati di esaminare la natura fisica di Venere, abbiano sempre scelte, *quasi esclusivamente*, per le loro osservazioni, quei periodi di tempo in cui il pianeta era prossimo al primo od all'ultimo quarto, specialmente per determinare la rotazione.

2. In proposito, tra i primi osservatori di Venere, dobbiamo ricordare, oltre al Fontana, l'astronomo F. Bianchini (il medesimo che tracciò la meridiana della chiesa di S. Maria degli Angeli, a Roma) il quale osservò assiduamente il pianeta nel 1726-27 in una sua specola privata, che ci risulta situata presso via della Dataria in vicinanza della chiesa dei Lucchesi, a Roma. I suoi risultati furono esposti nel libro *Hesperii et Phosphori nova phaenomena*, pubblicato a Roma, nel 1728, in cui il Bianchini giunge alla conclusione che Venere ruotava intorno al proprio asse piuttosto lentamente e cioè in circa *tre settimane*. Ma un secolo dopo altri due astronomi romani, il p. De Vico e l'abate Palomba, con una serie di numerosissime osservazioni trovarono che Venere ruotava intorno al proprio asse molto più rapidamente; e cioè in circa 24 ore, come la Terra e come il pianeta Marte. E tale risultato, verso la fine del secolo passato, venne confermato da Villiger a Monaco di Baviera e da Flammarion a Juvisy, in Francia. Invece Schiaparelli, dopo accurate osservazioni eseguite all'Osservatorio di Brera, a Milano, tornò ad una rotazione ancora più lenta di quella trovata dal Bianchini; ed anzi emise l'ipotesi che Venere rivolgesse sempre la stessa faccia al Sole, e cioè compisse una rotazione in un tempo eguale a quello della sua rivoluzione, vale a dire in 225 giorni.

La ragione di risultati così diversi, trovati da astronomi di grande valore, risiede nel fatto che Venere è circondata da un'alta e nebbiosa atmosfera, che nasconde ai nostri cannocchiali la superficie del pianeta e ci impedisce di prendere dei punti di riferimento. Così per esempio, se osserviamo i bei disegni di Venere che ci ha lasciato il nostro predecessore prof. P. Tacchini (disegni che conserviamo diligentemente all'Osservatorio di Roma, ma che si riferiscono sempre a fasi prossime al primo ed all'ultimo quarto),

vediamo che la superficie planetaria, simile ad una Luna falcata, appare cosparsa di nubi cineree irregolari, di forma, dimensioni e posizioni molto variabili.

Per sciogliere la questione, Belopolsky, a Poulkowo, fece ricorso (1910) ad osservazioni spettroscopiche, confrontando gli spettri dei due bordi del pianeta, misurando gli spostamenti relativi delle righe spettrali ed applicando quindi il noto principio Doppler. E ne dedusse che la velocità equatoriale di rotazione del pianeta era di circa 400 metri al secondo; onde, essendo il suo diametro di 12.300 km, esso compiva una rotazione in poco più di 24 ore, in concordanza con i risultati del De Vico, del Palomba, del Villiger e del Flammarion.

Ma, come sa bene ogni astronomo pratico, le righe che compaiono negli spettri planetari sono poco nette. Ed infatti, alcuni anni dopo, Slipher e Lowell eseguendo le medesime osservazioni spettroscopiche a Monte Wilson ed all'Osservatorio di Flagstaff, nell'Arizona (S. U.), trovarono invece che la velocità equatoriale di rotazione era di soli 15 metri al secondo; ciò che portava la durata della rotazione a circa un mese, in conformità al risultato del Bianchini.

Ultimamente però un risultato assai importante è stato accertato e su di esso dobbiamo fermarci brevemente; anche per una questione di priorità, che risulta del resto evidente dalle date di pubblicazione.

3. Nel fasc. 3 del vol. CXX della rivista americana « The Astrophysical Journal », pubblicato nel novembre 1954 a Chicago e giunto da poco a Roma, è contenuta una nota dell'astronomo G. Kuiper, già ben noto per le sue importanti ricerche. In tale nota, il Kuiper dichiara di aver eseguito all'Osservatorio Mac Donald, nel Texas, alcune fotografie di Venere specialmente nel giugno e luglio dello scorso anno 1954 - e cioè quando Venere era prossima alla sua congiunzione superiore e quindi era quasi *piena* - e di avervi trovato alcune bande cineree, parallele tra loro, simili a quelle che si osservano sul disco di Giove.

Il risultato del Kuiper è certamente assai importante, come ora diremo. Ma, per quanto riguarda la priorità delle osservazioni su Venere *piena* e la scoperta delle bande, debbo aggiungere che alla p. 180 del mio *Trattato di Astrofisica*, stampato a Milano nel 1953, io scrivevo <sup>(1)</sup> queste precise parole:

« *Notiamo che, osservando Venere presso alla sua congiunzione superiore col Sole e cioè quando essa era piena, a noi è sembrato qualche volta di vedere sul suo disco delle bande lievissime, parallele tra loro e simili a quelle di Giove* ».

Come ho detto, queste osservazioni di Venere « piena » presentano notevoli difficoltà, giacché debbono essere fatte di giorno, ed anzi verso mezzodì,

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici dell'astrofisica* (un vol. di p. XIX-462; Milano, Hoepli, 1953).



essendo il pianeta in congiunzione superiore e quindi poco lontano dal disco solare. Occorre inoltre porre innanzi alla lente obbiettiva dell'equatoriale un tubo annerito internamente, od altro schermo, affinché i raggi solari non cadano direttamente sopra la lente stessa; ed occorre pure servirsi di potenti strumenti (l'equatoriale dell'Osservatorio di Monte Mario ha un obbiettivo Steinheil di 390 mm. di diametro) e di forti ingrandimenti, essendo allora Venere alla massima distanza da noi. Inutile avvertire che il cielo deve essere limpidissimo e l'atmosfera molto secca.

Dobbiamo pure aggiungere che, prima di noi, una tale osservazione sul disco *pieno* di Venere era stata fatta dal p. A. Müller S. J., in una sua specola privata, situata a Roma, alle falde del colle Gianicolo; il p. Müller però, come egli stesso <sup>(2)</sup> scrive, vide *una sola banda*. Tra gli stranieri, per quanto mi risulta, soltanto F. Ross, esaminando una serie di fotografie di Venere, da lui eseguite a Monte Wilson con filtri di luce ultravioletta, sospettò l'esistenza di bande parallele; ma poiché queste fotografie erano state eseguite quando Venere era vicina a noi e quindi *molto falcata*, in esse <sup>(3)</sup> comparivano soltanto piccoli tratti di bande, facilmente scambiabili con macchie irregolari. In ogni modo, resta *dimostrato* che i primi ad osservare visualmente *le intere bande di Venere sul disco pieno del pianeta*, sono stati astronomi italiani. E le recenti fotografie del Kuiper, eseguite su Venere « piena », hanno messo fuori dubbio il fenomeno da loro già visto.

4. L'esistenza, ormai accertata, di bande parallele su Venere, permette immediatamente di determinare l'inclinazione del piano equatoriale del pianeta sul piano dell'orbita; e si trova che questa inclinazione è di circa  $32^\circ$ , onde Venere avrebbe le stagioni come la Terra e come Marte.

In proposito però crediamo importante osservare che questa inclinazione è del medesimo ordine di grandezza di quella della nostra Terra (il cui equatore è inclinato sopra l'eclittica di circa  $23^\circ$ ) e di quella di Marte (il cui equatore è inclinato sopra l'orbita di circa  $25^\circ$ ), mentre è differentissima da quella di altri pianeti esterni; per Giove, per esempio, l'inclinazione dell'equatore sopra l'orbita è di soli  $3^\circ$ ; per Urano invece è di circa  $98^\circ$ , ecc.

In altre parole, i tre pianeti interni che fisicamente più si rassomigliano tra loro, Venere, Terra e Marte, hanno anche i loro piani equatoriali presso a poco egualmente inclinati sopra le loro orbite. È questo un fenomeno degno di attenzione e che evidentemente si ricollega a cause cosmogoniche.

Ma dobbiamo fare ancora un'altra considerazione. Ricordando dalla teoria che le bande parallele all'equatore sono mantenute dalla velocità angolare di rotazione del pianeta, e pur non potendo eseguire un calcolo numerico, giacché troppi dati ci mancano, sembra però lecito affermare

(2) Cfr. P. A. MÜLLER, *Elementi di Astronomia*, vol. II (p. 409); Roma, Desclée.

(3) Cfr. F. E. ROSS, *Photographs of Venus*, in «Astroph. Journal», vol. LXVIII, dove si trovano pure riprodotte le fotografie a cui accenniamo.



che tale velocità di rotazione non può essere estremamente debole. Cade quindi definitivamente l'ipotesi (già del resto ormai quasi abbandonata) che Venere ruoti in 225 giorni, rivolgendo sempre la stessa faccia al Sole, ed anche la rotazione di tre settimane del Bianchini sembra troppo lunga. Forse la rotazione di Venere non è molto diversa da quella della Terra e di Marte, come hanno creduto il De Vico ed il Palomba; ma su ciò l'avvenire deciderà. Per ora, come ben dice il Kuiper, occorrono molte osservazioni su queste bande, da eseguirsi però quando Venere è *at full phase*, cioè *piena*; come già noi avevamo fatto, il p. Müller ed io.

5. Di che cosa sono composte queste bande? In generale, i moderni e lo stesso Kuiper ritengono che le nubi di Venere siano dovute a pulviscolo, sollevato dai venti che regnano nell'atmosfera del pianeta. Infatti lo spettro di Venere mostra, nella sua atmosfera, l'assenza od almeno una quantità assai debole di ossigeno e di vapore acqueo (diciamo così perché negli spettri dei pianeti le bande dell'ossigeno e del vapor acqueo vengono a sovrapporsi a quelle prodotte dall'atmosfera terrestre, e non possono quindi essere rilevate se la loro intensità è molto debole) ed invece mostra una fortissima quantità di anidride carbonica. I moderni ritengono quindi che l'atmosfera di Venere risulti composta principalmente di *azoto* (che, come è noto, non dà bande nella regione osservabile dello spettro) e di *anidride carbonica*; onde le nubi di Venere non potrebbero essere dovute a vapore acqueo.

Crediamo però di dover osservare che, con lo spettroscopio e col cannocchiale, noi possiamo scandagliare soltanto la parte più elevata dell'atmosfera di Venere, situata al di sopra delle nubi che circondano il pianeta nascondendone la superficie. In altre parole, noi possiamo scandagliare soltanto la *stratosfera* di Venere, dove la temperatura è molto al di sotto del punto di congelazione dell'acqua e dove quindi non può esistere vapore acqueo in quantità sensibile. Ma ciò non toglie che esso possa invece trovarsi negli strati più bassi e che sopra la superficie del pianeta possa esistere anche acqua allo stato liquido; almeno nelle regioni circumpolari, dove la temperatura è certamente inferiore a quella di ebollizione.

La grande abbondanza di anidride carbonica e l'estrema povertà di ossigeno proviene, secondo la nostra opinione, dalla mancanza della vita vegetale; essendo ben noto che la funzione clorofilliana delle piante ha appunto per effetto di assorbire anidride carbonica, emettendo ossigeno. Ovviamente, mancando su Venere la vita vegetale, manca anche quella animale; e ciò non ci reca meraviglia, giacché l'astronomia moderna ci ha persuasi che nell'Universo Sidereo *la vita non costituisce la regola, ma l'eccezione*.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica** (Analisi). — *Funzioni quasi continue in spazi astratti*<sup>(\*)</sup>. Nota di TULLIO VIOLA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

1. L'opportunità di generalizzare il concetto di funzione quasi continua  $f(P)$ , che M. Picone ha posto a fondamento d'una teoria dell'integrazione nel senso di Lebesgue-Stieltjes supponendo  $P$  variabile in un insieme  $I$  dello spazio euclideo a un generico numero  $n$  di dimensioni,  $f(P)$  reale, e la massa di riferimento essa pure reale<sup>(1)</sup>, sembra presentarsi spontanea in diverse questioni d'analisi. L'interessante generalizzazione data recentemente da G. Fichera al caso che  $P$  vari in un generico spazio topologico<sup>(2)</sup>, mi ha suggerito d'indagare se ed in che modo il concetto di funzione quasi continua possa ulteriormente generalizzarsi, supponendo astratti sia lo spazio  $S$  in cui varia  $P$ , sia lo spazio  $S'$  dei valori assunti dalla massa di riferimento, sia infine lo spazio  $S''$  dei valori assunti dalla funzione  $f(P)$ . Credo che una simile estrema generalizzazione potrebbe rivelarsi tutt'altro che infeconda in più d'un'applicazione: per esempio nel calcolo delle probabilità<sup>(3)</sup>.

2. Il tema proposto può certamente trattarsi in molti modi. Ho cominciato col prefissare, una volta per tutte, le proprietà dello spazio  $S'$ , riservandomi poi una certa libertà di scelta per le proprietà degli spazi  $S$  ed  $S''$ , a seconda degli argomenti particolari che m'è sembrato interessante di svolgere. Ho ritenuto opportuno d'assumere per  $S'$  uno spazio *additivo*, attenendomi in questo alla Memoria citata di M. Fréchet<sup>(4)</sup>, il quale ha proposto (per analogo tema) il seguente sistema, estremamente generale, di condizioni.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) M. PICONE, *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni* (Lezioni d'Analisi tenute nel 1945-46 presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, corso litografato).

(2) G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I (Trieste, pr. l'Istituto Matematico dell'Università, 1954) pp. 327-330. Questa generalizzazione acquista, a mio parere, un grande rilievo se si osserva che un carattere peculiare e, per così dire, «macroscopico» della teoria di Picone consiste nel fatto che la teoria stessa poggia unicamente su una definizione *topologica* degli insiemi aperti e di quelli chiusi: cioè che gli insiemi aperti sono formati esclusivamente di punti interni, e gli insiemi chiusi sono i complementari dei precedenti rispetto all'intero spazio.

Questa osservazione che, a quanto mi consta, sembra sfuggita non solo ai recensori del fascicolo di cui alla nota<sup>(1)</sup> ma anche a quelli del trattato nel quale ho avuto il grande onore di collaborare col Maestro (ved. n. 3), conferisce ai fondamenti della teoria di Picone una snellezza che non si riscontra nelle trattazioni consuete.

(3) Cfr. M. FRÉCHET, *L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* («Revue Scientifique», 82, pp. 483-512 (1944)).

(4) Loc. cit. alla nota<sup>(3)</sup>, p. 503.

Se  $v', v''$  sono due punti qualunque di  $S'$ , esiste in  $S'$  la *somma*  $v = v' + v''$ , unica e ben determinata, per la quale valgono le proprietà commutativa ed associativa.

L'equazione  $v' = v'' + \gamma$  nell'incognita  $\gamma$ , è sempre univocamente risolvibile; la sua soluzione  $\gamma$  è la *differenza*  $v' - v''$ . Si deduce immediatamente l'esistenza dello *zero*  $0 = v - v$ , indipendente da  $v$ .

Ad ogni punto  $v$  di  $S'$  è associato un numero non negativo, la *norma*  $\|v\|$  di  $v$ , nulla se e solo se  $v = 0$  e tale che, per ogni coppia  $v', v''$ , valga la limitazione:

$$\|v' - v''\| \leq \|v'\| + \|v''\|.$$

Infine, supposto che  $v(x)$  sia un punto di  $S'$  dipendente da una variabile reale  $x$  e definito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v_0 \quad \text{quando} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \|v(x) - v_0\| = 0,$$

è ammessa la validità del criterio di Bolzano-Cauchy.

3. Per la scelta delle proprietà degli spazi  $S$  ed  $S'$ , facciamo riferimento al trattato: M. Picone e T. Viola, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione* (Torino, Einaudi, 1952) che consideriamo come fondamentale; è degno di nota il fatto che proprietà via via più restrittive, quanto più si avanza nei particolari della teoria, sembrano rendersi indispensabili.

Supponendo semplicemente  $S$  *topologico*, è possibile anzitutto definire la *massa*  $\mu(e)$  sulla famiglia  $\mathcal{F}$  degli insiemi boreliani  $e$  di  $S$ , ivi assumente valori appartenenti ad  $S'$ , *completamente additiva* ed a *variazione finita* su  $\mathcal{F}$ . Per ogni insieme  $E$  di  $\mathcal{F}$ , indichiamo con  $m(E)$  la *variazione totale* della funzione  $\mu(e)$  su  $E$ , cioè l'estremo superiore (finito, per ipotesi) dell'insieme numerico descritto dalle somme

$$\|\mu(e_1)\| + \|\mu(e_2)\| + \dots + \|\mu(e_n)\|,$$

al variare comunque della decomposizione:

$$E = e_1 \overset{\circ}{+} e_2 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} e_n \quad (e_i \in \mathcal{F} ; i = 1, 2, \dots, n ; n \text{ intero posit. arbitr.}).$$

È poi possibile definire un insieme  $I$ , di punti dello spazio  $S$ , come *lebesghiano* (rispetto alla massa  $\mu(e)$ ) quando, comunque si assegni un numero  $\varepsilon > 0$ , esistono un insieme chiuso  $C_\varepsilon$  contenuto in  $I$  e un insieme aperto  $A_\varepsilon$  contenente  $I$ , in modo che risulti  $m(A_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$ . Le proprietà fondamentali degli insiemi lebesghiani <sup>(5)</sup> possono facilmente dimostrarsi, qualora s'imponga allo spazio  $S$  la condizione d'esser *metrico* e *separabile*: ciò permette poi di prolungare la definizione della massa  $\mu(e)$  sulla famiglia  $\mathcal{L}_\mu$  degli insiemi  $e$  lebesghiani (famiglia contenente la  $\mathcal{F}$  e' completamente addi-

(5) M. PICONE e T. VIOLA, loc. cit., pp. 111-123.

tiva al pari della  $\mathfrak{F}$ ), semplicemente per passaggio a limite a partire dagli insiemi aperti che contengono  $e$  oppure (ciò ch'è lo stesso) dagli insiemi chiusi che sono contenuti in  $e$ ; analogo prolungamento diviene possibile per la variazione totale  $m(e)$ . Entrambe queste funzioni  $\mu(e)$  ed  $m(e)$  risultano completamente additive su  $\mathfrak{L}_\mu^{(6)}$ .

4. Supposti  $S$  ed  $S''$  entrambi *topologici*, diciamo che una funzione  $f(P)$ , assumente in un insieme  $I$  di  $S$  valori appartenenti ad  $S''$ , è *quasi continua* (rispetto alla massa  $\mu(e)$ ) in  $I$ , se, comunque si assegni il numero  $\varepsilon > 0$ , è possibile costruire un insieme chiuso  $C_\varepsilon$  e un insieme aperto  $A_\varepsilon$ , tali che

$$C_\varepsilon \subset I \subset A_\varepsilon \quad , \quad m(A_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$$

ed  $f(P)$  risulti continua in  $C_\varepsilon$ .

Se  $S$  è *metrico* e *separabile*, vale la teoria generale delle funzioni quasi continue <sup>(7)</sup>, fatta al più eccezione degli importanti teoremi relativi alle successioni di funzioni quasi continue. Per arrivare a questi ultimi <sup>(8)</sup> e cioè al ben noto teorema di Severini-Egoroff e alle sue conseguenze, sembra indispensabile supporre altresì  $S''$  *metrico* e *completo*. Quest'ipotesi permette infatti di dedurre il detto teorema dal seguente lemma: *se  $f(P)$  e  $\varphi(P)$  sono due funzioni quasi continue in uno stesso insieme  $I$ , ed  $a$  è una costante positiva arbitraria, è lebesghiano l'insieme formato dai punti  $P$  di  $I$  nei quali la distanza  $\overline{f\varphi}$  è  $\geq a$ .*

Se, fermo restando  $S$  metrico e separabile, si viene a supporre, più particolarmente,  $S''$  *metrico*, *compatto* e *separabile*, si può dimostrare il teorema: *data una qualunque successione  $\{f_n(P)\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) di funzioni tutte quasi continue in uno stesso insieme lebesghiano  $I$ , è possibile costruire una funzione quasi continua in  $I$  che, in quasi tutti i punti  $P$  di  $I$ , è uguale a uno dei valori limiti della successione.*

Se invece si suppone  $S''$  *metrico* e *separabile*, ma non precisamente compatto, bensì (come accade per uno spazio euclideo a un numero qualunque di dimensioni) tale che *siano compatti soltanto i suoi domini limitati*, si può dimostrare il teorema: *data una qualunque successione  $\{f_n(P)\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) di funzioni tutte quasi continue in uno stesso insieme lebesghiano  $I$ , la parte  $G$  di  $I$  formata dai punti  $P$  nei quali la successione ammette almeno un valor limite, è lebesghiana. È possibile costruire una funzione  $f(P)$ , quasi continua in  $G$ , che, in ogni punto  $P$  di  $G$ , è uguale ad uno dei valori limiti della successione.*

(6) La funzione  $m(e)$  vien così ad assumere sempre valori *finiti*, sia l'insieme  $e$  limitato o no. Non vi sarebbe però difficoltà a generalizzare (senza cambiamenti sostanziali) tutto ciò ch'è detto nella presenta Nota, al caso che la massa  $\mu(e)$  fosse a variazione finita soltanto sugli insiemi limitati  $e$  di  $\mathfrak{F}$ .

(7) M. PICONE e T. VIOLA, loc. cit., pp. 124-129. Se  $S$  è metrico e separabile, la definizione d'una funzione  $f(P)$  quasi continua in un insieme  $I$  può esser data in modo formalmente diverso, cioè:  $I \in \mathfrak{L}_\mu$  ed è possibile costruire un insieme  $C_\varepsilon \subset I$ , chiuso e di continuità per  $f(P)$ , tale che  $m(I - C_\varepsilon) < \varepsilon$ .

(8) M. PICONE e T. VIOLA, loc. cit., pp. 134-139.



**Geometria algebrica.** — *Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker e sulle forme puntuali associate alle varietà algebriche.* Nota di FEDERICO GAETA, presentata (\*) dal Socio F. SEVERI.

Lo scopo fondamentale della teoria dell'eliminazione è quello d'*isolare le diverse componenti irriducibili* d'una varietà algebrica interferenza  $V$  (*Nullstellengebilde*)<sup>(1)</sup>, generalmente impura, rappresentata da un dato sistema  $S$  di equazioni algebriche nelle coordinate omogenee  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  di punto in uno spazio proiettivo  $S_n$  ed in particolare di trovare *condizioni caratteristiche di compatibilità*<sup>(2)</sup>. Non c'è nessuna necessità *a priori* che questi scopi debbano raggiungersi soltanto «eliminando» variabili. Spero anzi di provare qui come sia più vantaggioso, pur conservando l'idea geometrica del metodo di Kronecker, qual'è stata indicata da Severi<sup>(3)</sup>, d'introdurre in ogni

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) Ved. ad esempio VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (Springer, Berlin, 1940) II, Cap. 11; HODGE-PEDOE, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge University Press, I, Cap. IV, p. 139, II, Cap. X. Adopereremo la notazione  $V, W, \dots$  per le varietà interferenza; ved. SEVERI, *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni nei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*, «Ann. di mat.» (1948) o *Memorie scelte*, Zuffi, Bologna, p. 327 (1950). Ved. altresì SEVERI, *Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche e sopra una teoria generale dell'eliminazione*, «Math. Zeitschrift» (1950); *Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica*, «Rend. della Accademia Nazionale dei XL» (1951). Denoteremo poi con  $V, W$  le varietà intersezioni (Severi) o varietà nel senso moltiplicativo (Hodge) o cicli (Weil).

(2) SEVERI (1<sup>a</sup> Memoria sopra citata) ha dimostrato come il metodo di Kronecker permetta d'attribuire a ciascuna delle componenti irriducibili di  $V$  una molteplicità, qualora esse vengano concepite come varietà base del sistema lineare  $\Sigma$  associato ad  $S$ . Si spiegano così alcune anomalie osservate da PERRON, *Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutsche Satz*, «Math. Zeitschrift» (1944), nonché il modo di superarle. A p. 116 della *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin (1939) di VAN DER WAERDEN trovasi indicato, nel linguaggio dell'Algebra moderna, il modo per decomporre una varietà interferenza in componenti irriducibili. Ved. pure SEVERI, *Lezioni di Analisi*, Zuffi, 4<sup>a</sup> ed., Bologna (1953). Ai nostri fini giova osservare che *nei metodi indicati in tutte queste opere bisogna eseguire un cambiamento generico del sistema di riferimento proiettivo prima di iniziare il processo di eliminazione*.

(3) Secondo quest'interpretazione geometrica l'eliminazione della prima variabile  $x_0$  equivale ad isolare il cono proiettante  $V$  dal vertice della piramide di riferimento opposto all'iperpiano  $x_0 = 0$  (dopo aver soppresso la componente ad  $n - 1$  dimensioni ottenuta uguagliando a zero il m. c. d. delle equazioni date). E analogamente per le variabili che di mano in mano restano. Ved. loc. cit. in (2). Il carattere proiettivamente invariante del metodo è assicurato in seguito all'interpretazione geometrica di Severi, in quanto tutto il processo è individuato dal sistema di riferimento e dalle componenti di  $V$ ; sicché, eseguita la preventiva trasformazione omografica generica, tutto resta proiettivamente ben determinato. Ciò può rendersi ancor più evidente facendo figurare nelle formule i coefficienti della sostituzione lineare con cui si opera. Tuttavia lo stesso Autore dimostra come la molteplicità geometrica da lui stesso introdotta viene rispettata dal metodo soltanto attraverso il suo *risultante limite*.



tappa del calcolo  $n + 1$  variabili in più (anziché eliminarne!). Tali variabili saranno, in ogni stadio del processo d'isolamento, le coordinate del vertice di un cono proiettante la varietà impura ottenuta nello stadio precedente.

Questa via, che può sembrare più complicata delle consuete, permette invece d'introdurre in maniera del tutto naturale le forme puntuali associate alle componenti irriducibili di  $V$ . Ci si è presentata anzi alla mente riflettendo che i matematici i quali diffidano di più del metodo di Kronecker, per valutare le molteplicità, adoperano le forme associate <sup>(4)</sup> (iperplanari o puntuali), la più elementare delle quali rappresenta appunto il cono proiettante una varietà pura  $W_d$  di  $S_n$  dallo spazio  $S_{n-d-2}$  congiunte  $n-d-1$  punti generici. Da ciò nasce la necessità d'approfondire il legame tra tali forme e le condizioni di compatibilità, non preoccupandosi d'eliminare le variabili.

*Il metodo sviluppato permette di fare a meno d'una preventiva trasformazione omografica generica.* Esso è in istretto rapporto con la teoria della polarità per le forme algebriche (e quindi rivela sin dall'inizio la sua invarianza proiettiva); inoltre *le forme associate alle componenti di  $V$  appaiono invariantivamente elevate a certi esponenti che coincidono appunto con le rispettive molteplicità quali varietà base del sistema lineare  $\Sigma$  associato ad  $S$ .*

In questa breve Nota esponiamo le linee essenziali del metodo, che pubblicheremo diffusamente altrove.

1. Sia  $S$  il sistema di  $r$  equazioni algebriche degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_r$  i cui coefficienti sono forme appartenenti ad un corpo base  $K$  commutativo di caratteristica zero (ma non necessariamente algebricamente chiuso) <sup>(5)</sup> arbitrariamente fissato per il seguito. Considereremo pure le estensioni trascendenti  $K(y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1n}; y_{20}, \dots, y_{2n}; \dots; y_{i0}, \dots, y_{in})$  in cui le  $y_{hj}$  ( $h=1, 2, \dots, i$ ) rappresentano  $i$  serie di indeterminate ad  $n+1$  elementi ciascuna e nel complesso algebricamente indipendenti. Scriveremo brevemente  $(y_1), (y_2), \dots, (y_i)$  per i punti corrispondenti di  $S_n$  e  $K(y_1; \dots; y_i)$ ,

(4) Così Severi chiama la *zugeordnete Form*, ved. VAN DER WAERDEN-CHOW, *Zur algebraischen Geometrie*, IX, «Math. Annalen» (1937). HODGE-PEDOE (loc. cit.), la chiamano invece la forma di CAYLEY. Essa, nella forma iperplanare preferita da questi autori, rappresenta la condizione perché  $d+1$  iperpiani (cioè lo  $S_{n-d-1}$  loro intersezione) siano incidenti ad una  $V_d$  pura in un medesimo punto, mentre la forma puntuale esprime la condizione perché  $n-d$  punti individuino un  $S_{n-d-1}$  appoggiato a  $V_d$ . Sotto l'aspetto puntuale (duale di quello iperplanare) la forma associata era stata considerata fino dal 1915 nella Memoria di SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, «Annali di Matematica» (1915). In questa Memoria la forma associata apparisce anche in coordinate grassmanniane e restano così in essa condensati i due aspetti duali. Ved. pure, in proposito, del medesimo Autore, *La géométrie algébrique italienne, sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes*. Colloque de Géométrie algébrique, Liège (1949); *Geometria algebrica ed algebra astratta*, «Rend. del Seminario Matematico e Fisico di Milano» (1952). Nel presente lavoro preferiamo la forma puntuale di Severi perché essa presentasi in modo naturale, come vedremo cercando di rendere invariante l'idea di Kronecker-Severi ricordata poco sopra.

(5) Quindi le soluzioni  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  di  $S$  s'intendono in un'opportuna estensione di  $K$ , che non occorre precisare, nella maggior parte dei casi.

$K[y_1; \dots; y_i]$  le relative estensioni di  $K$ . Vogliamo costruire una successione di un numero finito ( $< n + 1$ ) di sistemi  $S^{(i)}$  associati ad  $S (= S^{(0)})$ . Le forme  $f_{ij}(y_1; \dots; y_i; x) = 0$  degli ordini  $m_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, r_i$ ) di  $S^{(i)}$  appartengono a  $K[y_1; \dots; y_i][x]$  e definiscono una varietà algebrica  $V^{(i)}$  rispetto a  $K(y_1; \dots; y_i)$ . Sia  $D_i(y_1; \dots; y_i; x)$  il m. c. d. delle dette forme e poniamo  $f_{ij} = D_i \varphi_{ij}$ . Se tutte le  $\varphi_{ij}$  sono indipendenti da  $x$ ,  $S^{(i)}$  sarà l'ultimo sistema associato. Altrimenti definiamo  $S^{(i+1)}$  come il sistema risultante alla Kronecker dalle equazioni omogenee binarie in  $\lambda, \mu$   $\varphi_{ij}(y_1; \dots; y_i; \lambda x + \mu y_{i+1})$  definite in  $K[y_1; \dots; y_i; y_{i+1}; x]$ . Sia  $W^{(i)}$  la varietà definita dalle  $r_i$  equazioni  $\varphi_{ij} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, r_i$ ).

È ben noto che le  $f_{i+1,j}(y_1; \dots; y_i; y_{i+1}; x)$  soddisfanno identità del tipo:

$$(I) \quad \lambda^p \mu^q f_{i+1,j} \equiv \sum_{h=1}^{r_i} A_{i+1,j,h}(\gamma_1; \dots; \gamma_i; \gamma_{i+1}; x; \lambda, \mu) \varphi_{ij}(\gamma_1; \dots; \gamma_i; \lambda x + \mu \gamma_{i+1})$$

in  $K[y_1; \dots; y_i; y_{i+1}; x; \lambda, \mu]$ . Dunque per  $p, q$  opportune e facendo ( $\lambda = 1, \mu = 0$ ) o ( $\mu = 1, \lambda = 0$ ) risulterà

$$f_{i+1,j}(\gamma_1; \dots; \gamma_i; \gamma_{i+1}; x) \equiv 0 \quad \text{mod. } (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ir_i});$$

e siccome, secondo le (I),  $f_{i+1,j}(\dots; \lambda x + \mu y_{i+1}) = \lambda^{m_{i+1,j}} f_{i+1,j}$ ; si conclude che le forme di  $S^{(i+1)}$  sono forme d'inerzia (*Trägheitsformen*)<sup>(6)</sup> del sistema  $\varphi_{ij} = 0$ , le quali, uguagliate a zero, rappresentano coni ad  $n - 1$  dimensioni di vertice  $(y_{i+1})$  intersecantisi nel cono generalmente impuro proiettante  $W^{(i)}$  dallo stesso punto. Si dimostrano dopo ciò facilmente le proprietà seguenti:

*L'interferenza di tutti i coni  $D_i = 0$ , per tutte le specializzazioni dei punti  $(y_1), (y_2), \dots, (y_i)$ , è la componente pura completa di dimensione  $n - 1 - i$  di  $V$ ;  $D_i(y_1; \dots; y_i; x) = 0$  è la relativa forma puntuale associata e se  $D_i = \prod \Delta_{ik}^{\sigma_{ik}}$  è la decomposizione fattoriale di  $D_i$  in  $K(y_1; \dots; y_i)[x]$  i fattori primi  $\Delta_{ik}$  in questo corpo sono le forme associate alle varietà irriducibili  $V^{(ik)}$  corrispondenti; gli esponenti  $\sigma_{ik}$  sono le molteplicità di  $V^{(ik)}$  entro  $V$  come varietà base del sistema lineare  $\Sigma$  associato (Severi)<sup>(7)</sup> e coincidono con quelle definite da questo Autore.*

Dunque il metodo esposto assegna al sistema  $S$  la varietà intersezione  $V = \sum \sigma_{ik} V^{(ik)}$ .

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — Specializzando successivamente i vertici in guisa che diventino vertici della piramide di riferimento, i sistemi  $S^{(i)}$  si specializzano nei sistemi eliminanti di Kronecker.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — Non è detto che qualche componente irriducibile di  $V$  non possa essere immersa in un'altra di maggior dimensione. Perché  $V$  si consideri come pura di dimensione  $d$  bisogna che non vi siano nemmeno componenti immerse.

(6) V. HURWITZ, *Ueber die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls*, « Annali di Matematica » (1913).

(7) Loc. cit. in (1).

**Geometria algebrica.** — *Tensori razionali di 1ª specie sopra una varietà algebrica.* Nota di ERICH KÄHLER, presentata (\*) dal Socio F. SEVERI.

Quando, nel 1932<sup>(1)</sup>, mostrai che i tensori razionali covarianti, olomorfi in ogni punto d'una varietà irriducibile senza singolarità, forniscono i più importanti invarianti birazionali di tale varietà, lasciai da parte i tensori razionali controvarianti o misti, perché questi non danno che invarianti birazionali relativi. Atteso ora il grande interesse che hanno suscitato le trasformazioni birazionali regolari, in seguito alla conferenza di Severi, tenuta alla celebrazione riemanniana di Berlino, nell'ottobre 1954, stimo opportuno di completare quelle mie osservazioni.

1. Sia  $V$  una varietà algebrica  $n$ -dimensionale irriducibile senza singolarità in uno spazio proiettivo o prodotto topologico di spazi proiettivi, e designi  $K$  il corpo delle funzioni razionali sopra la  $V$ .

Partendo da  $n$  funzioni  $x^1, x^2, \dots, x^n$  di  $K$ , algebricamente indipendenti, definiamo un *tensore razionale* sopra la  $V$  quale sistema  $A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s} \in K$ , che si muta secondo la legge

$$(1) \quad B_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s} = A_{l_1 l_2 \dots l_r}^{m_1 m_2 \dots m_s} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{l_r}}{\partial y^{i_r}} \cdot \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{m_1}} \dots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{m_s}},$$

quando si sostituiscono alle  $x^1, x^2, \dots, x^n$  altre funzioni  $y^1, y^2, \dots, y^n$  di  $K$ , algebricamente indipendenti. Tale tensore sarà detto *olomorfo* in  $P$  allora e soltanto allora che, scegliendo  $y^1, y^2, \dots, y^n$  in modo che le coordinate locali in  $P$  (cioè finite in un intorno del punto  $P$ ) siano funzioni olomorfe di  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , tutte le componenti (1) risultino funzioni olomorfe di  $y^1, y^2, \dots, y^n$ . Caratterizzando allora i *tensori di prima specie* con la condizione di essere olomorfi in ogni punto della  $V$ , si constata subito che ogni tensore di prima specie sulla  $V$  è anche di prima specie su ogni varietà in corrispondenza birazionale regolare con la  $V$ .

È ovvio altresì il fatto, che l'addizione (o sottrazione) e moltiplicazione di tensori di 1ª specie su una stessa varietà  $V$  danno sempre tensori di 1ª specie.

Come nel caso dei tensori covarianti, sono particolarmente importanti i tensori di tipo antisimmetrico. Se un tensore di grado  $n \cdot h$

$$(2) \quad A_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \dots A_{i_{n \cdot h} \dots i_{n \cdot h}}^{j_{n \cdot h} \dots j_{n \cdot h}}$$

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) *Forme differenziali e funzioni algebriche*, «Memorie della R. Accademia d'Italia», vol. III.

è antisimmetrico rispetto a ogni sistema d'indici designato con la medesima lettera latina, i suoi componenti si riducono, a meno del segno, ad un solo, sia  $A = A^{1 \dots n \ 1 \dots n \dots 1 \dots n}$ . In tal caso giova rilevare la legge di trasformazione del tensore scrivendo, mediante funzioni meramente simboliche  $f_1, \dots, f_n$ , le espressioni

$$A \left( \frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)} \right)^h,$$

che chiameremo *forme anticanoniche* <sup>(2)</sup> per  $h = 1$  e *forme antipluricanoniche* per  $h > 1$ , purché il tensore (2) che dà il coefficiente  $A$  sia di 1<sup>a</sup> specie.

Determiniamo, per esempio, le forme anticanoniche del piano proiettivo. Perché la forma

$$(3) \quad A(x, y) \frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)}$$

sia olomorfa in ogni punto al finito del piano, è necessario e sufficiente che  $A$  sia un polinomio. Applicando la trasformazione proiettiva  $x = 1/u$ ,  $y = v/u$ , si ottiene l'espressione

$$A \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) \frac{\partial (f, g)}{\partial (u, v)} u^3;$$

sicché la condizione di essere olomorfa all'infinito equivale a supporre  $A(x, y)$  di grado  $\leq 3$ . L'*antigenere* del piano, cioè il numero delle forme anticanoniche linearmente indipendenti del piano, è dunque 10.

Se si prende come Riemanniana del corpo delle funzioni razionali di due variabili indipendenti  $x, y$ , invece del piano proiettivo, il prodotto topologico di due rette, si trova  $A$  dover esser di grado  $\leq 2$  rispetto a  $x$  e di grado  $\leq 2$  rispetto a  $y$ , ottenendosi così il valore 9 dell'*antigenere* della Riemanniana suddetta, che evidentemente è in corrispondenza birazionale regolare con la quadrica <sup>(3)</sup>.

Si noterà il fatto, che le forme controvarianti di 1<sup>a</sup> specie sono numerose proprio in casi dove mancano le forme covarianti di 1<sup>a</sup> specie, il che fa presagire una loro speciale importanza per lo studio della razionalità delle varietà algebriche.

Le nozioni « Riemanniana » e « tensore di 1<sup>a</sup> specie » ammettono definizioni puramente aritmetiche, sulle quali non ci fermiamo qui.

2. Occupiamoci piuttosto di dimostrare (parlando per brevità soltanto delle superficie) che l'*antigenere* introdotto da Severi coincide con quello definito sopra mediante i tensori razionali di 1<sup>a</sup> specie. All'uopo ricordiamo il modo di tradurre in forma astratta la nozione (introdotta geometricamente

(2) Il sistema anticanonico è stato considerato e usato per la prima volta in un lavoro di SEVERI, *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, « Memorie della R. Accademia d'Italia », 1932; n. 27. Ved. pure SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Seconda Memoria), « Annali di Matematica », 1951; n. 9.

(3) Questi valori dell'*antigenere* sono i medesimi di quelli indicati da SEVERI al n. 9 dei suoi *Fondamenti* citati.

da Severi mezzo secolo fa) di curva virtuale sopra una superficie algebrica  $V$  senza singolarità (appartenente al corpo  $K$ ).

Ad ogni curva irriducibile  $C$  della  $V$  associamo l'anello locale  $S = S(C)$  costituito da tutti gli elementi di  $K$  che non hanno  $C$  come curva dei poli. È noto che ogni  $S$ -modulo ( $\neq K$ ) contenuto in  $K$  (in particolare ogni ideale in  $S$ ) è principale, cioè della forma  $x \cdot S$  ( $x$  essendo elemento di  $K$ , mentre  $x \cdot S$  designa la totalità degli elementi  $x \cdot y$  con  $y \in S$ ).

Un *divisore a sopra  $V$*  è una corrispondenza che ad ogni anello locale  $S$  del tipo suddetto associa un  $S$ -modulo  $a(S) \subset K$ ,  $a(S) \neq 0$ ,  $K$ , in modo arbitrario, però tale che solamente per un numero finito di anelli  $S$  sia  $a(S) \neq S$ .

La moltiplicazione dei divisori  $a, b$  (cioè l'addizione delle curve virtuali corrispondenti) si riduce mediante

$$(a \cdot b)(S) = a(S) \cdot b(S) \quad (\text{per ogni } S)$$

alla moltiplicazione degli  $S$ -moduli associati.

Partendo da due qualunque elementi  $x, y \in K$ , algebricamente indipendenti, si ottiene un divisore  $k$  ponendo per ogni  $S$

$$(4) \quad k(S) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot S,$$

dove  $u, v \in S$  siano scelti in modo che in almeno un punto  $p$  della curva corrispondente all'anello  $S$  il jacobiano  $\partial(u, v)/\partial(r, s)$ , preso rispetto a coordinate locali  $r, s$  in  $p$ , sia olomorfo e diverso da 0. (Si osservi che la definizione del modulo  $k(S)$  è indipendente dalla scelta di  $u, v$ ). Se si prende invece della coppia  $x, y$  un'altra coppia  $x', y'$  di elementi di  $K$ , algebricamente indipendenti, la costruzione analoga conduce ad un divisore  $k'$  *equivalente* a  $k$  nel senso che esiste un  $z \in K$  tale che

$$k'(S) = z \cdot k(S) \quad (\text{per ogni } S).$$

Le definizioni suddette di divisore, moltiplicazione di divisori, equivalenza di divisori, limitata all'uso di anelli locali  $S$  corrispondenti alle curve sopra la  $V$ , non sono birazionalmente invarianti. Per renderle tali si aggiungano in ognuno dei tre casi le condizioni analoghe rispetto a tutti gli anelli locali  $S$ , corrispondenti a curve irriducibili sopra un qualsiasi modello  $V'$  birazionalmente equivalente alla  $V$  <sup>(4)</sup>. Distingueremo le nuove nozioni invarianti dalle precedenti chiamandole *nozioni invarianti assolute*, mentre le precedenti saranno designate come *nozioni invarianti relative* (cioè invarianti solamente di fronte a trasformazioni birazionali regolari).

Ogni divisore (relativo o assoluto)  $a$  individua un *sistema lineare*  $\gamma_a$  costituito da tutti gli elementi  $x$  di  $K$  soddisfacenti alla condizione

$$x \cdot a(S) \subset S,$$

per ogni  $S$  (appartenente alla  $V$  o qualunque, secondo che sia relativo o assoluto).

(4) Ma non si deve esigere che solamente per un numero finito di anelli  $S$  sia  $a(S) \neq S$ .



Divisori equivalenti  $a, b$  individuano sistemi lineari  $\gamma_a, \gamma_b$  della medesima dimensione, perché da

$$a(S) = w \cdot b(S), \quad \text{con } w \in K \text{ fisso,}$$

segue la relazione  $\gamma_b = w \cdot \gamma_a$  (il cui senso è ovvio).

Come mostra la definizione (4) del divisore relativo  $k$ , la condizione  $z \in \gamma_k$  esprime precisamente che il differenziale doppio  $z \cdot dx \cdot dy$  non ha curve di poli sopra la  $V$  ed è pertanto di 1ª specie, sicché il sistema lineare  $\gamma_k$  corrisponde al sistema lineare di curve designato in geometria algebrica con  $C' - C$ , cioè al sistema canonico impuro.

L'inverso relativo  $k^{-1}$  del divisore relativo  $k$  individua un sistema lineare  $\gamma_{k-1}$  caratterizzato dal fatto che  $z \in \gamma_{k-1}$  significa la non-esistenza di curve di poli sopra la  $V$  della forma anticanonica

$$\frac{z}{dx \cdot dy},$$

la quale è dunque di 1ª specie, perché tale forma non può mai avere punti singolari isolati.

Ora il sistema  $C - C'$  considerato da Severi è individuato dall'inverso  $-(C' - C)$  dell'elemento  $C' - C$  nel gruppo abeliano costituito dalle classi di curve virtuali linearmente equivalenti, proprio come la classe individuata da  $k - 1$  è l'inverso della classe di  $k$  nel gruppo moltiplicativo delle classi di divisori relativi, equivalenti nel senso relativo.

È importante osservare che anche la definizione dell'antigenere data da Severi si appoggia sull'*inverso relativo* di  $C' - C$ .

### Geometria. — *Sui piani finiti a configurazione di Fano universale.*

Nota di LUCIO LOMBARDO-RADICE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Si chiama «configurazione di Fano» un quadrangolo piano completo nel quale i punti diagonali sono allineati (essa è perciò nient'altro che il piano grafico composto da 7 punti e 7 rette, con tre punti su ogni retta e tre rette per ogni punto, cioè il piano lineare sul campo di Galois con due elementi  $GF(2)$ ). Alla configurazione di Fano, concepita come proposizione configurazionale, daremo in questa Nota talvolta il nome di  $T_2$  (nella letteratura, è spesso indicata con il simbolo:  $\gamma_3$ ).

La proposizione  $T_2$ , che non è ovviamente mai verificata nel piano proiettivo reale (e più in generale nel piano sopra un corpo a caratteristica diversa da 2), è invece universale in ogni piano lineare sopra un corpo a caratteristica 2 <sup>(1)</sup>. È allora del tutto naturale porre la seguente questione: «quali sono i piani grafici nei quali la configurazione di Fano è uni-

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) Vedi BENIAMINO SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, I, Zanichelli, Bologna 1948, pp. 99-100 e 178-79; GUIDO ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Liguori, Napoli 1952, pp. 218-19.

versale?» In questa Nota, pur non affrontando il problema generale ora enunciato, si risponderà invece a una questione ad esso connessa, ma di portata assai più limitata, posta recentemente da Hanna Neumann, e che si ricollega ad alcuni fatti messi in luce da lavori comparsi negli ultimi anni. È stato dimostrato che:

a) se in un piano grafico  $\pi$  vale universalmente il teorema del quadrangolo completo, allora dal presentarsi della configurazione di Fano per un quadrangolo si deduce che essa è universale, cioè che essa vale per *ogni* quadrangolo (Pickert, 1952);

b) esistono però dei piani grafici nei quali la configurazione di Fano è verificata per *alcuni* quadrangoli, ma non per tutti (Lenz, 1953; Marshall Hall, 1954; Hanna Neumann, 1954); gli esempi addotti sono relativi a piani lineari su sistemi di Veblen-Wedderburn (algebre di V. W., o pseudo-corpi), e in particolare su algebre di V. W. associative rispetto al prodotto, cioè a piani lineari su *quasicorpi*.

In relazione alla scoperta di questo interessante fenomeno <sup>(2)</sup>, Hanna Neumann ha posto il seguente problema, che riferiamo con le sue stesse parole:

«Is a finite projective plane based on a near-field, or perhaps even any plane based on a general V. W. algebra, necessarily desarguesian if all its quadrangles have collinear diagonal points?».

In questa Nota verrà data risposta affermativa alla domanda suddetta nel caso dei piani finiti su quasicorpi; si dimostrerà precisamente che:

a) *In un piano finito su di un quasicorpo la configurazione di Fano è universale quando e soltanto quando il quasicorpo è un corpo, a caratteristica 2, e allora il piano stesso è desarguesiano.*

La proposizione a) sarà dimostrata come conseguenza della seguente:

b) *Se in un piano grafico finito  $\pi$  la configurazione di Fano è universale, e se in esso esistono tutte le omologie (non speciali) di dato asse  $r$  e di dato centro  $O$  (non su  $r$ ) allora  $\pi$  è desarguesiano, e coincide perciò con il piano lineare sopra un corpo.*

Si ha infatti (Zappa, 1954; Lombardo-Radice, 1954) che il piano lineare su di un quasicorpo, destro o sinistro, possiede certamente tutte le omologie non speciali di opportuno asse  $r$  e di opportuno centro  $O$  non su  $r$  (ved. lavori citati nella bibliografia).

Alla dimostrazione della proposizione b) saranno dedicati i successivi due numeri; i risultati esposti in 1 si basano solo sulla ipotesi:

(T) *La configurazione di Fano è universale in  $\pi$ ;*

quelli esposti in 2 sono invece conseguiti sfruttando successivamente le ulteriori ipotesi:

(O) *Esistono in  $\pi$  tutte le omologie (non speciali) di opportuno asse  $r$  e di opportuno centro  $O$  (non su  $r$ );* (F)  $\pi$  è finito.

(2) Detto fenomeno si può verificare, come ha fatto recentemente vedere H. NEUMANN, anche se il rango del piano non è una potenza di 2 (il primo esempio, quello dato dal LENZ, si riferiva invece a un piano di rango  $16 = 2^4$ ).

Come apparirà dal corso della dimostrazione, queste ipotesi possono essere indebolite, mantenendo la (O) e la (F), e sostituendo la (T) con la:

(T') La configurazione di Fano ha luogo per tutti i quadrangoli per i quali un vertice cade in un punto fisso della  $r$ , un altro in un punto qualunque della  $r$ , essendo i rimanenti due in posizione arbitraria.

1. Introduciamo nel piano grafico  $\pi$  coordinate di Hall <sup>(3)</sup>, e studiamo il «campo naturale» da esse formato rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione, che si deducono dall'operazione ternaria di Hall nel seguente modo:

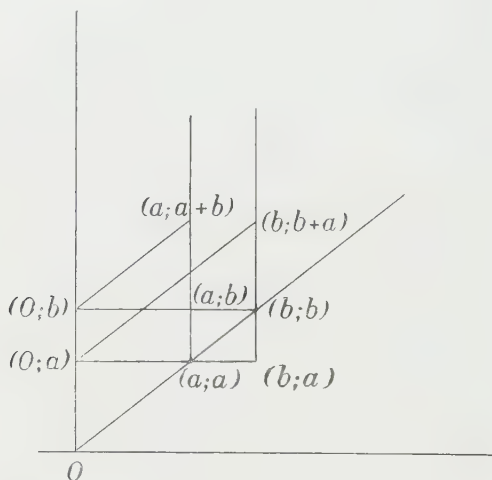


Fig. 1.

$$a + b = a \cdot 1^\circ b \quad ; \quad ab = a \cdot b^\circ 0.$$

Supponiamo che in  $\pi$  valga l'ipotesi (T), e scegliamo a nostro piacere il sistema di riferimento. Allora (definizione diretta di «addizione naturale»)  $a + b$  è l'ordinata del punto della parallela condotta da  $(0, b)$  alla retta unitaria che ha per ascissa  $a$ . Si ha allora:

$$A_1. \quad a + b = b + a.$$

I) Nel quadrangolo  $(b, b); (a, a); X; Y$  ( $a \neq b$ , chè altrimenti la proposizione è ovvia), i punti diagonali sono:

Z (punto all'infinito della retta unitaria);  $(a, b); (b, a)$ ; nella ipotesi (T) si ha allora l'allineamento:

$$Z; (a, b); (b, a).$$

II) nel quadrangolo  $(a, a + b); (0, b); X; Y$  i punti diagonali sono:

$$Z; (0, a + b); (a, b), \text{ i quali sono allineati per la (T).}$$

III) nel quadrangolo  $(b, b + a); (0, a); X; Y$  i punti diagonali sono:

$$Z; (0, b + a); (b, a); \text{ allineati per (T).}$$

Da I), II), III), si deduce l'allineamento dei punti:

$$Z; (a, b); (b, a); (0, a + b); (0, b + a);$$

ma allora gli ultimi due punti di esso, appartenendo ambedue alla  $x = 0$ , coincidono:  $a + b = b + a$ .

(3) Vedi la Memoria di N. HALL, *Projective planes*, «Trans. of the Acc. Math. Soc.», 54, 1943. Nel presente lavoro non si considera però l'operazione ternaria, ma solo le due operazioni binarie «naturali» di addizione e moltiplicazione, che da essa si deducono; e di quelle si richiama la definizione diretta.

$A_2$ . — Il luogo dei punti  $(x, y)$  per i quali  $x + y = k$  è la retta  $(o, k) \cup Z$  (la parallela per  $(o, k)$  alla retta unitaria). Infatti, dal ragionamento or ora svolto, si deduce che:

$$(x, y); (o, k); Z$$

sono allineati quando e soltanto quando:

$$x + y = k.$$

$$A_3. a + (b + k) = (a + b) + k.$$

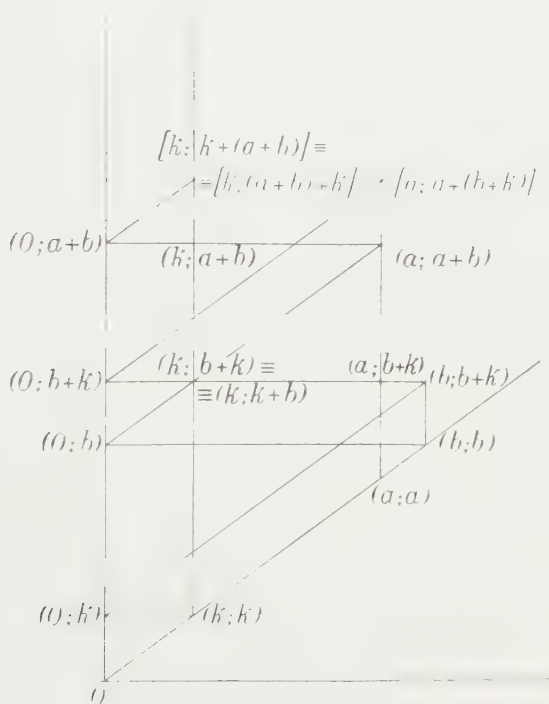


Fig. 2.

Giacché, per  $A_1$ ,  $(k, b + k) = (k, k + b)$ , saranno allineati i 4 punti:

$$(o, b); (k, b + k) = (k, k + b); (a, a + b); Z.$$

Inoltre:

I) Sono allineati i punti:

$$(k, a + b); (a, b + k); Z$$

come punti diagonali del quadrangolo  $(k, b + k); (a, a + b); X; Y$ ;

II) sono del pari allineati i punti:

$$(a, b + k); (o, a + (b + k)); Z$$

come punti diagonali del quadrangolo:  $(a, a + (b + k)); (o, b + k); X; Y$ ;

III) sono infine allineati i punti:

$$(k, a + b); (0, k + (a + b)); Z$$

come punti diagonali del quadrangolo:  $(k, k + (a + b)); (0, a + b); X; Y$ . Da I), II), III), discende che appartengono a un medesimo allineamento i punti:

$$Z; (k, a + b); (a, b + k); (0, a + (b + k)); (0, k + (a + b));$$

e in tale allineamento gli ultimi due punti, giacendo ambedue sulla  $x = 0$ , debbono coincidere:  $a + (b + k) = k + (a + b) = (\text{per la } A_1) = (a + b) + k$ .

Poiché nell'anello ternario delle coordinate si ha sempre che l'equazione  $a \cdot m^\circ z = c$  (dati comunque  $a, m, c$ ) ammette un'unica soluzione  $z$ , se ne deduce in particolare:

$A_4$ . - Esiste ed è unico l'opposto destro  $a'$  di  $a$ , cioè l'elemento  $a'$  tale che:

$$a \cdot 1^\circ a' = a + a' = 0;$$

ed esso coincide, per  $A_1$ , con l'opposto sinistro  $a''$  ( $a' + a = 0$ ).

In conclusione si ha che:

A. In un piano grafico nel quale  $T_2$  (configurazione di Fano) è universale, scelto comunque un riferimento, le coordinate formano rispetto all'addizione « naturale » un gruppo abeliano, nel quale ogni elemento ha ordine 2 <sup>(4)</sup>.

L'ultima affermazione discende da:

$A_5$ .  $a + a = 2a = 0$ . Infatti, la retta  $(0, a) \cup (a, 0)$  dovendo contenere  $Z$ , coincide con la  $(0, a) \cup (a, 2a)$ , e perciò  $(a, 2a)$  coincide con  $(a, 0)$ ;  $2a = 0$ .

2. Accanto alla ipotesi (T) (universalità della configurazione di Fano) introduciamo ora l'ipotesi (O) ( $\pi$  possiede tutte le omologie, non speciali, di dato asse  $r$  e dato centro  $O$  non su  $r$ ). Dette omologie formano allora, come è subito visto, un gruppo  $G$ . Scelta  $r$  come retta all'infinito,  $O$  come origine (e allora le omologie in questione potranno chiamarsi « omotetie » di centro  $O$ ) dimostriamo che:

M. Le coordinate del piano formano rispetto al prodotto « naturale » un gruppo  $M$  isomorfo a  $G$ .

Chiamiamo  $g_a$  l'omotetia di centro  $O$  che porta  $(1, 1)$  in  $(a, a)$ ;  $g_b$  quella che porta  $(1, 1)$  in  $(b, b)$ . Per la definizione di prodotto (« naturale ») si ha che  $y = ab = a \cdot b^\circ$  o è l'ordinata del punto della retta  $O \cup (1, b)$  che ha per ascissa  $a$ . Si ha allora (vedi fig. 3) che  $g_a$  porta:

$(1, b)$  in  $(a, ab)$ ;  $(b, b)$  in  $(ab, ab)$ ; quindi  $g_a g_b$  (si esegua prima l'operazione scritta a destra) porta  $(1, 1)$  in  $(ab, ab)$ . Perciò:

$$ab = c$$

quando e soltanto quando:

$$g_a g_b = g_c.$$

(4) Trovo questo risultato, ottenuto per diversa via, nella Memoria di SKORNJAKOV citata nella bibliografia; in essa è fatto risalire a P. K. RASCEVSKIJ.



Dimostriamo infine che, sempre nelle ipotesi (T) e (O), vale anche la:

$$D. \ k(b+a) = kb + ka.$$

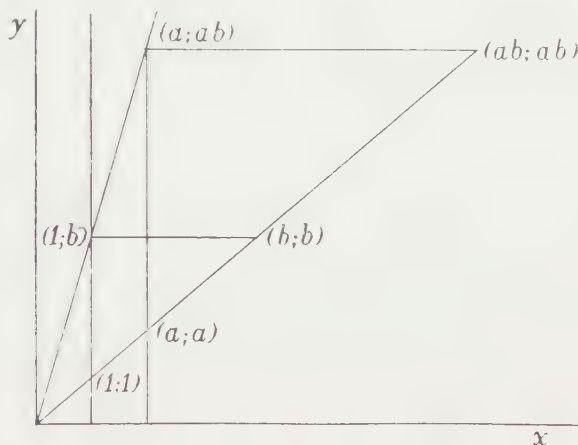


Fig. 3.

Consideriamo l'omotetia  $g_k$ , cioè quella che porta  $(1, 1)$  in  $(k, k)$ . Si ha allora che  $g_k$  porta:

$$(1, a) \text{ in } (k, ka); (1, b) \text{ in } (k, kb); (b, b) \text{ in } (kb, kb) \text{ (v. fig. 4).}$$

Nei triangoli  $(1, a); (1, b); (b, b)$  e  $(k, ka); (k, kb); (kb, kb)$  vertici corrispondenti sono allineati con O, e due coppie di lati corrispondenti sono paralleli; per l'ipotesi (O) sarà allora anche:

$$(1, a) \cup (b, b) \parallel (k, ka) \cup (kb, kb).$$

Ma allora, condotte da  $(b, b), (kb, kb)$  le parallele all'asse  $y$ , da  $(1, a), (k, ka)$  le parallele all'asse  $x$ , si ha che nei triangoli:

$$(1, a); (b, b); (b, a);$$

$$(k, ka); (kb, kb); (kb, ka)$$

lati corrispondenti sono paralleli, mentre le congiungenti i vertici corrispondenti  $(1, a)$  e  $(k, ka)$ ,  $(b, b)$  e  $(kb, kb)$  passano per O: per l'ipotesi (O) si ha allora che anche la congiungente  $(b, a)$  e  $(kb, ka)$  passa per O. Insomma, nell'omotetia  $g_k$  il corrispondente del punto  $(b, a)$  è  $(kb, ka)$ . In  $g_k$  alla retta  $(b, a) \cup Z$  corrisponderà allora la  $(kb, ka) \cup Z$  (che è diversa dalla precedente se  $b \neq a$ ). Giacché (vedi  $A_2$ ) sulla  $(b, a) \cup Z$  è situato il punto  $(o, b+a)$ , allora il punto  $(o, k(b+a))$ , corrispondente di detto punto in  $g_k$ , sarà situato sulla  $(kb, ka) \cup Z$ . Ma allora, per quanto si è visto in  $A_2$ , essendo:

$$x + y = kb + ka$$

l'equazione della  $(kb, ka) \cup Z$ , si avrà:

$kb + ka = k(b+a)$  (in particolare, se  $b = a$ , si vede anche in modo diretto che  $k(b+b) = ko = o = kb + kb$ ).

Introduciamo ora, oltre alle ipotesi (T) ed (O), l'ipotesi (F) della finitezza di  $\pi$ . Si ha allora che:

*Le coordinate di un piano finito, nel quale la configurazione di Fano è universale, e nel quale esistono tutte le omologie speciali di dato asse  $r$  e di dato centro  $O$  non su  $r$ , formano un sistema cartesiano qualora si fissi  $r$  come retta impropria e  $O$  come origine degli assi.*

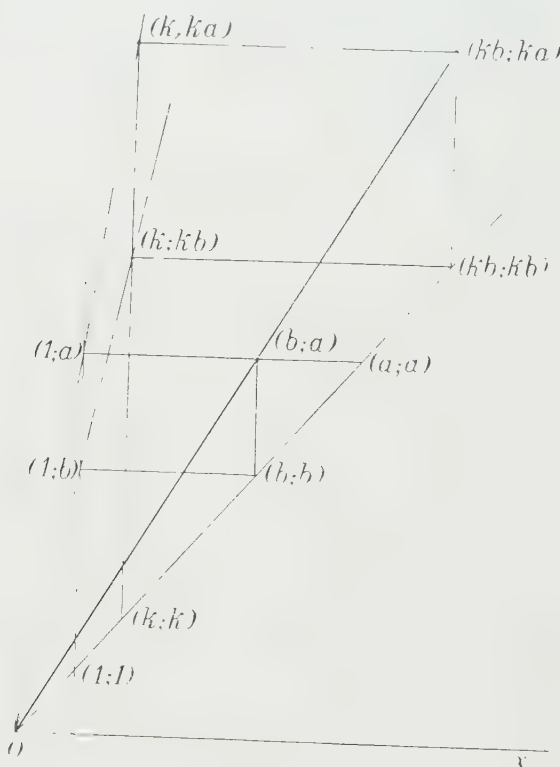


Fig. 4.

Gli assiomi di un sistema cartesiano (sistema algebrico a doppia composizione binaria) saranno richiamati nel corso stesso della dimostrazione.

(0) Gli elementi formano gruppo di fronte all'addizione ( $o$  = elemento neutro del gruppo additivo). - È contenuto in A:

(1) Quale che sia  $a$ ,  $oa = ao = o$ . - Discende dalla definizione stessa di prodotto naturale.

(2) Da  $a \neq b$ ,  $c \neq d$  segue  $ca - cb \neq da - db$ . È conseguenza di D, M: infatti, per D,  $ca - cb = c(a - b)$ ;  $da - db = d(a - b)$ ; poiché per ipotesi  $a - b \neq o$  e  $c \neq d$ , si ha, per M:  $c(a - b) \neq d(a - b)$ .

(3)  $1a = a1 = a$  per ogni  $a$ . — È contenuto in M.

(4) Se  $a \neq b$ , esiste un  $x$  tale che  $xa - xb = c$  ( $x$  è allora unico per (2)). Per D,  $xa - xb = x(a - b) = c$ ; essendo  $a - b \neq 0$ , se  $c = 0$  si ha come soluzione  $x = 0$ , in conseguenza di (1); se  $c \neq 0$  si ha una soluzione per M.

(5) Dati  $a, b, c$  con  $a \neq b$  esiste un  $y$  tale che  $-ay + by = c$  ( $y$  è allora unico per (2)). Se una soluzione esiste, essa è necessariamente unica. Infatti, da:

$$-ay + by = c = -az + bz \text{ discende:}$$

$by - bz = ay - az$ ;  $b(y - z) = a(y - z)$ ; poiché si è supposto  $b \neq a$  deve essere allora necessariamente:  $y - z = 0$ . Se il piano è finito, il numero delle coordinate è finito, e sia  $n$ : facendo assumere a  $y$  gli  $n$  valori distinti possibili,  $-ay + by$  assumerà  $n$  valori distinti, cioè tutti i valori possibili, e tra essi sarà compreso il  $c$  prefissato.

Per un teorema di R. Baer, si ha che le coordinate di  $\pi$  formano un sistema cartesiano rispetto ad un dato riferimento quando e soltanto quando  $\pi$  ammette tutte le traslazioni di centro  $Y^\infty$  (= punto all'infinito dell'asse  $y$ ). Giacché nel nostro ragionamento, fissato  $O$  come origine degli assi ed  $r$  come retta impropria, il punto all'infinito dell'asse  $y$  sulla  $r$  può essere scelto a piacere, si ha addirittura che:

$\pi$  è un piano di traslazione, ammette cioè tutte le omologie speciali di asse  $r$  e centro  $Y$  comunque scelto su  $r$ .

In conclusione  $\pi$ , ammettendo tutte le traslazioni e tutte le omotetie di centro origine è, per un risultato ben noto, un piano lineare sopra un corpo finito<sup>(5)</sup>. Restano con ciò dimostrati il teorema b) della introduzione, e il teorema a) che ne è conseguenza.

## BIBLIOGRAFIA

(si citano solo i lavori aventi diretta attinenza con la questione trattata, e non gli scritti aventi carattere più generale).

HANFRIED LENZ, *Beispiel einer projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke Diagonalepunkte haben*, « Archiv der Mathematik », 4, 327-30 (1953).

LUCIO LOMBARDO-RADICE, *L'inversione come qualità nei piani su sistemi cartesiani*, « Ricerche di Matematica », vol. III, pp. 31-34 (1954).

HANNA NEUMANN, *On some finite non-desarguesian planes*, « idem », 6, 36-41 (1954).

GUNTER PICKERT, *Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalepunkten*, « Mathematische Zeitschrift », vol. 56, fasc. 2, 131-133 (1952).

L. A. SKORNJAKOV, *Proektivnye ploskosti*, « Uspechi matematičeskich nauk », vol. VI, fasc. 6 (46), 1951; in particolare le pp. 127-30.

GUIDO ZAPPA, *Sulle omologie dei piani h-l-transitivi e dei piani su quasicorpi*, « ibidem », pp. 35-39 (1954).

(5) Vedi BENIAMINO SEGRE, op. cit., pp. 110-121; per il caso finito, vedi anche il cap. VI del libro già citato di GUIDO ZAPPA.

**Meccanica.** — *Condizioni caratteristiche per la validità dei principi di Hamilton e di Hölder.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

Il principio variazionale più fecondo della meccanica classica, il principio di Hamilton, afferma, nel caso conservativo, che fra tutti i moti variati sincroni che rispettano le configurazioni estreme, il moto naturale del sistema, supposto a vincoli bilateri e lisci, è quello che rende stazionaria l'azione hamiltoniana:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt.$$

La condizione che i moti variati di confronto siano sincroni è proprio essenziale o esiste invece una classe più lata di movimenti variati (necessariamente asincroni) rispetto ai quali il moto naturale è ancora caratterizzato come quello che rende stazionaria l'azione hamiltoniana?

Una risposta a questa domanda darò nella presente Nota provando che effettivamente una siffatta classe di moti variati asincroni esiste. Impostando la questione in forma più generale giungerò poi facilmente alla determinazione della più vasta classe di moti variati rispetto ai quali il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria rispettivamente l'azione

hamiltoniana, l'azione hölderiana  $\int_{t_0}^{t_1} 2T dt$  e l'azione potenziale  $\int_{t_0}^{t_1} 2U dt$ .

Per maggior chiarezza ritengo opportuno richiamare brevemente i concetti di moto variato e di variazione che hanno parte essenziale nel seguito.

Denotiamo con  $M$  il moto naturale del sistema e sia  $P_i$  la posizione raggiunta da un suo generico punto nell'istante  $t$ . Diamo al sistema uno spostamento virtuale relativo all'istante  $t$  e sia  $\delta P_i$  lo spostamento subito dal punto  $P_i$ . Se si indica allora con  $\delta t$  un infinitesimo funzione regolare e  $a$  *a priori* arbitraria di  $t$ , il movimento  $M_v$  nel quale il punto  $P_i$  raggiunge all'istante  $t + \delta t$  la posizione  $P_i + \delta P_i$  si dirà *moto variato* del moto  $M$ .

È ben chiaro che fra il moto naturale  $M$  e il moto variato  $M_v$  intercede sempre una corrispondenza biunivoca di posto, per cui ad ogni configurazione  $P_i$  assunta dal sistema in  $M$ , fa riscontro in  $M_v$  una ben determinata configurazione  $P_i + \delta P_i$ . Gli istanti in cui queste due configurazioni vengono rispettivamente raggiunte dal sistema nei due moti non sono però in generale identici: sono identici se e solo se la funzione *a priori* arbitraria  $\delta t$  viene precisata nella funzione identicamente nulla. In tal caso il moto variato dicesi *sincrono* in quanto fra il moto naturale ed il moto variato intercede una corrispondenza biunivoca oltre che di posto anche di tempo. È chiaro poi che ad ogni moto variato  $M_v$  (corrispondente cioè ad una scelta

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

particolare della funzione infinitesima  $\delta t$ ) si può sempre pensare di associare quel moto variato sincrono  $M_s$  in cui i punti del sistema conservano le stesse traiettorie (ma non le leggi orarie con cui tali traiettorie sono percorse).

Consideriamo ora una qualsiasi quantità  $Q$  relativa al movimento ed indichiamo con  $\delta_v Q$  la differenza infinitesima o variazione che, istante per istante, intercede fra le determinazioni che a  $Q$  competono nel moto variato  $M_v$  e nel moto  $M$ . Se la quantità  $Q$  è posizionale, la variazione  $\delta_v Q$  coincide con la variazione  $\delta Q$  che ad essa compete nel passaggio dal moto naturale  $M$  al moto variato sincrono associato ad  $M_v$ ; ma se  $Q$  non è una quantità puramente posizionale,  $\delta_v Q$  differisce certamente da  $\delta Q$  e vi differisce per dei termini che, contenendo la funzione  $\delta t$ , *a priori* arbitraria, sono appunto quelli che rappresentano il contributo imputabile al mancato sincronismo.

Così è ben noto che, essendo  $\mathbf{v}$  la velocità del generico punto del sistema in moto, risulta

$$(1) \quad \delta_v \mathbf{v} = \delta \mathbf{v} - \mathbf{v} \frac{d}{dt}(\delta t);$$

e che anche, indicata con  $T = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2$  l'energia cinetica complessiva del sistema, sussiste la relazione

$$(2) \quad \delta_v T = \delta T - 2T \frac{d}{dt}(\delta t) = \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \delta \mathbf{v}_i - 2T \frac{d}{dt}(\delta t).$$

Dopo queste premesse veniamo a stabilire i principî di Hamilton e di Hölder e mostriamo come la validità di questi due fondamentali principî variazionali non sia subordinata alla considerazione di movimenti variati rispettivamente sincroni o asincroni isoenergetici. Dalla semplice analisi che svolgerò apparirà qual'è in realtà la classe più generale dei moti variati di confronto subordinatamente ai quali la validità dei due principî è assicurata.

Partiamo dall'equazione simbolica della dinamica:

$$(3) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \delta \mathbf{P}_i = 0$$

e riflettiamo sul fatto che un generico moto  $M$  del sistema la rende soddisfatta istante per istante per *tutti* gli spostamenti virtuali  $\delta \mathbf{P}_i$ , in particolare per quei  $\delta \mathbf{P}_i$  che corrispondono ad un qualsiasi moto variato  $M_v$ .

Poiché in siffatto moto i  $\delta \mathbf{P}_i$  sono funzioni assegnate del tempo come pure sono funzioni del tempo tutte le altre grandezze in gioco nella (3), integrando fra due generici istanti  $t_0, t_1$  si trova:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \delta \mathbf{P}_i \right) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i \times \delta \mathbf{P}_i \right) dt = \\ &= \left[ \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \delta \mathbf{P}_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \delta \mathbf{v}_i \right) dt. \end{aligned}$$



In forza alla (2), nel caso conservativo, si ottiene allora subito:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta U + \delta_v T + 2T \frac{d}{dt} (\delta t) \right] dt = \left[ \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \times \delta \mathbf{P}_i \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Imponiamo ora agli spostamenti virtuali  $\delta \mathbf{P}_i$  di annullarsi negli istanti estremi  $t_0, t_1$ ; prendiamo cioè in considerazione fra gli infiniti moti variati soltanto quelli, pure in numero infinito, che hanno comuni le configurazioni estreme. Per ogni moto naturale del sistema, rispetto ai moti variati  $M_v$  ora definiti, sussiste allora la relazione:

$$(4) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta U + \delta_v T + 2T \frac{d}{dt} (\delta t) \right] dt = 0.$$

Ci domandiamo ora:

Quale ulteriore restrizione alla natura dei moti variati occorre imporre affinché la (4) esprima l'annullarsi della variazione di una opportuna *azione*,

$$(5) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} f dt?$$

In particolare:

Quali sono i moti variati più generali rispetto ai quali il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria l'azione hamiltoniana

$$(6) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt,$$

oppure l'azione hölderiana o cinetica

$$(7) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt?$$

La risposta alle questioni ora poste si può ottenere come segue. Imponendo alla (4) di esprimere la stazionarietà dell'azione (5), si ottiene la equazione

$$(8) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta U + \delta_v T + 2T \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = \delta_v \left[ \int_{t_0}^{t_1} f dt \right] = 0.$$

Ma il simbolo  $\delta_v$  è commutabile con l'integrazione; inoltre è ben noto che  $d/dt (\delta t) dt = \delta_v (dt)$  mentre  $\delta U = \delta_v U$ , in quanto  $U$  è una quantità posizionale. Dall'ultima relazione scritta segue allora:

$$(9) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta_v (T + U - f) + (2T - f) \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = 0.$$

La (9) traduce appunto la cercata ulteriore condizione cui devono soddisfare i moti variati affinché la (4) esprima la stazionarietà dell'azione (5).

1° Se nella (9) si assume  $f = 2T$ , essa diviene

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta_v E dt = 0.$$

Sussiste dunque il seguente principio variazionale:

Per un sistema materiale a vincoli bilateri e privi di attrito, soggetto a sollecitazione conservativa, il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria l'azione cinetica (7) rispetto a tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato, risulti verificata la condizione

$$(10) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta_v E dt = 0.$$

Come si vede questo principio è alquanto più generale di quello di Hölder. Se i moti variati sono isoenergetici, cioè nel passaggio dal moto naturale al moto variato rimane inalterata l'energia totale ( $\delta_v E = 0$ ), la (10) è verificata e il principio enunciato si riduce a quello di Hölder. La (10) stessa ci rivela però che le condizioni per la stazionarietà dell'azione cinetica sono più late: affinché tale stazionarietà abbia luogo nel moto naturale rispetto ai moti variati *occorre e basta* che l'integrale della variazione di energia totale nell'intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$  sia nullo, che i moti variati siano cioè *isoenergetici in media*.

2° Se nella (9) si assume  $f = T + U$ , essa diviene

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ E \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = 0.$$

Il corrispondente principio variazionale è il seguente:

Per un sistema materiale a vincoli bilateri e privi di attrito, soggetto a sollecitazione conservativa, il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria l'azione hamiltoniana (6) in confronto a tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato risulti verificata la condizione

$$(11) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ E \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = 0.$$

Questo è un principio più generale del principio di Hamilton. Se i moti variati sono sincroni, cioè la funzione  $\delta t$  viene specializzata nella funzione identicamente nulla, la (11) è verificata e il corrispondente principio variazionale è quello di Hamilton. Ma se i moti variati, *pur non essendo sincroni*, sono tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato la (11) risulti verificata, allora la stazionarietà dell'azione hamiltoniana nel moto naturale rispetto a tali moti variati è ancora assicurata.

Poiché la (11) può scriversi

$$(11') \quad \delta_v \left[ \int_{t_0}^{t_1} E dt \right] - \int_{t_0}^{t_1} \delta_v E dt = 0,$$

si conclude anche che per la stazionarietà dell'azione hamiltoniana nel moto naturale, occorre e basta che, nel passaggio dal moto naturale al moto variato, l'integrale della variazione di energia totale, eguagli la variazione di una metà dell'*azione totale*,

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2 E dt.$$

3° Se nella (9) si assume  $f = 2 U$ , essa diviene

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta_v E + 2 E \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = 0.$$

Il corrispondente principio variazionale è il seguente:

Per un sistema materiale a vincoli bilateri e privi di attrito, soggetto a sollecitazione conservativa, il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria l'*azione potenziale*

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2 U dt$$

in confronto a tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato risulti verificata la condizione

$$(12) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta_v E + 2 E \frac{d}{dt} (\delta t) \right\} dt = 0.$$

Il principio ora stabilito è più generale del principio dell'azione potenziale stazionaria che ho stabilito in una precedente Nota <sup>(1)</sup> Infatti la (12) può formalmente scriversi in uno qualunque dei modi seguenti:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta_v [E dt^2]}{dt} = \int_{t_0}^{t_1} \delta_v [\log (E dt^2)] E dt = \int_{t_0}^{t_1} 2 \sqrt{E} \delta_v (\sqrt{E} dt) = 0.$$

Si vede allora che se i moti variati sono *isocronoenergetici*, cioè nel passaggio dal moto naturale al moto variato si mantiene inalterata la quantità  $Q = E dt^2$ , la (12) risulta verificata e il principio che si ottiene è appunto il citato principio dell'azione potenziale stazionaria. Ma più in generale la stazionarietà dell'azione potenziale nel moto naturale è assicurata rispetto

(1) E. STORCHI, *Sul principio dell'azione potenziale stazionaria*, « Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. XIV, fasc. 6.

a tutti e soli quei moti variati tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato la (12) risulti soddisfatta.

Poiché la (12) può scriversi

$$(12') \quad \delta_v \left[ \int_{t_0}^{t_1} 2 E dt \right] - \int_{t_0}^{t_1} \delta_v E dt = 0,$$

si conclude anche che per la stazionarietà dell'azione potenziale nel moto naturale, occorre e basta che, nel passaggio dal moto naturale al moto variato, l'integrale della variazione di energia totale <sup>(2)</sup>, eguagli la variazione dell'azione totale.

Da quanto fin qui esposto appare che i tre principî generalizzati di Hölder, di Hamilton e dell'azione potenziale sono in realtà intimamente collegati, in quanto casi particolari di un unico principio, quello che afferma la stazionarietà nel moto naturale dell'azione (5) rispetto ai moti variati tali che, nel passaggio dal moto naturale al moto variato, la condizione (9) sia verificata.

Significativo il fatto che la condizione caratteristica cui devono soggiacere i moti variati di confronto affinché il moto naturale sia caratterizzato come quello che rende stazionaria rispettivamente l'azione cinetica

$\int_{t_0}^{t_1} 2T dt$ , l'azione hamiltoniana  $\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt$ , l'azione potenziale  $\int_{t_0}^{t_1} 2U dt$  è semplicemente questa: che nel passaggio dal moto naturale al moto variato l'integrale della variazione di energia totale sia nullo o eguagli rispettivamente la metà o l'intera variazione dell'azione totale.

Ma più significativo mi sembra il poter sottolineare la circostanza che la validità di principî fondamentali come i principî di Hamilton e di Hölder è in realtà subordinata alla considerazione di moti variati di confronto per i quali si annulla non la variazione di una opportuna quantità fisica <sup>(3)</sup>, bensì l'integrale, eseguito rispetto al tempo, di una opportuna quantità fisica, integrale che, peraltro, presenta a sua volta le dimensioni di un'azione <sup>(4)</sup>.

(2) Si rammenti che, a differenza del caso in esame, tale integrale deve essere nullo per la validità del principio di Hölder generalizzato e deve eguagliare la variazione di una metà dell'azione totale per la validità del principio di Hamilton generalizzato.

(3) Il tempo nel caso del principio di Hamilton, l'energia totale nel caso del principio di Hölder.

(4) È anzi interessante osservare che non può mai darsi il caso, qualunque sia la  $f$  funzione di  $T$  ed  $U$ , che il suddetto integrale esprima a sua volta la variazione di una opportuna azione. Infatti, supposto  $f = f(T, U)$ , il primo membro della (9) diviene

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial T} \right) \delta_v T + dt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial U} \right) \delta_v U + (2T - f) \delta_v (dt) \left\{ \right.$$

e, qualunque sia la funzione  $f$ , la forma differenziale sotto il segno di integrale, nelle tre variabili  $T, U, dt$ , non può essere esatta, risultando

$$\frac{\partial}{\partial (dt)} \left[ dt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial T} \right) \right] \cdot 1 - \frac{\partial f}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial T} (2T - f) = 2 - \frac{\partial f}{\partial T}.$$

**Meccanica.** — *Riduzione alle quadrature di un notevole problema di stereodinamica.* Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Si considera un solido  $\mathcal{C}$  a struttura giroscopica del cui contorno fa parte una porzione di superficie materiale sferica  $\sigma$  di centro  $O$  appartenente all'asse giroscopico di  $\mathcal{C}$ .

Si studia il moto di  $\mathcal{C}$  sotto l'azione della sola gravità, mentre  $\sigma$  rotola senza strisciare su un piano orizzontale (trottola a piede sferico).

Si riesce a determinare un nuovo integrale primo, il quale assieme a due altri integrali primi, quello ben noto dell'energia e quello di Jellet<sup>(1)</sup>, permette di ridurre il sistema, anolonomo, alle quadrature.

2. Si pensi dunque  $\mathcal{C}$  appoggiato su un piano  $\pi$  orizzontale scabro in modo che il punto  $\Gamma$  di contatto appartenga a  $\sigma$ .

Volendo studiare i moti di puro rotolamento di un tale sistema sotto l'azione del solo peso, finché il punto  $\Gamma$  appartiene a  $\sigma$ , faremo le seguenti posizioni:

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  versori di una terna solidale con l'origine nel baricentro  $G$  di  $\mathcal{C}$  e  $\mathbf{k}$  diretto lungo l'asse giroscopico e orientato nel verso di  $OG$ ,

$\mathbf{x} = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}$  versore della verticale ascendente,

$\mathbf{K}_G$  momento delle quantità di moto rispetto a  $G$ ,

$l = |OG|$ ,

$a$  raggio di  $\Sigma$ ,

$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$  velocità angolare istantanea di  $\mathcal{C}$ ,

$A, C$  momenti d'inerzia rispetto ad un generico asse normale all'asse giroscopico e rispetto a questo asse,

$\omega_3 = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$ ,

$\theta, \varphi, \psi$  angoli di Eulero della terna  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  rispetto ad una terna fissa  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 = \mathbf{x}$ .

Con queste posizioni l'equazione del moto è

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} + (a\mathbf{x} + l\mathbf{k}) \wedge m \left( \frac{d^2\mathbf{G}}{dt^2} + g\mathbf{x} \right) = 0,$$

ove, tenuto conto del vincolo cinetico di puro rotolamento, risulta

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (a\mathbf{x} + l\mathbf{k}).$$

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) E. J. ROUTH, *Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a system of Rigid Bodies* (London), 1905, 189-192; E. J. JELLET, *Theory of Friction* (Dublin and London), 1905, 189-192.



Alle equazioni (1), (2) va aggiunta l'equazione esprimente l'invariabilità di  $\mathbf{x}$ , con la quale resta completamente impostato il problema dinamico.

3. Sussiste per il sistema dinamico considerato l'integrale dell'energia, in quanto, essendo realizzato il vincolo di puro rotolamento, le reazioni vincolari fanno lavoro nullo. Questo integrale assume la forma

$$(3) \quad \frac{1}{2} \mathbf{K}_G \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} m v_G^2 + mgl \mathbf{k} \times \mathbf{x} = E_0,$$

ove per la (2) risulta

$$(4) \quad v_G^2 = (a^2 + l^2 + 2al\gamma_3)(p^2 + q^2) + (a^2 + 2al\gamma_3)r^2 - a^2\omega_3^2 - 2alr\omega_3.$$

Quindi esplicitando la (3) si ha

$$(5) \quad [A + m(a^2 + l^2 + 2al\gamma_3)](p^2 + q^2) + [C + m(a^2 + 2al\gamma_3)]r^2 - \\ - 2malr\omega_3 - ma^2\omega_3^2 = 2(E - mgl\gamma_3).$$

Ma del sistema (1), (2) è noto un altro integrale primo (di Jellet) esprimente l'invariabilità del prodotto scalare di  $\mathbf{K}_G$  e di  $\Gamma G$ . Questo integrale primo si ottiene rapidamente da (1) moltiplicando la suddetta equazione scalarmente per  $\Gamma G$ . Si ha allora

$$(6) \quad (a\mathbf{x} + l\mathbf{k}) \times \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} = 0.$$

Si osservi che data la struttura giroscopica di  $\mathcal{C}$ ,  $\mathbf{K}_G$  è complanare con  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{k}$ , onde risulta

$$(7) \quad \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} \times \mathbf{K}_G = 0,$$

la quale, tenuta presente la costanza di  $\mathbf{x}$ , comporta

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathbf{K}_G \times (a\mathbf{x} + l\mathbf{k}) \} = 0,$$

da cui infine si deduce

$$(9) \quad \mathbf{K}_G \times (a\mathbf{x} + l\mathbf{k}) = \mathbf{P}_0.$$

L'integrale (9) si esplicita facilmente ed assume la forma

$$(10) \quad aA\omega_3 + (C - A)a\gamma_3 r + Cr l = \mathbf{P}_0.$$

4. Un ulteriore integrale primo è certamente più riposto ma egualmente di forma semplice.

Per ottenerlo cominciamo ad esplicitare la (1) tenuto conto del vincolo cinetico (2). Si ha

$$(11) \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} + m(\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \wedge \left\{ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge (\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \wedge l(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}) + g\mathbf{x} \right\} = 0,$$

ovvero

$$(12) \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} + m(\mathbf{ax} + l\mathbf{k})^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - m(\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot (\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \\ + ml(\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} - ml(\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + mgl\mathbf{k} \wedge \mathbf{x} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente la (12) per  $\mathbf{k}$  si ottiene

$$(13) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{K}_G \times \mathbf{k}) + m(a^2 + l^2 + 2al\gamma_3)\mathbf{k} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \\ - m(a\gamma_3 + l)(\mathbf{ax} + l\mathbf{k}) \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + mla\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = 0,$$

da cui con facili calcoli si ottiene infine, con le notazioni poste,

$$(14) \quad (C + ma^2)\dot{r} + mal\frac{d}{dt}(r\gamma_3) - ma\dot{\omega}_3(a\gamma_3 + l) = 0.$$

Ma da (10), escludendo che  $\mathcal{C}$  abbia struttura sferica, cioè che  $C$  sia uguale ad  $A$ , si ha

$$(15) \quad a\frac{d}{dt}(r\gamma_3) = \frac{Aa\dot{\omega}_3 + Cl\dot{r}}{A - C},$$

che sostituita in (4) fornisce la seguente equazione:

$$(16) \quad [(C - A)(C + ma^2) - ml^2C]\dot{r} - ma\dot{\omega}_3[(C - A)a\gamma_3 + Cl] = 0.$$

Ma ancora da (10) risulta

$$(17) \quad r[(C - A)a\gamma_3 + Cl] = P_0 - aA\omega_3,$$

onde la (16) diventa, in ogni istante in cui sia  $r \neq 0$ ,

$$(18) \quad [(C - A)(C + ma^2) - ml^2C]r\dot{r} - ma(P_0 - aA\omega_3)\dot{\omega}_3 = 0,$$

che integrata porge

$$(19) \quad A[(C - A)(C + ma^2) - ml^2C]r^2 + m(P_0 - aA\omega_3)^2 = Q_0.$$

Infine, tenuto conto di (10), si giunge alla

$$(20) \quad \{A[(C - A)(C + ma^2) - ml^2C] + m[(C - A)a\gamma_3 + Cl]^2\}r^2 = Q_0$$

che costituisce il preannunciato ulteriore integrale primo.

Vogliamo qui subito rilevare che mentre l'integrale primo (10) sussiste indipendentemente dal vincolo cinetico di puro rotolamento e dalla particolare natura della reazione vincolare in  $\Gamma$ , ciò non è invece per l'integrale (19) o (20), per ottenere il quale abbiamo fatto esplicito ricorso alla terza equazione dinamica, esplicitata tenendo conto del vincolo (2).

5. Poiché al sistema in esame non è applicabile a priori il corollario del teorema di Liouville <sup>(2)</sup> relativo ai sistemi canonici a funzione caratteristica indipendente dal tempo, non mi sembra superfluo, anche se è quasi immediato, far vedere come effettivamente la conoscenza dei due integrali primi, certamente indipendenti (10), (20), insieme all'integrale dell'energia (5), permetta di ridurre in modo assai semplice il problema alle quadrature.

A tal fine conviene far uso degli angoli di Eulero.

Ricordiamo però, prima di proseguire, che l'integrale (20) è stato ottenuto nell'ipotesi esplicitamente ammessa che risulti  $r$  non identicamente nulla. Considereremo infine anche i moti in corrispondenza ai quali risulta  $r \equiv 0$ .

Per quanto riguarda quindi il caso generale iniziamo richiamando le ben note formule cinematiche

$$(21) \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad p^2 + q^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2.$$

Da queste si ha intanto

$$(22) \quad p^2 + q^2 = \frac{(\omega_3 - r \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \dot{\theta}^2.$$

Ma poiché da (10) si ha ancora

$$(23) \quad \omega_3 - r \cos \theta = \frac{1}{aA} [P_0 - C(a \cos \theta + l)r],$$

risulta

$$(24) \quad p^2 + q^2 = \left[ \frac{P_0 - Cr(a \cos \theta + l)}{aA \sin \theta} \right]^2 + \dot{\theta}^2.$$

D'altra parte, sempre da (10), risulta

$$(25) \quad \omega_3 = \frac{1}{aA} \{ P_0 - [(C - A)a \cos \theta + Cl]r \},$$

e questa, associata alla (20), permette di eliminare le variabili  $\omega_3, r, p^2 + q^2$  dall'integrale dell'energia, e di ridurre quindi il problema alle quadrature.

(2) Cfr. T. LEVI CIVITA ed U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Bologna, Zanichelli 1927, vol. II, parte II, p. 383.

Infatti, tenuto conto di (24), (25), l'integrale (5) diventa

$$(26) \quad [A + m(a^2 + l^2 + 2al \cos \theta)] \left\{ \left[ \frac{P_0 - Cr(a \cos \theta + l)}{aA \sin \theta} \right]^2 + \dot{\theta}^2 \right\} + \\ + [C + m(a^2 + 2al \cos \theta)] r^2 - 2 \frac{ml}{A} \{ P_0 - [(C - A)a \cos \theta + Cl] r \} r - \\ - \frac{m}{A^2} \{ P_0 - [(C - A)a \cos \theta + Cl] r \}^2 = 2(E - mgl \cos \theta).$$

Posto  $\cos \theta = x$  e denotato con  $P_2'(x)$  il polinomio, di secondo grado in  $x$ ,

$$(27) \quad P_2'(x) = (C + ma^2)A^2 + ml^2C(2C - A) + \\ + 2malC(2A - C)x + m(C - A)^2a^2x^2,$$

l'integrale (26) assume l'aspetto seguente

$$(28) \quad [A + m(a^2 + l^2 + 2alx)] \left\{ \frac{1}{a^2A^2} [P_0^2 + C^2(ax + l)^2r^2 - 2P_0C(ax + l)r] + \dot{x}^2 \right\} = \\ = \frac{1 - x^2}{A^2} \{ 2(E_0 - mglx)A^2 + mP_0^2 - 2mP_0(C - A)(l + ax)r - r^2P_2'(x) \}.$$

E da questa infine, denotando con  $P_2(x)$  il polinomio di secondo grado in  $x$  coefficiente di  $r^2$  nel primo membro di (20), si ha

$$(29) \quad \dot{x}^2 [A + m(a^2 + l^2 + 2alx)] = \frac{1 - x^2}{A^2} \left\{ 2(E_0 - mglx)A^2 + mP_0^2 \pm \right. \\ \left. \pm 2mP_0(C - A)(l + ax) \right\} \sqrt{\frac{Q_0}{P_2(x)}} - \frac{P_2'(x)}{P_2(x)} Q_0 \left\{ - \right. \\ \left. - \frac{1}{a^2A^2} [A + m(a^2 + l^2 + 2alx)] \left\{ P_0^2 + C^2(ax + l) \frac{Q_0}{P_2(x)} \pm 2P_0C(ax + l) \right\} \sqrt{\frac{Q_0}{P_2(x)}} \right\}.$$

Vogliamo rilevare a questo punto che il caso  $r \equiv 0$  rientra come caso particolare in (29) ove si ponga  $Q_0 = 0$ . Allora si ha

$$(30) \quad \left( \dot{x}^2 + \frac{P_0^2}{a^2A^2} \right) [A + m(a^2 + l^2 + 2alx)] = \\ = \frac{1 - x^2}{A^2} \{ 2(E_0 - mglx)A^2 + mP_0^2 \}.$$

Rileveremo infine che la conoscenza di  $\theta(t)$  comporta, a meno di quadrature, la conoscenza degli altri angoli di Eulero. Si perviene così alla determinazione completa non solo del moto di  $\mathcal{C}$  relativo al baricentro, ma, come è ben chiaro, anche del moto assoluto di  $\mathcal{C}$ . Infatti il vincolo cinetico (2) fornisce la traiettoria assoluta del punto  $O$  a meno di due quadrature, a partire dalla equazione

$$(31) \quad \frac{dO}{dt} = \omega \wedge a\mathbf{x},$$

immediatamente integrabile una volta nota la dipendenza temporale degli angoli di Eulero.

**Astronomia.** — *Contributo al problema della luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare nell'eclisse totale di Luna del 18-19 gennaio 1954.* Nota di MASSIMO CIMINO, TERESA FORTINI e MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE. — In una nostra precedente Nota <sup>(1)</sup> abbiamo avuto occasione di sottolineare l'importanza che la fotometria della *penombra* riveste nelle eclissi di Luna, specialmente ai fini dello studio della radiazione ultravioletta e corpuscolare solare. L'ipotesi, avanzata da F. Link <sup>(2)</sup>, è che quest'ultima, raggiungendo integralmente il suolo lunare, in quanto non assorbita dall'atmosfera terrestre, ecciti in esso una luminescenza che (secondo una stima effettuata dallo stesso Link) potrebbe superare anche il 10% della brillantezza totale. Si deve poi osservare che nella zona di penombra più vicina all'orlo dell'ombra le radiazioni cromosferiche e coronali solari tendono a prevalere fortemente su quelle fotosferiche; onde è appunto in questa zona che il fenomeno della luminescenza del suolo lunare può essere messo meglio in evidenza.

Dato l'interesse dell'ipotesi, sia per la fisica solare, che per lo studio del suolo lunare, fu da noi iniziata all'Osservatorio Astronomico di Roma una *serie sistematica* di misure fotometriche della penombra nelle eclissi lunari. Per evitare errori strumentali, che possono prevedersi in tale genere di osservazioni, ed anche per avere un materiale per quanto possibile omogeneo, fu stabilito di usare, in tutte le eclissi, sempre lo stesso strumento, il medesimo tipo di lastre, gli stessi filtri, calibrazione, sviluppo, diaframmi, ecc. Inoltre, nelle misure delle lastre, furono scelte sistematicamente, in tutte le eclissi osservate, sempre le stesse zone lunari, variamente sparse su mari, su zone accidentate e su crateri.

Lo strumento destinato a tale genere di osservazioni è l'astrografo Petzval dell'Osservatorio (obbiettivo di 165 mm., focale 790 mm.); rimandiamo alle Note pubblicate in occasione delle eclissi del 29 gennaio 1953, 18 gennaio 1954 e del 15 luglio 1954 <sup>(3)</sup> per maggiori dettagli sullo strumento e sulla tecnica delle osservazioni.

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) Cfr. M. CIMINO e T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di Luna del 29 gennaio 1953 e la luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIV, pp. 619-626 (1953); T. FORTINI, *Fotometria fotografica dell'eclisse totale di Luna del 18-19 gennaio 1954 in relazione al problema della luminescenza del suolo lunare*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVII, pp. 209-215 (1954).

(2) F. LINK, *Théorie photométrique de la pénombre pendant les éclipses de Lune*, « Jon. Soc. Math. Phys. », *Théque*, 72, p. 65 (1947).

(3) Cfr. T. FORTINI, *Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di Luna del 15-16 luglio 1954 e luminescenza del suolo lunare*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVIII, fasc. 1, pp. 65-69 (1955).



Contemporaneamente a questo programma sistematico - che potrà portare a conclusioni sicure soltanto quando sarà stato osservato un buon numero di eclissi lunari - sono state da noi iniziate nuove ricerche, intese a portare un contributo al problema da altri punti di vista e ad istituire, nello stesso tempo, un controllo critico sulle operazioni eseguite con l'astrografo Petzval. È appunto di queste nuove ricerche - effettuate in occasione dell'eclisse totale di Luna del 18 gennaio 1954 - che diamo ora conto nella presente Nota <sup>(4)</sup>.

2. Come fu già notato dal Link non tutte le zone del suolo lunare sembrano presentare il fenomeno della luminescenza nello stesso grado. Però pochissimo di preciso si conosce sulle differenze di luminescenza tra zona e zona. Il Link stesso ha indicato, come particolarmente interessante per il suo eccesso di brillantezza, il craterino Limneus nel *Mare Serenitatis*. Si poneva perciò spontaneamente a noi la questione della ricerca delle parti del suolo lunare presentanti un comportamento anomalo rispetto alla media delle altre zone; ed a questo scopo, abbiamo eseguito, durante la fase parziale dell'eclisse, una serie di fotografie della Luna in una scala sufficientemente grande, che permettesse di individuare con buona sicurezza le accidentalità del suolo lunare. Abbiamo adoperato perciò l'Equatoriale Steinheil dell'Osservatorio, con lente obbiettiva di 390 mm. e focale di 5,25 m. Inoltre, allo scopo di istituire, contemporaneamente un controllo sulle misure ottenute all'astrografo Petzval, decidemmo di eseguire le fotografie nella stessa zona spettrale, cioè intorno a  $\lambda$  6300.

3. CARATTERISTICHE DELLE LASTRE E CRITERI GENERALI PER LE MISURE DELLE DENSITÀ. - Abbiamo adoperato lastre « Ferrania » Fine-Pancro antialo, con un filtro rosso Wratten A (n. 25), sviluppando con rivelatore Kodak D. 76 per una durata di 12<sup>m</sup> a una temperatura di 18°. Ne riportiamo le caratteristiche nella Tabella I, ricordando che le lastre furono calibrate con un cuneo fotometrico a gradini, impiegando tempi equivalenti a quelli dell'esposizione lunare.

La nottata dal 18 al 19 gennaio 1954 fu calma e limpida; soltanto verso le 4<sup>h</sup> 45<sup>m</sup> del mattino si formarono strati sottilissimi di nuvole che, verso le 5<sup>h</sup> 20<sup>m</sup> velarono leggermente la Luna. Però, poco dopo, il cielo ritornò limpido e tale si mantenne fino al termine delle osservazioni.

Rimandiamo alle Note citate per quanto riguarda il microfotometro Fabry-Busson (che abbiamo adoperato nella misura delle densità) e per il *metodo differenziale* col quale abbiamo costruito le curve di densità nella zona di penombra, limitandoci ad osservare che, nella presente determinazione, non si è presentato il problema del collegamento della penombra con l'ombra, avendo noi osservato, allo Steinheil, soltanto la prima.

(4) Le fotografie della Luna eclissata sono state prese da M. Cimino e M. A. Giannuzzi; tutte le misure sulle lastre e le riduzioni sono state effettuate da T. Fortini, coadiuvata nei calcoli dal calcolatore R. Flamini. L'elaborazione e la discussione dei risultati della presente Nota è di M. Cimino e T. Fortini.

TABELLA I.  
*Caratteristiche delle lastre misurate.*

N.	Ora T.M.E.C.	Posa	Note	N.	Ora T.M.E.C.	Posa	Note	N.	Ora T.M.E.C.	Posa	Note
1	0 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 25 <sup>s</sup>	2/3 <sup>s</sup>		11	0 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup>	1 1/3 <sup>s</sup>		21	3 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup>	2 <sup>s</sup>	
2	0 19 31	2/3		12	1 7 32	2		22	3 42 30	6	(1)
3	0 27 34	1/3		13	1 15 35	2		23	3 45 55	2	
4	0 30 12	1/3		14	1 25 10	2		24	4 5 17	1	
5	0 47 46	1/3		15	1 41 9	6		25	4 17 24	1/3	
6	0 59 36	1/3		16	1 52 19	3	(2)	26	4 33 4	1/3	
7	0 15 29	1/3		17	1 57 16	6	(2)	27	7 49 9	1/3	
8	0 21 16	2/3		18	2 5 21	20	(2)	28	5 2 29	1/3	(3)
9	0 29 20	1/3	(1)	19	3 18 1	6		29	5 13 40	1/3	
10	0 47 24	2/3		20	0 23 23	2		30	5 27 21	1/3	

1 = scadente; 2 = non misurata 3 = sfuocata

TABELLA II.

*Densità della penombra ( $\lambda$  5900–6700) in funzione della distanza  $\gamma'$  dall'orlo dell'ombra.*

$\gamma'$	$\Delta m$	Entrata penombra	Uscita penombra	$\gamma'$	$\Delta m$	Entrata penombra	Uscita penombra	$\gamma'$	$\Delta m$	Entrata penombra	Uscita penombra
1	—	—	3,12	11	—	1,33	1,04	21	—	0,35	0,45
2	—	2,90	2,89	12	—	1,21	0,91	22	—	0,29	0,37
3	—	2,63	2,65	13	—	1,07	0,77	23	—	0,24	0,29
4	—	2,40	2,46	14	—	0,95	0,67	24	—	0,21	0,21
5	—	2,21	2,19	15	—	0,81	0,63	25	—	0,17	0,15
6	—	2,03	1,93	16	—	0,68	0,60	26	—	0,13	0,11
7	—	1,87	1,71	17	—	0,57	0,57	27	—	0,11	0,09
8	—	1,71	1,51	18	—	0,50	0,55	28	—	0,09	0,09
9	—	1,59	1,35	19	—	0,45	0,53	29	—	0,07	0,08
10	—	1,47	1,19	20	—	0,39	0,49	30	—	0,07	0,07

4. CURVA DI DENSITÀ DELLA PENOMBRA. — La curva di densità della penombra è stata tracciata con lo stesso metodo differenziale che abbiamo usato nelle precedenti e già citate determinazioni, fatte con l'astrografo Petzval; metodo che rende le misure largamente indipendenti dalla tecnica strumentale e dalle eventuali variazioni dell'assorbimento atmosferico. Furono scelte a tale scopo 19 zone lunari — elencate nella Tabella III — di un diametro apparente di circa  $30''$ , scegliendole sia su mari che su crateri, o punti che si prestavano facilmente ad essere ben centrati nel forellino del diaframma del microfotometro. Nella Tabella II diamo le densità della penombra, espresse in differenze  $\Delta m$  di grandezze stellari, in funzione della distanza  $\gamma'$  (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra. Le due curve, una per l'entrata, l'altra per l'uscita — sono rappresentate nella fig. 1.

TABELLA III.

*Media degli scarti di ciascun punto lunare osservato dalla curva di densità media, nell'intorno di  $10'$  dall'orlo dell'ombra.*

N.	Nome	$\Delta m$		N.	Nome	$\Delta m$	
		Entr.	Usc.			Entr.	Usc.
1	Plato . . . . .	— 0,60	+ 0,16	10	Colombo . . . . .	0,00	—
2	Punto vicino a Plato . . . . .	— 0,34	+ 0,01	11	Endymion . . . . .	— 0,81	—
3	Archimede . . . . .	— 0,40	— 0,05	12	Menelaus . . . . .	0,00	+ 0,05
4	Manilius . . . . .	+ 0,17	+ 0,06	13	Julius Caesar . . . . .	+ 1,04	+ 0,05
5	Punto vicino a Manilius . . . . .	— 0,23	+ 0,17	14	Plinius . . . . .	0,00	— 0,05
6	Pitatus . . . . .	+ 0,38	— 0,16	15	Goclenius . . . . .	— 0,16	— 0,34
7	Bullialdus . . . . .	—	0,00	16	Monte $\lambda$ Gassendi <sup>(1)</sup> . . . . .	+ 0,14	— 0,15
8	Fracastorius . . . . .	— 0,17	0,00	17	Monte $\kappa$ Gassendi . . . . .	+ 0,05	— 0,12
9	Tyco . . . . .	+ 0,22	+ 0,05	18	Monte $\eta$ Gassendi . . . . .	+ 0,02	— 0,14
				19	Limneus . . . . .	+ 0,10	— 0,15

(1) Cfr. J. F. JULIUS SCHMIDT, *Charte der Gehirge des Mondes*, Berlin 1878.

Nella fig. 2 è riportato il confronto dei risultati ottenuti da noi con la teoria del Link; la curva a tratto pieno rappresenta la differenza  $O - C$  tra i valori osservati delle densità e quelli calcolati, mentre la curva tratteggiata dà le medie degli  $O - C$  di dieci eclissi esaminate dal Link. Rimane confermato il fatto — già trovato all'astrografo Petzval — che l'eclisse del 18 gennaio 1954 ha manifestato un *eccesso di brillantezza* della penombra, e si può quindi classificare come *chiara*.

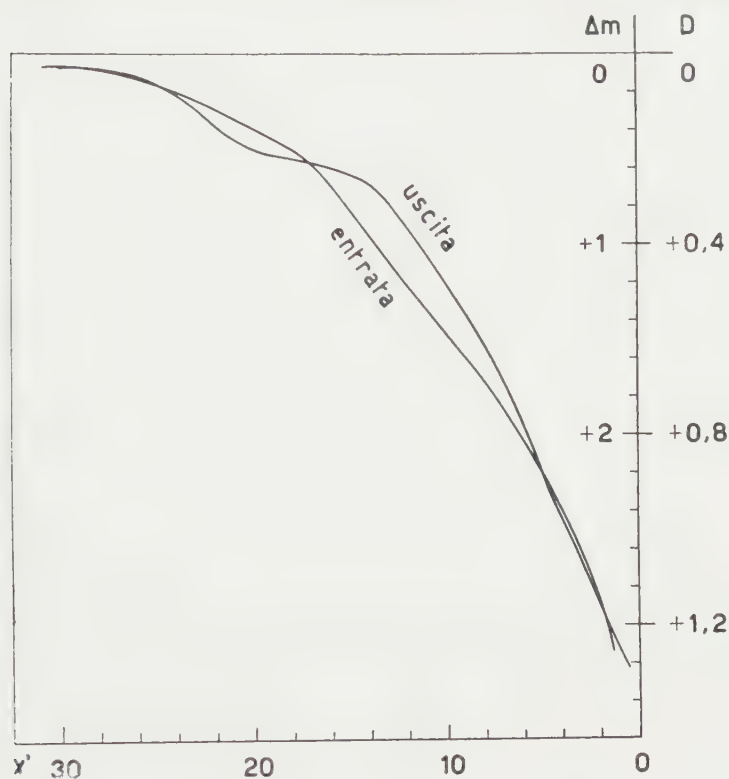


Fig. 1. - Curve di densità della penombra per  $\lambda$  6300 in funzione della distanza  $\gamma'$  (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

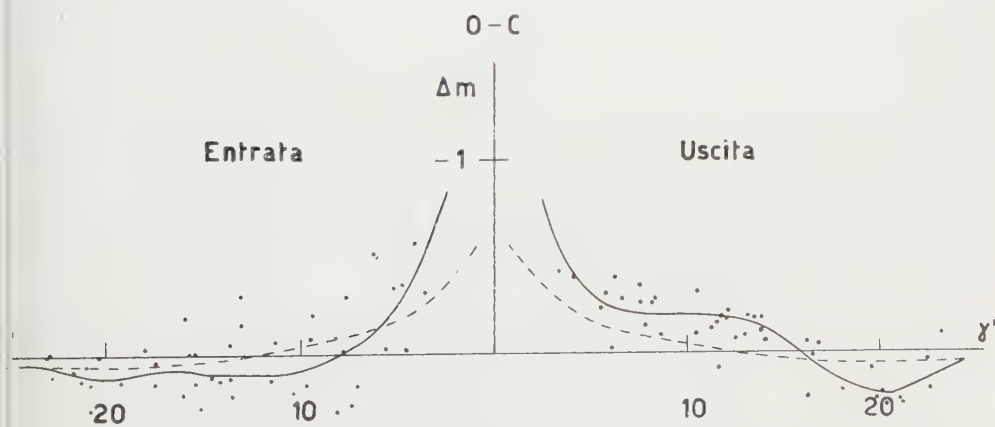


Fig. 2. - Confronto della densità osservata per la penombra con la teoria del Link.

$\gamma'$  = distanza dall'orlo dell'ombra.

È interessante il confronto dei valori della Tabella II con gli analoghi ottenuti all'astrografo Petzval per la stessa eclisse e pubblicati in una delle Note già citate. Nella fig. 3 diamo le differenze  $A - S$  tra le densità osservate

all'astrografo Petzval (A) e allo Steinheil (S). Come si vede tali scarti, oltre a essere contenuti nei limiti degli errori (risultando dell'ordine massimo di  $0^m,2$ ), sembrano essere del tutto casuali; specialmente se si pensa che la presente determinazione, essendo ottenuta con punti lunari più definiti che non quelli dell'astrografo (a causa della maggiore dimensione dell'immagine) ha un andamento più particolareggiato in tutte le sue zone. La buona concordanza dei risultati (che sono stati ottenuti *nelle stesse condizioni di tempo e di luogo, ma con tecniche strumentali differenti*) fa dunque ritenere plausibile l'ipotesi che il riscontrato eccesso di brillantezza del suolo lunare del 18-19 gennaio 1954 sia un fatto reale, anche a prescindere dalla spiegazione datane dal Link.

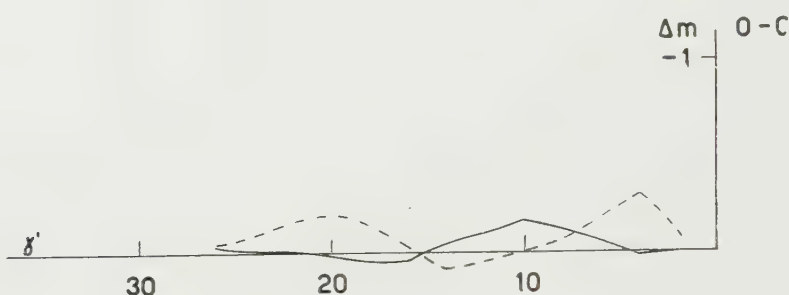


Fig. 3. - Confronto tra le densità della penombra osservate all'astrografo Petzval (A) e all'equatoriale Steinheil (S).

Curva a tratto pieno = A-S per l'entrata. Curva tratteggiata = A-S per l'uscita.  
 $\gamma'$  = distanza dall'orlo dell'ombra.

5. RICERCA DELLE ZONE LUNARI CON COMPORTAMENTO ANOMALO. - Come è stato detto al principio, uno degli scopi della presente ricerca era quello di individuare (se esistono) zone lunari con comportamento anomalo rispetto al comportamento medio di tutte le zone esaminate.

Ora, nella Tabella III sono elencati i punti lunari osservati e la *media* degli scarti che essi presentano rispetto alla curva media della fig. 2, limitatamente però a una distanza di circa  $10'$  dall'orlo dell'ombra, cioè alla zona che presenta un maggiore interesse riguardo all'eccesso di brillantezza del suolo lunare durante l'eclisse. Un  $\Delta m$  negativo indica che il punto presenta un eccesso di brillantezza, uno positivo il contrario.

Allo stato attuale della ricerca ci sembra di non poter affermare nulla di certo sul supposto comportamento anomalo di qualcuno dei punti osservati. Distinguendo i punti 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 15 (che sono fondi di « mari » o fondi piatti di crateri e cioè punti poco luminosi), dai punti 4, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 (che appartengono invece a « terre » e sono quindi punti luminosi), abbiamo tracciato nuovamente le curve di densità, sia per l'ingresso che per l'uscita (fig. 4). Dall'esame di tali curve si può concludere che, almeno in questa eclisse, non si nota un comportamento sostanzialmente diverso tra i due tipi di zone prescelte; soltanto per l'entrata, le « terre » sembrano manifestare una maggiore brillantezza in vicinanza dell'orlo dell'ombra.



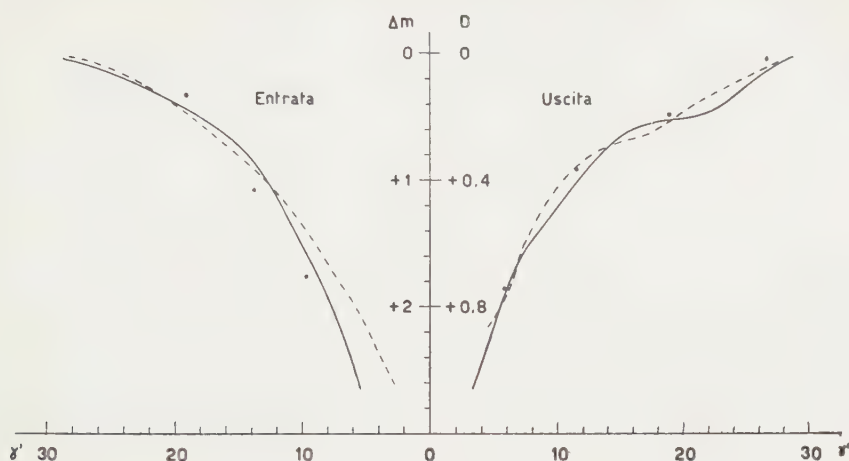


Fig. 4. — Curve di densità della penombra.

Curve a tratto pieno = zone scure (mari). Curve tratteggiate = zone chiare (terre).  
 $\gamma'$  = distanza (in primi d'arco) dall'orlo dell'ombra.

Quanto al craterino Limneus, le cui densità sono rappresentate con i punti riportati in figura, il suo comportamento sembrerebbe del tutto normale. Ovviamente il materiale a disposizione non è ancora sufficiente per un definitivo giudizio sulla interessante questione dell'eccesso di brillantezza del suolo lunare e della sua causa; e quindi ci ripromettiamo di proseguire le ricerche in occasione di altre eclissi, secondo il programma accennato al principio di questa Nota.

**Chimica fisica.** — *Ulteriori ricerche sulla riduzione di N-ossidi del gruppo delle azine* <sup>(\*)</sup>. Nota III di RENATO CURTI e STELIO LOCCHI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. SEMERANO.

Dal comportamento polarografico di alcuni N-ossidi di clorobenzofenazina in confronto con quello degli N-ossidi della benzofenazina semplice, gli Autori hanno rilevato l'azione del sostituente sulla stabilità del radicale libero intermedio <sup>(1), (2)</sup>. Nel lavoro che ora presentiamo sono messi in evidenza i valori quantitativi che suffragano quanto è stato prospettato nelle note precedenti.

Lo studio quantitativo si compendia nelle costanti di formazione delle forme semichinoniche, che sono state calcolate per le seguenti sostanze:

- (I) 12 N-monossibenzofenazina
- (II) 7 N-monossibenzofenazina
- (III) 1 cloro-12 N-monossibenzofenazina
- (IV) 4 cloro-12 N-monossibenzofenazina
- (V) 1 cloro-7 N-monossibenzofenazina

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Pavia.

(\*\*) Nella seduta del 15 gennaio 1955.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVIII, fasc. I, 78 (1955).

(2) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIV, 796 (1953).

secondo l'espressione

$$\sqrt{K} = 10^{-\frac{E_{1/4} - E_{1/2}}{0,059}} \cdot \left( 10^{\frac{2(E_{1/4} - E_{1/2})}{0,059}} - 3 \right) \text{ (Michaelis)}$$

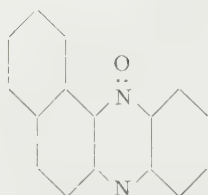
e secondo

$$\sqrt{K} = - \frac{2\delta + 39,72\delta}{\delta} \text{ (Brdicka)}$$

dove  $\delta$  indica la pendenza della curva nel punto di flesso.

L'accordo fra i valori è buono finché la curva è apparentemente unica e per semplicità nelle tabelle seguenti (nn. I, II, III, IV) è dato un valore medio. In queste tabelle sono pure reperibili i valori dei potenziali di semigradino sui quali sono stati costruiti i grafici nn. 3 e 4 della Nota II degli stessi Autori (loc. cit.<sup>(1)</sup>).

TABELLA I.



12-N-monossibenzofenazina

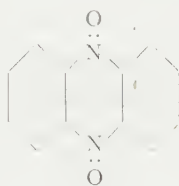
pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0,52	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 220	0,3	— 68	— 220	—
1,10	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 208	0,2	— 109	— 200	—
1,50	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 172	0,2	— 139	— 200	—
2,50	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	+ 122	0,6	— 162	— 205	—
2,80	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 70	3,3	—	—	— 236
3,11	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	+ 20	5,2	—	—	— 245
3,41	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	+ 0	12,4	—	—	— 255
3,68	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	— 47	27	—	—	— 275
3,96	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	— 68	20	—	—	— 290
4,08	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	— 115	14	—	—	— 310
4,69	Britton-Robinson . . . . .	— 189	1,7	—	—	— 353
7,41	Britton-Robinson . . . . .	— 365	—	—	—	— 510

La sostanza (V) presenta un valore della costante  $K_1$  che rimane fra i limiti 0,02 e 0,16.

A scopo di confronto abbiamo anche calcolato i valori delle costanti di formazione del semichinone per i corrispondenti N-monossido ed N-diossido della fenazina:



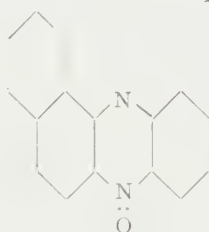
(VI)



(VII)

dove i valori delle costanti escludono la presenza nella riduzione di radicale libero ossidrilico. La riproduzione delle curve polarografiche delle sostanze (VI) e (VII) si trova nel lavoro già citato <sup>(2)</sup>.

TABELLA II.



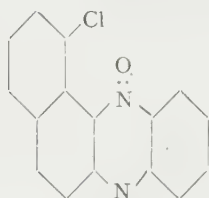
7-N-monossibenzenofenazina

pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0,55	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 134	0,2	— 56	— 211	—
1,52	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 73	0,1	— 136	— 192	—
2,55	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	— 28	0,8	—	—	— 222
2,82	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	— 49	2,6	—	—	— 233
3,05	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	— 76	3,4	—	—	— 245
3,63	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + citrato . . . . .	— 111	2,4	—	—	— 268
3,91	Britton-Robinson . . . . .	— 171	1,3	—	—	— 303
4,65	Britton-Robinson . . . . .	— 226	0,9	—	—	— 350
5,85	Britton-Robinson . . . . .	— 300	0,5	—	—	— 410
6,82	Britton-Robinson . . . . .	— 362	0,5	—	—	— 476

CONCLUSIONI. — L'analisi dei valori della costante  $K_{\text{ossigeno}}$  ci porta alle conclusioni seguenti: si esclude anzitutto per questi composti la presenza delle forme dimere per le ragioni portate nel nostro precedente lavoro <sup>(2)</sup>, a suffragare le quali diamo ora i valori numerici delle costanti di formazione. Si deve interpretare quindi il valore della costante K esclusivamente come misura della formazione di radicale libero. Tali valori aumentano nel seguente ordine: (V) < (II) < (IV) < (I) < (III) e se consideriamo la concentrazione idrogenionica corrispondente a pH 3,7 per esempio, il rapporto delle costanti K per le sostanze (II), (IV), (I), (III), nell'ordine, diventa:

$$1 : 6 : 11 : 82.$$

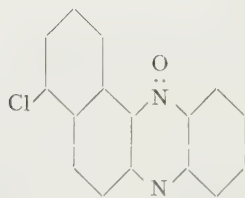
TABELLA III.



1-Cloro-12-N-monossibenzofenazina

pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0,61	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 215	0,0	— 63	— 131	—
0,81	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 211	0,0	— 72	— 130	—
1,59	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 199	0,3	—	—	— 131
1,65	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	+ 162	1,2	—	—	— 132
2,19	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 179	2,3	—	—	— 153
2,33	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	+ 154	8,8	—	—	— 163
2,62	B.-R. . . . .	+ 26	13,8	—	—	— 187
2,89	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 95	17,0	—	—	— 192
3,43	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	+ 11	61,7	—	—	— 212
3,78	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	— 48	196	—	—	— 253
4,30	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	— 110	47,6	—	—	— 294
4,87	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	— 162	13,8	—	—	— 342
5,30	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	— 203	8,8	—	—	— 386
5,62	B.-R. . . . .	— 208	6,0	—	—	— 389
7,46	B.-R. . . . .	— 366	6,0	—	—	— 557
8,00	B.-R. . . . .	— 406	6,0	—	—	— 603

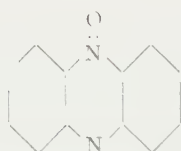
TABELLA IV.



4-Cloro-12-N-monossibenzofenazina

pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0,58	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 256	1,2	— 29	— 115	—
0,81	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 240	0,0	— 49	— 115	—
1,59	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 173	0,0	—	—	— 127
1,70	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	+ 176	0,0	—	—	— 127
2,30	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	+ 142	0,1	—	—	— 155
2,77	B.-R. . . . .	+ 100	3,9	—	—	— 152
3,74	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +citrato . . . . .	— 2	13,8	—	—	— 230
3,95	B.-R. . . . .	— 44	2,8	—	—	— 231
4,86	B.-R. . . . .	— 122	1,2	—	—	— 296
6,20	B.-R. . . . .	— 213	0,6	—	—	— 371
6,72	B.-R. . . . .	— 260	0,6	—	—	— 409
7,48	B.-R. . . . .	— 327	0,6	—	—	— 465
7,96	B.-R. . . . .	— 360	0,5	—	—	— 493

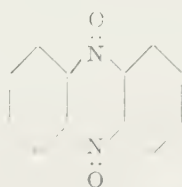
TABELLA V.



N-monossifenazina

pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0.6	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 210	0,2	+ 92	— 120	—
1.13	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 183	0,0	+ 47	— 105	—
1.50	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 176	0,0	+ 26	— 95	—
2.52	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 108	0,0	—	—	— 97
3.10	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 75	0,1	—	—	— 128
3.64	B.-R. . . . .	— 4	0,4	—	—	— 178
5.80	B.-R. . . . .	— 106	0,2	—	—	— 256
7.61	B.-R. . . . .	— 275	0,3	—	—	— 415

TABELLA VI.

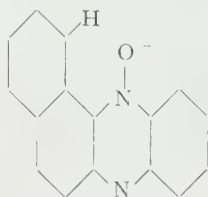


N-dirossifenazina

pH	Soluzione tampone	Ossigeno		Azoto		
		$E_{1/2}$	K	$E_{1/4}$	$E_{3/4}$	$E_{1/2}$
0.60	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 141	0,2	+ 67	— 132	—
0.82	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 142	0,0	+ 59	— 123	—
1.20	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 126	0,0	+ 38	— 104	—
2.58	B.-R. . . . .	+ 43	0,1	—	—	— 100
2.85	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	+ 30	0,1	—	—	— 114
3.64	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> +K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> . . . . .	— 23	0,1	—	—	— 159
3.93	B.-R. . . . .	— 39	0,2	—	—	— 171
5.48	B.-R. . . . .	— 137	0,1	—	—	— 262
6.97	B.-R. . . . .	— 228	0,7	—	—	— 351



Anche l'area di formazione del radicale per queste quattro sostanze presenta lo stesso ordine e la stessa proporzionalità. Negli N-ossidi in 12, la presenza dell'atomo di cloro in 1 favorisce considerevolmente la formazione del semichinone; il cloro in 4 la ostacola. Quanto precede consente di constatare che non è estranea a questa stabilizzazione del radicale la posizione 1. La riduzione monoelettronica accentua la polarità negativa della posizione 12 e tale polarità viene influenzata dalla vicinanza dell'anello benzenico (sostanza I).



Un sostituito fortemente elettrofilo, l'atomo di cloro in 1, ha come risultato di aumentare l'entità dell'interazione con conseguente notevole aumento nel valore della costante di formazione del radicale libero (sostanza III).

Se si porta il sostituito elettrofilo in 4 la stabilizzazione della forma semichinonica risulta diminuita non solo rispetto alla (III) ma anche rispetto alla (I), e di conseguenza la costante di formazione risulta minore (sostanza IV).

L'area di formazione del semichinone è limitata da una parte dalla salificazione della base in ambiente fortemente acido e dall'altra parte dalla carenza di idrogenioni in ambiente neutro. A proposito di questi risultati può riuscire interessante la osservazione che la solubilità è maggiore e il punto di fusione più basso per le sostanze (I) e (III) che non per le (II) e (V).

È nostro intendimento proseguire tale ricerca con l'esame mediante i raggi X delle distanze interatomiche, per apportare un ulteriore contributo allo studio dell'influenza esercitata dall'anello benzenico vicinale rispetto al gruppo NO.

Ci è gradito ringraziare vivamente il prof. G. Semerano per l'interessamento mostrato alla presente ricerca.

**Chimica fisica.** — *Relazioni tra costanti polarografiche e costituzione delle molecole organiche* (\*). — III (\*\*). *Alcune considerazioni sui composti carbonilici aromatici.* Nota di GIOVANNI GIACOMETTI, presentata (\*\*\*) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Nella prima Nota di questa serie <sup>(1)</sup> era stato posto in evidenza come possa essere utile una messa a punto sulla situazione attuale del problema riguardante le relazioni tra comportamento polarografico delle sostenze organiche e loro caratteristiche di costituzione. Era stato esaminato allora un gruppo di sostanze che per la loro caratteristica di reversibilità nei processi elettrodici ben si prestavano ad una tale indagine: i chinoni; ed erano stati discussi i risultati ottenuti da vari Autori, risultati che dimostrano come il problema possa essere vantaggiosamente portato su di un piano quantitativo.

Nella seconda Nota <sup>(2)</sup> era stato poi discusso il caso delle aldeidi polieniche, molto simili nel comportamento ai sistemi chinoidi. Viene ora da considerare un gruppo di altre sostanze contenenti il gruppo carbonilico, e principalmente quindi aldeidi e chetoni aromatici che delle molecole chinoidi sono la logica estensione.

La letteratura polarografica sperimentale in questo campo è molto vasta <sup>(3)</sup>; anche un certo numero di lavori interpretativi, oltre a quelli già citati, è apparso recentemente.

Mi propongo in questa Nota di rivedere la situazione in alcuni dei suoi punti essenziali, sia per quanto riguarda le influenze sul potenziale della struttura del composto nella sua totalità, sia dal punto di vista dell'effetto dovuto all'introduzione di vari sostituenti in un determinato scheletro molecolare.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università e Centro di Studi per la Polarografia del C. N. R. di Padova.

(\*\*) La Nota II di questa serie è in corso di pubblicazione sul volume degli «Atti della V Riunione del CITCE» avvenuta a Stoccolma nel luglio-agosto 1953. Essa è stata pure presentata al XIII Congresso di Chimica Pura ed Applicata di Stoccolma, agosto 1953. Posteriormente sono apparsi altri due lavori sull'argomento: (a) E. SCROCCO e F. CAPPELLINA, «Boll. Fac. Chim. Ind.», Bologna, 12, 101 (1954); (b) R. W. SCHMID e E. HEILBRONNER, «Helv. Chim. Acta», 37, 1453 (1954). Tali lavori fanno uso dello stesso metodo esposto dall'Autore per calcolare i potenziali polarografici di composti carbonilici.

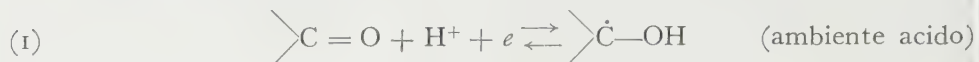
(\*\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) G. GIACOMETTI, *Contributi teorici e sperimentali di Polarografia*, «Suppl. alla Ricerca Sci.», 165 (1952).

(2) G. GIACOMETTI, «Atti della V Riunione del CITCE», Stoccolma 1953 e «Atti del XIII Congresso di Chimica Pura ed Applicata», Stoccolma 1953.

(3) J. KOLTHOFF, *Polarography*, II vol., *Interscience*, N. Y. (1952); E. H. SARGENT CO., «Scientific Apparatus and Methods.», 2, Fall 102 (1949).

Prima di passare alla discussione di questi punti è però necessario definire quale sia il processo elettrochimico di riduzione dei sistemi carbonilici, per lo meno nella sua fase importante, quella che determina il potenziale. Sembra oggi quasi universalmente accertato che il primo stadio del processo, determinante il potenziale, sia quello reversibile:



seguito da stadi secondari lenti. Tale meccanismo è stato provato per via polarografica normale dai recenti lavori di Holleck e Marsen <sup>(4)</sup> e di Schmid e Heilbronner <sup>(5)</sup>. Una conferma diretta dovrebbe essere portata da misure coulombometriche e questa sembrava ancora mancante, dato che in alcuni casi (ved. ad esempio misure di Calzolari <sup>(6)</sup>) si otteneva una valenza circa 2 per il primo processo in ambiente acido. Il metodo usato dal Calzolari però è quello di Lingane che, come è noto, può in alcuni casi falsare i risultati dato che la sostanza ridotta al potenziale corrispondente allo stadio in esame potrebbe ulteriormente ridursi nelle condizioni coulombometriche che sono affatto differenti da quelle polarografiche. Per questa ragione ho eseguito alcune misure coulombometriche sull'acetofenone secondo la tecnica di Vecchi <sup>(7)</sup> perfezionata da Lanza e Corbellini <sup>(8)</sup> che consiste nell'effettuare l'elettrolisi su elettrodi a goccia in condizioni rigorosamente polarografiche. I risultati, di cui si riferirà in dettaglio insieme ad altre questioni riguardanti tali composti, hanno sempre dato valenza 1 al processo per cui lo schema (1) è provato anche per questa via.

L'INFLUENZA DELLA CONIUGAZIONE SULLA RIDUCIBILITÀ DEI COMPOSTI CARBONILICI AROMATICI. - Lo schema di riduzione (1) suggerisce immediatamente di applicare anche a questi sistemi i criteri esposti nelle Note I e II.

Infatti Schmid e Heilbronner <sup>(5)</sup> hanno mostrato che la teoria della delocalizzazione degli elettroni  $\pi$  è usabile anche per i sistemi aldeidici aromatici.

Gli Autori calcolano l'energia degli elettroni  $\pi$  nel sistema aldeidico di partenza e in quello radicalare che si ottiene nel primo stadio della riduzione. La differenza tra queste due energie è posta in diagramma in funzione del potenziale di semigradino, estrapolato a pH zero. Si ottiene una relazione lineare tra le due grandezze. Questo è essenzialmente quanto era stato fatto da Giacometti per le aldeidi polieniche <sup>(9)</sup>.

(4) L. HOLLECK e H. MARSEN, «Zeit. Elektrochem.», 57, 301 (1953).

(5) R. W. SCHMID e E. HEILBRONNER, «Helv. Chim. Acta», 37, 1453 (1954).

(6) C. CALZOLARI, «Microchim. Acta», 35, 516 (1950).

(7) E. VECCHI, «Atti Ist. Veneto Sci.», Pt. 2, 107 (1949).

(8) P. LANZA e A. CORBELLINI, «Rend. Accad. Naz. Lincei», Classe Sc. Fis. Mat. e Nat. [VIII], 13, 406 (1952).

(9) Nota II di questa serie. Qui veniva messa in diagramma la differenza delle energie di risonanza delle due forme, invece che la differenza delle energie totali. La differenza tra le due relazioni così ottenute è però di un termine additivo costante.

Un fatto che conferisce però un certo carattere di arbitrarietà a questi calcoli è la necessità di tener conto dell'eteroatomo presente (ossigeno) nella coniugazione del composto di partenza, mediante l'introduzione nelle equazioni secolari di due parametri empirici:

1° l'integrale di scambio per il legame CO,

2° l'integrale coulombiano per l'ossigeno,

S. e H. assumono i seguenti valori per tali parametri:

$$(2) \quad \beta_{C=O} = \sqrt{2} \beta_{C=C} \quad ; \quad \alpha_o = \alpha_c + 2 \beta_{CC}$$

mentre io prendevo, nel calcolo per le aldeidi polieniche:

$$(3) \quad \beta_{C=O} = 2 \beta_{C=C} \quad ; \quad \alpha_o = \alpha_c + 2 \beta_{C=C}$$

Io avevo però osservato che era possibile che la variazione nella scelta dei parametri non alterasse la linearità della relazione, introducendo una correzione sempre costante. Ciò era stato mostrato, per le aldeidi polieniche, calcolando le energie di risonanza con valori dei parametri che ponevano semplicemente:

$$(4) \quad \beta_{C=O} = \beta_{C=C} \quad ; \quad \alpha_o = \alpha_c .$$

La linearità della relazione di Schmid e Heilbronner porta un ulteriore argomento a prova della mia tesi, dato che sussiste ancora con valori diversi dei parametri.

Ho voluto compiere un ulteriore verifica calcolando, anche per le aldeidi<sup>(10)</sup> trattate da questi Autori, i valori delle energie  $\pi$  con i semplici parametri dati dalla (4).

S. e H. tengono conto, nei loro calcoli, anche dell'integrale di ricoprimento S, attribuendogli un valore costante di 0,25; è noto però<sup>(11)</sup> che, almeno per lo stato fondamentale, tale introduzione non altera in modo essenziale i valori relativi delle energie e quindi può anche essere trascurata in problemi di questo genere.

In tabella I sono elencati i valori delle radici negative ( $w'$ , tenendo conto del ricoprimento,  $S = 0,25$ ) dei determinanti secolari corrispondenti alle aldeidi elencate, coi valori (4) per i parametri.

I polinomi corrispondenti sono stati scritti seguendo il principio di composizione di Heilbronner<sup>(12)</sup> che si è dimostrato utilissimo e le radici si sono ottenute mediante approssimazione numerica ed interpolazione grafica.

(10) Per i radicali il risultato non cambia dato che l'atomo di ossigeno dell'ossidrile non prende parte alla coniugazione.

(11) A. PULLMAN e B. PULLMAN, *Les Theories Electrochimiques de la Chimie Organique*. Masson, Paris (1952).

(12) E. HEILBRONNER, « *Helv. Chim. Acta* », 36, 170 (1950).

TABELLA I.

*Radici negative ( $-w'$ ) delle equazioni secolari corrispondenti ai composti elencati, con valori dei parametri (4).*

Benzald.	Crotonald.	$\alpha$ -Naftald.	$\beta$ -Naftald.	9-Antrald.	9-Fenantrald.
0,568	0,424	0,443	0,480	0,317	0,438
0,800	0,800	0,800	0,661	0,800	0,641
1,045	0,916	0,800	0,924	0,800	0,800
1,392	1,168	1,075	0,997	0,800	0,925
—	1,400	1,209	1,251	1,045	0,990
—	—	1,486	1,477	1,176	1,213
—	—	—	—	1,333	1,318
—	—	—	—	1,527	1,528

In tabella II le energie totali  $\pi$  secondo S. e H. (valore dei parametri (2)) sono confrontate con quelle della tabella I. Come si vede le differenze sono sensibilmente costanti.

TABELLA II.

	$-\Sigma w'$		Differenza
	parametri (2)	parametri (4)	
Benzald. . . . .	4,66	3,80 <sub>5</sub>	0,86
Crotonald. . . . .	5,58	4,71	0,87
$\alpha$ -Naftald. . . . .	6,67 <sub>5</sub>	5,81	0,86
$\beta$ -Naftald. . . . .	6,66	5,79	0,87
9-Antrald. . . . .	8,67	7,80	0,87
9-Fenantrald. . . . .	8,71	7,85	0,86

Questa ulteriore verifica ci può far affermare con fiducia che l'effetto, sull'energia totale  $\pi$ , della sostituzione di un gruppo  $\text{CH}_2$  terminale in un idrocarburo coniugato con un atomo di ossigeno, è sempre il medesimo. L'interesse di questo fatto per il nostro problema attuale è quello di dare una



giustificazione alla linearità della relazione tra potenziale di semigradino polarografico di composti aldeidici aromatici ed energia degli elettroni  $\pi$  dei corrispondenti idrocarburi isoaromatici.

È ragionevole pensare che la relazione valga pure per i composti di tipo chetonico, dato che il meccanismo per il processo di riduzione polarografica è identico a quello delle aldeidi.

Valori utilizzabili per una verifica su sistemi chetonici sono piuttosto scarsi in letteratura. Vi sarebbero quelli di Scaramelli<sup>(13)</sup> e alcuni recenti di Sartori e coll.<sup>(14, 15)</sup>. I primi sono però ottenuti in ambienti non tamponati e i secondi non sono sempre molto certi e per alcuni composti si hanno valori discordanti da quelli di altri Autori.

In uno dei lavori di Sartori e coll.<sup>(14)</sup> vi è non di meno un tentativo di interpretazione di potenziali di sistemi carbonilici basato essenzialmente sulla semplice idea di Branch e Calvin<sup>(16)</sup>. Vi è però da fare un'osservazione sul modo con cui la teoria viene applicata ai sistemi chetonici. Il Sartori prende in esame i seguenti tre composti: aldeide benzoica, acetofenone e benzofenone.

Ora, nel calcolo delle forme mesomere per l'acetofenone egli attribuisce lo stesso peso alle forme kekuleiane e a quelle che tengono conto dell'iperconiugazione, mentre è noto che a queste ultime è da attribuire un « peso » molto minore. Il fatto che la linearità della relazione:

$$\pi_{1/2} = a - b \left( \ln \frac{N_2}{N_1} \right)$$

(dove  $N_2$  e  $N_1$  sono rispettivamente i numeri delle forme mesomere per il composto ossidato e per il radicale), sia rispettata in modo discreto, è una pura coincidenza ed è dovuto al fatto che si è trascurato il notevole effetto induttivo del metile che esiste solo nel caso dell'acetofenone. Non è cioè istituibile in genere il confronto fra composti in cui il carbonile si trovi in diversa situazione rispetto all'effetto induttivo, o di altro tipo, dovuto ad altri gruppi presenti.

L'INFLUENZA DEI SOSTITUENTI NEGLI ANELLI AROMATICI. — Per quanto riguarda questo secondo punto non vi è molto da dire se non che è ormai divenuta pratica corrente legare i potenziali di riduzione di composti aromatici variamente sostituiti negli anelli, coi valori delle costanti  $\sigma$  di Hammett che ne rappresentano essenzialmente l'effetto induttivo. Per i sostituenti fuori dell'anello non vi è ancora una sistematica ben definita e si ricorre ancora alla qualitativa regola di Shikata. Manca pure un trattamento unitario dei molteplici effetti orto. È augurabile che tali lacune vengano colmate dalle prossime ricerche sull'argomento.

(13) G. SCARAMELLI, « Boll. Fac. Chim. Ind. Bologna », 3, 20 (1942).

(14) G. SARTORI e C. CALZOLARI, « Ricerca Sci. », 14, 1471 (1954).

(15) C. CALZOLARI e C. FURLANI, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna », XII, 14 (1954).

(16) G. BRANCH e H. CALVIN, *The Theory of org. Chemistry*, Prentice Hall, N. Y., 1941.

Un altro lato quantitativo del problema dell'effetto dei sostituenti sulla riducibilità del carbonile era stato messo in evidenza tempo fa dai russi Valiasko e Rozum<sup>(17)</sup> che hanno voluto trovare, senza però darne alcuna giustificazione, una certa proporzionalità tra i potenziali di riduzione dell'acetofenone e dei suoi derivati ossi- e metossi-sostituiti e l'energia di eccitazione della banda d'assorbimento ultravioletto caratteristica del gruppo CO. Questa banda è dovuta alla transizione  $n \rightarrow \pi$ , all'eccitazione cioè di uno dei due elettroni appartenenti all'orbitale molecolare non legante localizzato quasi completamente sull'atomo di ossigeno, a un livello superiore caratterizzato dall'orbitale molecolare, del sistema aromatico, non ancora occupato avente la più bassa energia.

Una relazione di tal genere sarebbe analoga a quella che vale per gli idrocarburi non saturi a nuclei condensati<sup>(18)</sup>. La questione si presenta però in questo caso con delle particolarità che la portano su un piano completamente differente e il parallelismo non è né immediatamente prevedibile, né logico. In primo luogo, infatti, nel caso degli idrocarburi le energie dei due orbitali molecolari interessati hanno caratteristiche tali di simmetria che il parallelismo è immediatamente visibile.

In termini più precisi, l'energia di uno degli orbitali molecolari, come si ottiene dai metodi della meccanica quantistica, si esprime:

$$E_i = \alpha + a_i \beta.$$

Ora, nel caso degli idrocarburi coniugati alternanti, i coefficienti  $a_i$  per i due orbitali interessanti la nostra discussione (l'ultimo orbitale occupato ed il primo non occupato) sono sempre di segno opposto e di uguale valore assoluto (le energie sono cioè simmetriche rispetto allo zero arbitrario). Da ciò è facile dedurre come il salto elettronico che determina la banda ultravioletta ( $\Delta E = 2 a \beta$ ) e quello che determina il potenziale polarografico ( $\Delta E = a \beta$ ), siano espressi dallo stesso coefficiente. Nel caso invece dei composti carbonilici aromatici (proprio per la presenza del gruppo CO) tali caratteristiche di simmetria vengono a mancare per cui il parallelismo non è ammissibile *a priori*.

In secondo luogo, come già abbiamo visto molte volte in precedenza, nel caso dei composti carbonilici, anche le energie del prodotto di riduzione (il radicale) entrano in gioco nel determinare il potenziale di riduzione, mentre per gli idrocarburi tutto è legato solamente all'energia  $\pi$  del composto che si riduce.

Sono state allora, a questo proposito, eseguite alcune esperienze spettro-polarografiche, sui cui dettagli si riferirà a parte<sup>(19)</sup> su Acetofenoni sostituiti da gruppi aventi prevalentemente effetto induttivo. L'esame dei risultati (Tabella III) mostra che il parallelismo dichiarato dagli Autori russi non sussiste affatto. Se c'è da notare qualche cosa, in caso, è proprio

(17) N. A. VALIASKO e Y. S. ROZUM, «Zhur. Obshchei Khim.», 18, 710 (1948).

(18) A. MACCOLL, «Nature», 163, 178 (1949).

(19) G. GIACOMETTI e G. CALDATO, in corso di stampa.

il fatto, che sembrerebbe paradossale, che i sostituenti che rendono la riduzione più difficile (potenziale più negativo), spostano lo spettro verso il rosso (energia di eccitazione elettronica più bassa) e viceversa per i gruppi elettronegativi come Cl e Br. Del resto i dati su cui le considerazioni di V. e R. sono basate, portano a dei rapporti tra energia di riduzione ed energia di eccitazione elettronica che sono costanti solamente entro il  $\pm 5\%$  sulla media, scarto che rappresenta addirittura in certi casi una inversione del parallelismo. Alla luce quindi anche delle nostre esperienze, la relazione di V. e R. sembra essere più voluta che reale.

TABELLA III.

Composto	$E_{1/2}^{(*)}$ (Volt)	$\lambda^{(**)}$ max. ( $\text{\AA}$ )
Acetofenone . . . . .	-1,057	$3125 \pm 25$
p-CH <sub>3</sub> Acetofenone . . . . .	-1,094	$3195 \pm 20$
p-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Acetofenone . . . . .	-1,105	$3175 \pm 10$
p-Cl Acetofenone . . . . .	-1,003	$3115 \pm 15$
p-Br Acetofenone . . . . .	-0,980	$3100 \pm 20$

(\*) In ambiente alcolico al 47,5 %, valori estrapolati a pH zero e riferiti all'elettrodo a calomelano saturo; Temp. 25°C.

(\*\*) Valori corrispondenti alla banda  $n \rightarrow \pi$ , misurata nelle stesse soluzioni nelle quali si eseguivano i polarogrammi.

La via da seguire per trovare delle relazioni strutturali quantitative in questi casi è invece del tutto analoga a quella generale esposta nel paragrafo precedente. In una prima ma significativa approssimazione si vede chiaramente come questo trattamento unitario giustifichi la relazione empirica dei potenziali colle costanti  $\sigma$  di Hammett a cui abbiamo accennato.

Infatti se indichiamo con R il composto carbonilico non sostituito e con R' il corrispondente radicale, la differenza di energia tra i due composti, quando all'atomo di carbonio  $r$  vi sia un sostituyente  $x$ , è data da

$$\alpha_x (q_r - q'_r)$$

dove  $q_r$  e  $q'_r$  sono le densità elettroniche all'atomo  $r$  in R e R' rispettivamente <sup>(20)</sup>.  $\alpha_x$  è la variazione dell'integrale coulombiano dell'atomo  $r$  prodotta dal sostituyente  $x$ , esso dipende essenzialmente dalla elettronegatività di  $x$  e quindi, come ha anche mostrato rigorosamente Jaffè <sup>(21)</sup> è legato alla costante di Hammett, relativa ad  $x$ .

(20) H. C. LONGUET-HIGGINS, « J. Chem. Phys. », 18, 265 (1950).

(21) H. H. JAFFÈ, « J. Chem. Phys. », 20, 279 (1952).

**Chimica organica.** - *Su la struttura delle quassine* <sup>(\*)</sup>. Nota I di LUIGI CANONICA ed ALBERTO FIECCHI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

Il principio amaro del cosiddetto legno quasso, del quale sono note le proprietà medicamentose e quelle, tuttora interessanti, di selettivo insetticida, venne per la prima volta isolato in forma cristallina da Winkler <sup>(1)</sup> che lo denominò quassina, già nel 1835. Il legno allora estratto proveniva dalla *Quassia amara* L.: quello di specie affini (*Picraena excelsa* ecc.), che il commercio del pari fornisce come legno quasso, non sembra per quanto fino ad oggi è noto <sup>(2)</sup> differire per la natura dei costituenti solubili.

Ricerche successive, riassunte in una più recente Nota di Clark <sup>(3)</sup>, fallivano lo scopo di ottenere dalla quassina prodotti di degradazione significativi per l'indagine strutturale, o di individuare gli aggruppamenti funzionali presenti nella sua molecola.

Ancora nel 1950 noi avevamo intrapreso al riguardo studi rimasti inediti, constatando che la quassina p. f. 205-206° dei precedenti Autori non costituiva un prodotto unitario, come si era fino ad allora ritenuto, ma la miscela di due sostanze, separabili per cromatografia su allumina con il procedimento della eluizione frazionata, l'una di formula bruta  $C_{22}H_{30}O_6$ , p. f. 228°  $[\alpha]_D^{210} + 45,1$ , l'altra di formula  $C_{22}H_{28}O_6$ , p. f. 222°  $[\alpha]_D^{210} + 34,0$ , p. f. in miscela 205-206°: esse apparivano di analoga struttura, essendo la prima trasformabile nella seconda per moderata ossidazione cromica, ed ugualmente dotate di sapore amarissimo, percepibile in soluzione acquosa già alla concentrazione di  $3 \cdot 10^{-7}$  g/l.

Le nostre ricerche erano in corso, allorché Adams e Whaley <sup>(4)</sup> e poco dopo London, Robertson e Worthington <sup>(2)</sup>, indipendentemente, comunicavano risultati i quali coincidevano con quelli da noi ottenuti nel frazionamento della quassina p. f. 205-206° ed approfondivano le conoscenze sui due prodotti che ne provengono. I due fascicoli del « J. Chem. Soc. » testé apparsi riportano due nuovi lavori di Robertson e collaboratori <sup>(5), (6)</sup>, sull'argomento: giudichiamo opportuno riferire su alcune reazioni delle quassine, connesse a quelle ivi descritte, che noi abbiamo nel contempo esaminate.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) « Repert. pharmac. » (2), 4, 85 (1835).

(2) Cfr. LONDON, ROBERTSON e WORTHINGTON, « J. Chem. Soc. », 3431 (1950).

(3) « J. Am. Chem. Soc. », 59, 927 (1937).

(4) « J. Am. Chem. Soc. », 72, 378 (1950).

(5) BEER, JAQUISS, ROBERTSON e SAVIGE, « J. Chem. Soc. », 3672 (1954).

(6) HANSON, JAQUISS, LAMBERTON, ROBERTSON e SAVIGE, « J. Chem. Soc. », 4238 (1954).



Denominando con Robertson e collaboratori quassina il prodotto p. f. 222° (isoquassina di Adams e Waley) neoquassina il prodotto, p. f. 228°, le nozioni fino ad ora acquisite soprattutto attraverso le belle ricerche di tali Autori possono così riassumersi: la quassina contiene due gruppi metossili saponificabili dagli acidi forti, l'uno con grande facilità, l'altro più difficilmente, se pure in condizioni ancor moderate.

La prima saponificazione fornisce una norquassina, la quale dà reazione enolica al cloruro ferrico, copula con i diazoderivati aromatici, ma per azione del diazometano rigenera la quassina solo con scarse rese, accanto a quantità maggiori di un prodotto isomero della quassina stessa.

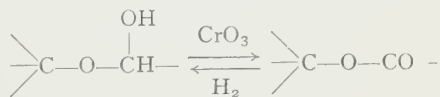
La saponificazione di ambedue i metossili porta ad una bisnorquassina, riducente al Fehling, inerte di fronte ai diazoderivati aromatici e priva di reazione al cloruro ferrico: si deve presumere che nella saponificazione a bisnorquassina intervengano modificazioni di struttura, poiché per metilazione il bisnorderivato, assumendo uno o due metili, genera prodotti diversi dalla norquassina e dalla quassina.

Nella molecola della quassina è presumibilmente presente un aggruppamento lattonico, il quale determina la solubilità del prodotto negli idrati alcalini, non nei carbonati: aggruppamento peraltro inerte all'ammoniaca, e, come noi abbiamo constatato, alla prolungata azione della idrazina.

Dei due rimanenti ossigeni, l'uno pare costituire una funzione chetonica, come risulta dagli spettri I. R. determinati da Adams e Whaley; l'altro un ossidril terziario: ma nuove determinazioni dell'idrogeno attivo in parte infirmano tale conclusione. Il gruppo chetonico è però inerte di fronte ai reattivi specifici ed all'idrogenazione catalitica.

La molecola della quassina contiene infine un doppio legame titolabile con acido perbenzoico e facilmente idrogenabile. Un processo per ora non interpretabile, promosso, in adatte condizioni, dagli acidi, trasforma in parte la quassina in una isoquassina isomera, con la quale essa raggiunge in soluzione uno stato di equilibrio.

La neoquassina si trasforma per moderata ossidazione cromica in quassina e può da questa ottenersi per idrogenazione; purtuttavia essa non presenta proprietà lattoniche: Robertson e collaboratori interpretano tale comportamento supponendo che il rapporto di struttura tra neoquassina e quassina non sia quello che intercorre tra un alcool secondario ed il chetone corrispondente, ma tra un lattone ed un semiacetale secondo lo schema:



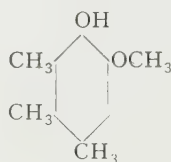
In accordo con questa ipotesi la neoquassina contiene un ossidril facilmente eterificabile dagli alcoli in presenza di piccole quantità di acidi minerali: i prodotti che ne risultano (o-metil, o-etilneoquassina) hanno carattere di acetali.



La riduzione della funzione lattonica della quassina modifica peraltro anche la reattività dei due metossili, uno dei quali è nella neoquassina stabile agli acidi; l'altro facilmente saponifica a dare una norneoquassina.

Fatti di polimorfismo, e la tendenza delle quassine e dei loro derivati ad associare o a trattenere assai tenacemente i solventi ne complicano ulteriormente lo studio.

Tra le reazioni demolitive la sola deidrogenazione con selenio sembra aver fino ad oggi fornito risultati significativi: alla temperatura di 330° essa genera dalla quassina con rese scarsissime (inferiori all'1 %) un fenolo solido, individuato per il 4-5-6-trimetilguaiacolo (I):



(I)

Noi avevamo intrapreso lo studio della distillazione su zinco, operando sulla miscela quassina-neoquassina quale risulta dall'estrazione del legno, alla temperatura di 350-370° ed in corrente di idrogeno.

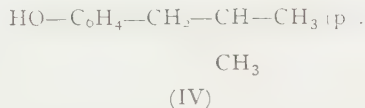
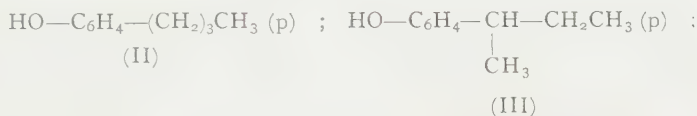
Accanto a prodotti altobollenti di carattere prevalentemente neutro, ottenevamo una modesta frazione costituita da una miscela di fenoli, volatili in corrente di vapore. La colorazione assunta per trattamento con idrato sodico, la riduzione della soluzione ammoniacale di argento, la precipitazione con acetato di piombo, indicavano in tale frazione la presenza di o-difenoli, ma una diretta separazione non era possibile per l'esiguità dei quantitativi disponibili (mg 150 circa a partire da 5 gr di quassina). Saggi preliminari indicarono la possibilità di frazionare per cromatografia su allumina gli azoici ottenuti direttamente, copulando la miscela con il cloruro di p-nitrofenil-diazonio. Tali derivati si differenziano nella loro composizione centesimale in modo sufficientemente netto da permettere all'analisi elementare di distinguere un termine da quello omologo.

La cromatografia forniva accanto ad altri prodotti ottenuti in quantità insufficiente per uno studio, un azoico p.f. 131-132°, costante dopo ripetute cristallizzazioni, per il quale l'analisi indicava la formula bruta di un nitrofenilazobutilfenolo. Con gli acetati di rame e di nichel esso precipitava dalle soluzioni alcooliche lacche caratteristiche per gli o-fenilazofenoli, secondo la reazione indicata da Elkins e Hunter <sup>(7)</sup> e da noi trovata specifica esaminando vari azoici preparati per confronto dal cloruro di p-nitrofenil-diazonio.

A causa del punto di fusione, relativamente basso, formulammo l'ipotesi che nella molecola dell'azoico i quattro atomi di carbonio extranucleari

(7) « J. Chem. Soc. », 1598 (1935).

costituissero un'unica catena laterale, presente in posizione p-rispetto all'ossidril fenolico, come indicava la reazione delle lacche, e preparammo per confronto, secondo la letteratura o con metodi già applicati in casi analoghi, i tre p-butilfenoli (II), (III), (IV):



Di questi il primo genere con il cloruro di p-nitrofenildiazonio un azoico identico nel p.f. e nelle sue caratteristiche a quello da noi ottenuto dalla quassina: gli altri due si differenziano nettamente.

Notiamo inoltre che esso fornisce un unico azoico, avendo gli altri prodotti ottenuti dalla cromatografia, carattere collaterale: per i fenoli del tipo (V):

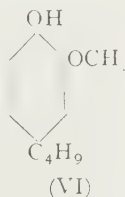


(R, R' = alchili)

risulta dalla copulazione una miscela dei due possibili isomeri per lo più in quantità approssimativamente uguali <sup>(8)</sup>.

La presenza nel distillato su zinco di difenoli accanto a monofenoli faceva supporre che questi derivassero dai primi per riduzione.

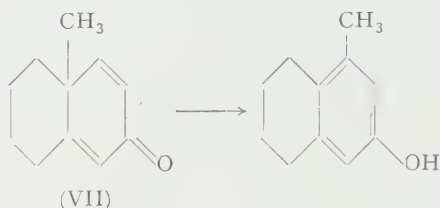
Da distillazioni condotte a temperatura meno elevata (290-300°) si otteneva, attraverso il trattamento prima indicato e quale principale prodotto, un p-nitrofenilazoderivato che l'analisi riferisce al monometil etero di un butildifenolo e la reazione delle lacche alla struttura di un o-azoossi. Trattasi presumibilmente del derivato del 4-n-butilguaiacolo (VI):



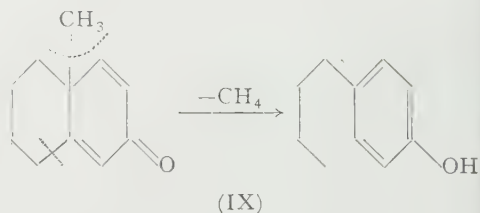
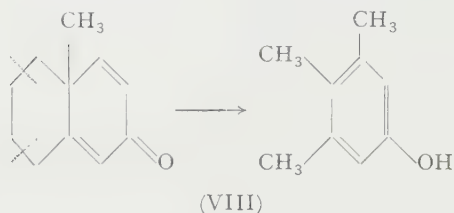
che ci riserviamo di preparare per confronto.

(8) PARKES, « J. Chem. Soc. », 2145 (1948).

Interessa comunque rilevare che a differenza del trimetilguaiacolo di Robertson e collaboratori il prodotto da noi ottenuto non è sostituito nella posizione 3—. Non si può evidentemente escludere che tale posizione venga a liberarsi nella distillazione su zinco, ma giudichiamo probabile che il metile in 3— del trimetilguaiacolo, provenga dalla trasposizione di un metiletere enolico o di un metile quaternario. Migrazioni di quest'ultimo tipo possono prodursi con particolare facilità, tra l'altro nella aromatizzazione di strutture quali la (VII):



la chimica della santonina ne costituisce un esempio. Almeno formalmente, esiste la possibilità che, da tali strutture o da altre analoghe derivino sia trimetilfenoli, che p-n-butilfenoli, attraverso gli schemi (VIII) (IX):



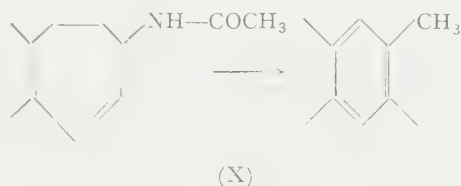
È comunque significativo il fatto che prodotti di natura fenolica si formino dalla quassina anche nell'ambiente riducente delle nostre esperienze, oltre che su selenio.

Nella distillazione su zinco constatavamo inoltre lo sviluppo di anidride carbonica in quantità quasi equimolecolare rispetto alla quassina presente nella miscela con la neoquassina: il fatto costituisce un argomento in favore della struttura lattonica.

L'ossidril fenolico libero presente nei prodotti di degradazione delle quassine potrebbe anche originarsi da un metossile aromatico, secondo un processo talvolta riscontrato nella distillazione su zinco di prodotti a struttura complessa, come la emetina<sup>(9)</sup>; ma la presenza di nuclei aromatici nella quassina finora non risulta da altri indizi.

(9) KELLER, « Arch. Pharm. », 251, 709 (1913).

La degradazione a fenoli non dimostra necessariamente neppure la presenza di nuclei esaatomici: nuclei eptaatomici come quello del tropolone, recentemente riscontrato in sostanze naturali, passano facilmente ad aromatici con espulsione di un carbonio; così il nucleo centrale della colchicina nella distillazione dell'alcaloide su zinco, con formazione di 9-metilfenantrene<sup>(10)</sup> (X):



Rileviamo anzi che ai tropoloni le quassine si accostano in varie loro proprietà: tra l'altro nell'immediata solubilità in acido cloridrico concentrato, con intensa colorazione gialla che scompare per diluizione, da noi osservata per la quassina e la neoquassina<sup>(11)</sup>.

Tra i derivati chetonici era noto per la quassina il 2-4-dinitrofenilidrazone, amorfo ed evidentemente eterogeneo, il quale risulta dalla prolungata azione della 2-4-dinitrofenilidrazina in mezzo acido: purificato per cromatografia, esso fornisce un prodotto cristallino, che riscontrammo positivo alla reazione delle pirazoline di Knorr ed insolubile negli alcali caustici acquosi. Le medesime caratteristiche presenta il prodotto da noi ottenuto nelle stesse condizioni dalla neoquassina, che però risulta unitario e cristallino. L'analisi indica che esso deriva dalla condensazione sulla neoquassina di una molecola di alcool etilico e di una di 2-4-dinitrofenilidrazina, con eliminazione di due molecole di acqua; il medesimo prodotto poteva ottenersi dalla o-etilneoquassina. Constatammo l'inerzia delle quassine ad un prolungato trattamento con idrazina e semicarbazide.

Dalla norneoquassina ottenevamo con facilità un prodotto di colore più chiaro, che fornisce all'analisi i valori di un vero fenilidrazone, negativo alla reazione di Knorr e solubile con colorazione granata in idrato sodico; per azione della semicarbazide un prodotto di somma (senza eliminazione di acqua).

Anche il monofenilidrazone ottenuto dall'azione di un eccesso di fenilidrazina sulla bisnorquassina è negativo alla reazione pirazolinica.

Abbiamo altresì esaminato gli azoici, i quali risultano dall'azione dei diazoderivati sulla norquassina e sulla norneoquassina, constatando che il cloruro di p-nitrofenildiazonio in eccesso genera prodotti presumibilmente provenienti da una doppia copulazione, il cloruro di fenildiazonio in quantità stechiometrica prodotti di monocopulazione: non è tuttavia da escludere che al processo di copulazione altri se ne accompagnino.

(10) WINDAUS e SCHIELE, « Ber. », 56, 846 (1923).

(11) Ved. sulla chimica dei tropoloni, il lavoro riassuntivo di HUBER in « Angew. Chem. », 63, 501 (1951).

Ringraziamo i dottori A. Bonati, L. Vallarino, E. Bergamo per la collaborazione a parte di queste ricerche, nonché l'Istituto Biochimico Italiano il quale ha gratuitamente messo a nostra disposizione le sue attrezzature industriali per l'estrazione del legno.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Estrazione del legno di Quassia amara L.* -- Quattro lotti, ciascuno di Kg 50 del legno ridotto a minuti frammenti mediante un disintegratore, venivano estratti in serie con acqua a 80°, fino a scomparsa quasi completa del sapore amaro. Le soluzioni acquose riunite (litri 2500 circa), filtrate dopo aggiunta di Kg 3 di farina fossile venivano esaurite mediante tre estrazioni con cloroformio usando ogni volta litri 200 di solvente: dopo di che, ormai quasi insapore, venivano gettate.

Gli estratti cloroformici si concentravano a pressione atmosferica fino ad 1/20 del volume iniziale ed il residuo si filtrava dopo aggiunta di gr 100 di carbone attivo, lavando poi questo con cloroformio bollente. Dopo ulteriore concentrazione a pressione ridotta fino ad un volume di litri 6, si percolava la soluzione, intensamente colorata in bruno, attraverso una colonna di gr 800 di allumina debolmente alcalina, attività II della scala di Brockmann, che veniva da ultimo lavata con cloroformio. L'allumina trattiene un colorante verde bruno, un altro rosso chiaro ed una quantità considerevole di prodotti resinosi, non amari, che possono eluirsi con metanolo. Il filtrato di colore giallo vivo abbandonava per evaporazione un residuo vischioso, che tenacemente tratteneva le ultime parti del solvente: eliminato questo per riscaldamento su bagno maria in poca acqua, si cristallizzava da metanolo diluito. Il prodotto ottenuto conteneva ancora piccole quantità di sostanze resinose, che si rimuovevano mediante una digestione con acetato di etile: una nuova cristallizzazione da metanolo diluito forniva una massa cristallina candida p. f. 205-206°, avente tutte le caratteristiche della quassina di Clark. Dopo recupero delle varie acque madri, si ottenevano complessivamente dai Kg 200 gr 280 di prodotto puro.

*Distillazione delle quassine su zinco.* -- In un tubo di vetro di mm 15 di diametro tirato ad una estremità a largo capillare comunicante con un recipiente refrigerato, si introducono gr 30 di zinco in polvere, lavato con acido cloridrico diluito, alcool ed etere, poi gr 5 di miscela quassina-neoquassina, quale si ottiene dall'estrazione del legno, diluito con gr 120 di zinco, e da ultimo gr 30 del metallo. Attivata una lenta corrente di idrogeno si riscalda a 350-370°. Inizia dopo qualche tempo la distillazione di una frazione mobile e facilmente volatile cui segue quella di un olio viscoso. L'idrogeno spinge i gas della pirolisi a gorgogliare in un eccesso di soluzione di idrato di bario: da tale soluzione si recuperano alla fine gr 1 di carbonato di bario.

Dopo 3-4 ore la distillazione è al termine: il distillato si raccoglie in etere, dal quale la frazione fenolica si asporta con soluzione di idrato sodico. Dopo acidificazione la fase acquosa si distilla in vapore: il distillato, riducente alla soluzione ammoniacale d'argento e che precipita per aggiunta di soluzione di acetato di piombo, si addiziona di acido acetico fino a renderlo omogeneo, poi di gr 2 di acetato sodico, e raffreddando in ghiaccio, della soluzione del diazo preparato da mg 500 di p-nitroanilina. Si evitava di operare in mezzo alcalino per deprimere eventuali processi di policopulazione: dopo quattro ore si neutralizzava, raffreddando in ghiaccio, la maggior parte dell'acido acetico, estraendo con cloroformio. Evaporato il solvente, i prodotti della copulazione (mg 220) venivano disciolti in benzolo e cromatografati su 50 gr di allumina neutra, attività I. Le eluizioni con benzolo e benzolo-cloroformio (19:1) davano solo piccole quantità di prodotti collaterali. Con benzolo-cloroformio (4:1) venivano eluiti mg 110 di prodotto p. f. 131-132° anche dopo due cristallizzazioni da etanolo diluito. All'analisi:

	trov. %:	C	64,06	H	5,80	N	13,91; 13,72
per $C_{16}H_{17}N_3O_3$	calc.		64,19		5,73		14,04



In altra distillazione su zinco, alla temperatura di 290-300°, si otteneva attraverso il procedimento prima indicato, quale principale prodotto, un azoico p. f. 152-154°. All'analisi:

	trov. %:	C	62,30	H	5,96
per $C_{17}H_{19}N_3O_4$	calc.		62,00		5,81

Come il precedente esso fornisce con soluzione alcoolica di acetato di rame una lacca di colore rosso-vino, di colore rosso con soluzione di acetato di nichel.

*p*-nitrofenilazoi del *p*-*n*-butilfenolo, del *p*-*sec*.-butilfenolo e del *p*-isobutilfenolo. — I tre *p*-butilfenoli venivano preparati secondo i metodi della letteratura <sup>(12)</sup>. La loro copulazione con la quantità stechiometrica di diazo di *p*-nitroanilina fornisce i tre azoici corrispondenti, dei quali si riportano i p. f. (costanti dopo cristallizzazione da etanolo diluito) e le rispettive analisi:

<i>n</i> -butil . . . . .	p. f.	131-132°	N	trov. %:	13,99
<i>sec</i> .-butil . . . . .	»	143°			14,11
isobutil . . . . .	»	158°			13,94
per $C_{16}H_{17}O_3N_3$			calc.		14,04

*Azione dei reattivi chetonici sulla neoquassina.* — Milligrammi 100 di neoquassina p. f. 228° vengono disciolti in cm<sup>3</sup> 6 di etanolo con mg 50 di 2-4-dinitrofenilidrazina e mg 300 di acido solforico concentrato. Si riscalda all'ebollizione per 4 ore lasciando poi a riposo per 2 giorni: il precipitato cristallino si filtra e si cristallizza da etanolo, poi da acetato di etile-etero isopropilico; cristalli appiattiti di colore arancione p. f. 237-238° costante. All'analisi:

	trov. %:	C	60,08	H	6,51	N	9,90
per $C_{30}H_{38}O_9N_4$	calc.		60,19		6,40		9,36

Anche alla cromatografia su allumina il prodotto risulta omogeneo, la sua soluzione in acido solforico concentrato, di colore giallo chiaro, diventa rosso cupa per aggiunta di una traccia di soluzione di bicromato potassico, rosso vivo con il nitrato sodico.

Dal medesimo trattamento della neoquassina, ma in assenza di acido solforico si recuperavano inalterati i prodotti di partenza. La neoquassina resta inalterata anche dopo trattamento per più giorni con acetato di semicarbazide in metanolo.

Il trattamento della *o*-etilneoquassina con 2-4-dinitrofenilidrazina, nel modo descritto per la neoquassina genera un prodotto identico anche al saggio di fusione in miscela. All'analisi:

	trov. %:	C	59,89	H	6,56
per $C_{30}H_{38}O_9N_4$	calc.		60,19		6,40

*Azione dei reattivi chetonici sulla norneoquassina.* — Per azione della 2-4-dinitrofenilidrazina in soluzione etanolica ed in presenza di acido solforico, come sopra descritto, la norneoquassina genera un 2-4-dinitrofenilidrazone di colore giallo chiaro p. f. 208-209° costante dopo due cristallizzazioni da etanolo. All'analisi:

	trov. %:	C	58,48	H	5,90	N	9,66
per $C_{27}H_{32}O_9N_4$	calc.		58,27		5,79		10,07

(12) BARANGER, « Bull. Soc. Chim. », 49, 1214 (1931); BARBER e HASLEWOOD, « Biochem. J. », 39, 287 (1945); ESTRICHER, « Ber. », 33, 442 (1900).

Il semicarbazone viene ottenuto lasciando a riposo per 24 ore mg 100 di norneoquassina disciolti in  $\text{cm}^3$  3 di metanolo con la soluzione di acetato di semicarbazide preparata da mg 300 del cloridrato. Evaporato il solvente nel vuoto, il residuo si riprende con acqua e si cristallizza da metanolo diluito; p. f.  $236-237^\circ$  costante. All'analisi:

	trov. %:	C	58,23	H	7,46	N	9,76
per $\text{C}_{22}\text{H}_{33}\text{O}_7\text{N}_3$	calc.		58,52		7,37		9,31

*Azione della fenilidrazina sulla bisnorquassina.* - Milligrammi 67 di bisnorquassina vengono riscaldati con mg 66 di fenilidrazina in  $\text{cm}^3$  6 di etanolo al 70% e  $\text{cm}^3$  0,5 di acido acetico: dopo 1 ora si evapora in parte il solvente e si diluisce con egual volume di acqua, cristallizzando poi il precipitato di colore giallo vivo da etanolo diluito fino a p. f.  $171-173^\circ$  costante. All'analisi:

	trov. %:	N	6,32
per $\text{C}_{26}\text{H}_{30}\text{O}_5\text{N}_2$	calc.		6,22

*Azione dei diazoderivati sulla norquassina e sulla norneoquassina.* - Milligrammi 100 di norquassina vengono disciolti in  $\text{cm}^3$  5 di idrato sodico 2 N e nella soluzione raffreddata in ghiaccio si introduce la soluzione del diazoderivato preparato da mgr 100 di p-nitroanilina; dopo 1 ora si acidifica con acido acetico e si filtra il voluminoso precipitato di colore rosso vivo (mg 175). Il prodotto si purifica per cromatografia da benzolo cloroformio su allumina (attività II) e cristallizzazione da acido acetico diluito p. f.  $180-181^\circ$  costante. All'analisi:

	trov. %:	N	12,46; 11,02
per $\text{C}_{33}\text{H}_{34}\text{O}_{10}\text{N}_6$	calc.		12,46

Nelle medesime condizioni la norneoquassina dà un azoico p. f.  $179-181^\circ$ . All'analisi:

	trov. %:	N	10,68
per $\text{C}_{33}\text{H}_{36}\text{O}_{10}\text{N}_6$	calc.		12,42

I valori relativamente bassi dell'azoto possono forse in parte imputarsi all'estrema difficoltà di combustione di questi prodotti.

Per la reazione con il diazo di anilina mg 150 di norneoquassina disciolti in  $\text{cm}^3$  8 di idrato sodico normale si trattano in ghiaccio con  $\text{cm}^3$  1,8 di soluzione 0,2 normale del diazo. Lasciando a riposo per una notte a freddo si separa un modesto precipitato di colore rosso vivo che si filtra. Il filtrato per acidificazione dà un precipitato di colore arancio che si cristallizza da etanolo diluito; p. f.  $146-147^\circ$  con decomposizione. All'analisi:

	trov. %:	N	5,89
per $\text{C}_{27}\text{H}_{33}\text{O}_6\text{N}_2$	calc.		5,82

**Geologia.** — *Il Daniano in Italia*<sup>(\*)</sup>. Nota di MARIA BIANCA CITA, presentata dal Socio A. DESIO.

Durante uno studio recentemente ultimato, ho avuto modo di occuparmi del limite Cretaceo-Eocene in Italia<sup>(1)</sup>. Le mie ricerche si sono rivolte particolarmente a serie con passaggio continuo dal Mesozoico al Terziario: serie di mare profondo, in cui la sedimentazione non è stata turbata da alcun sensibile mutamento in corrispondenza del passaggio anzidetto dal Cretaceo all'Eocene.

I sedimenti di mare profondo, generalmente calcarei (facies di «saglia») delle età menzionate, sono ricchissimi in tutta Italia di microfaune a foraminiferi assai caratteristiche, costituite in grande prevalenza da generi e specie di habitat pelagico: l'uniformità litologica che si può riconoscere in queste serie è talora sorprendente, tanto che il limite Mesozoico-Terziario, micropaleontologicamente — come vedremo — nettissimo e caratteristico, non è praticamente riconoscibile sul terreno. L'identità litologica in terreni stratigraficamente adiacenti fa supporre una identità di condizioni ambientali di sedimentazione: in questo caso l'unico fattore che influenza le variazioni faunistiche osservabili nella serie è l'evoluzione, come funzione del tempo; perciò osservando serie continue, litologicamente uniformi, ho potuto esaminare variazioni faunistiche che devono essere interpretate in senso evolutivo.

Le mie osservazioni si riferiscono soprattutto a serie provenienti dalla zona subalpina e prealpina della Lombardia e del Veneto. Grazie alla gentilezza della direzione dell'AGIP Mineraria, che mi ha offerto in studio i campioni, ho potuto esaminare anche il materiale proveniente dal pozzo stratigrafico di Vincenza Nuova, presso Ferrara. Un'altra serie di superficie proviene dai dintorni di Trapani, nella Sicilia occidentale.

Se si tien conto delle osservazioni dei geologi svizzeri Renz, Reichel e Bally sull'Appennino Centrale, di quelle di Bruschi e Petrocchi sul Palermitano, si può dire che la zona considerata abbraccia quasi tutta l'Italia.

Nelle serie che ho studiato si nota la seguente successione faunistica, dall'alto in basso:

c) zona a Globorotalie, con *Truncorotalia velascoensis* e grosse Globigerine a guscio spesso;

b) zona a piccole Globigerine a guscio sottile, con qualche *Gümbelina*;

a) zona a Globotruncane, con *Globotruncana stuarti*, *G. contusa*, *Pseudotextularia varians*, ecc.

In base alle ampie e particolareggiate conoscenze micropaleontologiche e stratigrafiche che si hanno sul Cretaceo superiore della Tetide, si può affermare con sicurezza che la zona a) è riferibile al Maestrichtiano, e

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Milano.

(1) M. B. CITA, *The Cretaceous-Eocene boundary in Italy*. In corso di stampa su «Proc. IV World Petroleum Congress».

particolarmente al Maestrichtiano superiore, nel quale è tipica l'associazione faunistica indicata sopra.

La zona *c*) può essere attribuita senza riserve al Paleocene, date le buone conoscenze che si hanno di questo livello sia nell'America Centrale sia nell'Europa Meridionale, sia infine in tutta la regione mediterranea.

Quanto alla zona *b*), che occupa costantemente, in tutte le sezioni osservate, una posizione intermedia fra le altre due, la sua attribuzione al Daniano verrà discussa in seguito.

A questo punto devo far notare che i campioni da me esaminati non si prestavano, per la loro natura litologica, ad essere disgregati meccanicamente, per cui non ho potuto avere a disposizione residui di lavaggio con fossili isolati, ma ho dovuto ricorrere allo studio su sezioni sottili. Ora in queste condizioni si può arrivare senza eccessive difficoltà ad una determinazione specifica quando si tratta di Globotruncane e di Globorotalie, mentre per le Globigerine la classificazione è pressoché impossibile; perciò, mancando di determinazioni specifiche relative ai campioni appartenenti alla zona *b*) e scarseggiando d'altra parte, fino ad oggi, le conoscenze sulle microfaune a foraminiferi pelagici di età daniana, non ho potuto raggiungere per questa zona una determinazione cronologica basata esclusivamente sul suo contenuto paleontologico.

L'attribuzione al Daniano della zona *b*) è basata su tre argomenti fondamentali, che discuterò ora separatamente:

1° La posizione (stratigrafica) che la zona *b*) occupa nella serie stratigrafica - ricordo che in tutte le località dove tale zona è stata riconosciuta, la sedimentazione si presenta continua al passaggio Cretaceo-Eocene - è costantemente compresa fra la zona *a*) a Globotruncane, riferibile al Maestrichtiano superiore per il suo contenuto micropaleontologico, e la zona *c*) a Globorotalie, riferibile al Paleocene pure su basi paleontologiche. Ora in questa posizione stratigrafica, compresa fra Maestrichtiano superiore, inferiormente, e Paleocene, superiormente, noi non troviamo che il Daniano, con i livelli ad esso connessi Montiano e Thanetiano, che peraltro non è possibile tenere distinti in serie pelagiche come quelle che stiamo ora considerando.

2° Una zona a piccole Globigerine a guscio sottile, nella medesima posizione stratigrafica della nostra zona *b*) è stata recentemente riconosciuta e riferita al Daniano da vari Autori, nella regione mediterranea: ricordo Cuvillier<sup>(2)</sup> che la segnala in Aquitania, Nakkady<sup>(3)</sup> nell'Egitto (Esna Shales), Reiss<sup>(4)</sup> in Palestina.

Per alcuni di questi Autori (vedi Nakkady) i quali avevano a disposizione microfaune isolate, il riferimento cronologico è basato anche sui

(2) J. CUVILLIER, *Corrélations stratigraphiques par microfaciès en Aquitaine Occidentale*, III World Petroleum Congress, Leiden 1951.

(3) S. E. NAKKADY, *Zoning the Mesozoic-Cenozoic transition of Egypt by the Globorotaliidae*, « Bull. Fac. Sc. », n. 1, Farouk I Univ., Cairo 1951.

(4) Z. REISS, *On the Upper Cretaceous and Lower Tertiary microfaunas of Israel*, « Bull. Res. Council Israel », vol. 2, n. 1, Jerusalem 1952.



foraminiferi bentonici che accompagnano l'associazione planctonica, e che sono considerati appunto tipici del Daniano.

3° Recentemente Reichel<sup>(5)</sup> ha stabilito un confronto fra le Globigerine contenute negli strati di passaggio dal Cretaceo all'Eocene (« Scaglia senza Globotruncane e senza Globorotalie » compresa fra la « Scaglia con Globotruncane » inferiormente e la « Scaglia con Globorotalie » superiormente) della serie di Gubbio descritta da Renz nel 1936<sup>(6)</sup> e quelle contenute nel tipico Daniano di Faxe in Danimarca, mettendo in evidenza le grandissime analogie esistenti fra le due faune.

Anche la fauna a Globigerine descritta da Brönnimann<sup>(7)</sup>, proveniente da un'altra località della Danimarca, sempre di età daniana, mostra grande somiglianza con le microfaune a Globigerine appartenenti alla nostra zona *b*), in Italia.

Data quindi per dimostrata l'appartenenza della zona *b*) al Daniano, vediamo quali differenze faunistiche essa presenta rispetto alle zone sotto- e soprastanti.

Dirò innanzitutto che le variazioni faunistiche sia fra la zona *a*) e la zona *b*), sia fra quest'ultima e la zona *c*) sono talmente rapide ed improvvise che il porre un limite fra Maestrichtiano e Daniano o fra Daniano e Paleocene risulta semplice e chiaro. Assistiamo a profondi, totali mutamenti nelle faune osservando campioni prelevati a modeste distanze uno dall'altro; non bisogna dimenticare infatti che in tutte le località italiane descritte nel presente lavoro, e anche in altre località dove un livello a Globigerine corrispondente alla nostra zona *b*) è stato segnalato al passaggio dal Cretaceo all'Eocene, lo spessore di questo livello è sempre molto ridotto (pochi metri), tanto che se la campionatura non è sufficientemente fitta, esso può sfuggire facilmente all'osservazione.

Passando dalla zona *a*) a Globotruncane alla zona *b*) a Globigerine, assistiamo alla totale, completa scomparsa di specie e generi di foraminiferi che avevano avuto un grandissimo sviluppo attraverso il Cretaceo superiore. Scompare infatti il genere *Globotruncana*, che non ho mai visto sopravvivere (escludendo naturalmente gli esemplari rimaneggiati) nei livelli superiori al Maestrichtiano. Scompaiono improvvisamente e contemporaneamente alcuni generi appartenenti alla famiglia delle Heterohelicidae che erano assai tipici del Cretaceo superiore come *Planoglobulina*, *Pseudotextularia* ecc. Delle Heterohelicidae, sviluppatissime nel Maestrichtiano, sopravvive nel Daniano il sole genere *Gümbelina*: le specie daniane sono però diverse da quelle maestrichtiane, molto più piccole, con guscio più semplice e liscio.

(5) M. REICHEL, *Remarques sur les Globigérines du Danien de Faxe (Danemark) et sur celles des couches de passage du Crétacé au Tertiaire dans la Scaglia de l'Apennin*, « Ecl. Geol. Helv. », vol. 45, n. 2, Basel 1952.

(6) O. RENZ, *Stratigraphische und mikropalaeontologische Untersuchung der Scaglia (Obere Kreide-Tertiär) im zentralen Apennin*, « Ecl. Geol. Helv. », vol. 29, n. 1, Basel 1936.

(7) P. BRÖNNIMANN, *Note on planktonic Foraminifera from Danian localities of Jutland, Denmark*, « Ecl. Geol. Helv. », vol. 45, n. 2, Basel 1952.



Nel complesso l'importanza delle Heterohelicidae diminuisce enormemente passando dalla zona *a*) alla zona *b*).

Un altro genere pelagico, appartenente questo alla famiglia delle Globigerinidae, che sopravvive dal Maestrichtiano al Daniano è il genere *Globigerina*; anche qui però dobbiamo dire che le specie sono diverse nei due livelli. A differenza delle Gumbeline, assai più diffuse nel Maestrichtiano che nel Daniano, le Globigerine sono invece abbondantissime nel secondo livello dove costituiscono da sole la quasi totalità della fauna <sup>(8)</sup>.

Nel complesso si può dire che non vi è nessuna vera affinità fra le microfaune pelagiche del Daniano e quelle del Maestrichtiano, tanto che l'inclusione del Daniano nella serie sopracretacea appare, dal punto di vista microfaunistico, assai opinabile.

Fra la zona *b*) a Globigerine e la zona *c*) a Globorotalie vi sono variazioni altrettanto rapide quanto fra le due precedenti, se pure forse non altrettanto profonde.

Nel Paleocene assistiamo alla improvvisa comparsa del gen. *Globorotalia* (fam. Globorotaliidae) che acquisterà grande importanza e sviluppo nei livelli seguenti. Scompaiono le ultime Gumbeline sopravvissute dal Cretaceo superiore come pure le ultime Globigerinelle. Le Globigerine sono sempre importantissime e costituiscono la grande maggioranza delle microfaune; accanto alle piccole forme a guscio sottile, cominciano a svilupparsi le grosse forme a guscio spesso e spinoso che saranno tipiche dell'Eocene inferiore e medio.

Pur non essendovi alcuna graduale transizione faunistica fra la zona *b*) e la zona *c*) - la comparsa delle Globorotalie è infatti tanto improvvisa quanto la scomparsa delle Globotruncane al passaggio fra la zona *a*) e la zona *b*) - si nota una certa maggiore somiglianza fra le due faune, per cui, a mio avviso e allo stato attuale delle conoscenze, le microfaune pelagiche del Daniano mostrano, in Italia, caratteri terziari piuttosto che sopracretacei.

La distribuzione geografica del Daniano in Italia, in base ai dati che ho potuto raccogliere direttamente e indirettamente, risulta essere la seguente:

*Italia settentrionale:* è segnalato in Brianza, nella serie dell'Adda (vedi descrizioni di Selli relative agli strati di passaggio dal Cretaceo all'Eocene riportate nel lavoro di Venzo <sup>(9)</sup>, sul lago di Garda, nel Bellunese, per una distanza complessiva, lungo la direttrice est-ovest, di circa 250 chilometri.

Nel sottosuolo della Pianura Padana il Daniano è stato incontrato, nel pozzo di Vincenza Nuova presso Ferrara, alla profondità di 1470 metri.

*Italia Centrale:* si hanno le segnalazioni di Renz <sup>(6)</sup> riguardanti la zona a « facies umbra » (=scaglia) nell'Umbria settentrionale e zone adiacenti.

(8) Ricordo che le mie osservazioni si riferiscono alle forme pelagiche (Globigerinidae, Globorotaliidae) o ritenute tali (Heterohelicidae), essendo queste le più abbondanti nelle associazioni faunistiche considerate, e quindi le uniche osservabili in sezione sottile.

(9) S. VENZO, *Stratigrafia e tettonica del flysch (Cretaceo-Eocene) del Bergamasco e della Brianza Orientale*, «Mem. Descr. Carta Geol. Ital.», vol. XXXI, Roma 1954.

*Sicilia:* oltre ai dintorni di Trapani di cui ho fatto cenno più indietro, devo ricordare anche la località Terrasini a ovest di Palermo, dove recentemente Petrocchi e Bruschi<sup>(10)</sup> hanno descritto una serie continua di passaggio dal Cretaceo all'Eocene, nella quale si trova un livello a Globigerine (livello 6 della serie descritta) che corrisponde perfettamente alla nostra zona *b*).

Lo sviluppo degli affioramenti daniani lungo la direttrice nord-sud si può dire dunque che interessi tutta l'Italia, per una distanza di quasi mille chilometri.

Sulla base degli elementi che ho potuto raccogliere finora, credo che uno studio approfondito dovrebbe portare facilmente all'individuazione del Daniano in tutte le serie di mare profondo, dove la sedimentazione si presenti continua e senza interruzioni in corrispondenza del passaggio Cretaceo-Eocene.

Alla fine di questa breve Nota richiamo l'attenzione su un piano stratigrafico assai discusso nel passato, che è presente in Istria e nel Friuli orientale al passaggio Cretaceo-Eocene: il « Liburnico » dello Stache.

Il Liburnico rappresenta un deposito di acqua dolce, ma talvolta anche un deposito marino di ambiente litorale. Esso occupa una posizione superiore ai più recenti calcari di scogliera a Rudiste, in facies urgoniana, della serie sopracretacea locale. Superiormente è coperto; in trasgressione, da depositi marini riferibili all'Eocene inferiore.

La posizione stratigrafica del Liburnico corrisponde quindi a quella del Daniano descritta più indietro. I due livelli sarebbero correlabili: il primo rappresenta una facies continentale o epicontinentale, il secondo una facies batiale.

Mentre però la diffusione geografica del Daniano risulta estesa all'intera Italia, quella del Liburnico invece sarebbe limitata alle località indicate sopra, nell'estremo nord-est dell'Italia. Non mi risulta infatti che affioramenti riferibili al Liburnico siano stati segnalati in altre parti, benché calcari di scogliera in facies urgoniana corrispondenti a quelli che fanno da base al Liburnico in Istria siano assai diffusi in varie regioni Italiane, come Abruzzo, Campania, Puglie ecc.

Nella figura annessa sono rappresentati alcuni disegni eseguiti alla camera lucida di associazioni faunistiche del Daniano. Il primo campione proviene dalla Brianza, il secondo dal Bellunese, il terzo dal pozzo di Vincenza Nuova in Romagna ed il quarto dalla Sicilia occidentale.

Nella cartina sono indicati gli affioramenti dai quali provengono le sezioni sottili rappresentate nella figura; altri affioramenti attribuibili al Daniano secondo le descrizioni microfaunistiche che ne sono state fatte, ed infine le località di affioramento del Liburnico.

(10) P. PETROCCHI e E. BRUSCHI, *Le formazioni cretaceo-eoceniche in serie continua nella zona di Terrasini (Palermo)*, « Boll. Serv. Geol. Ital. », vol. LXXV, n. 2, Roma 1954.

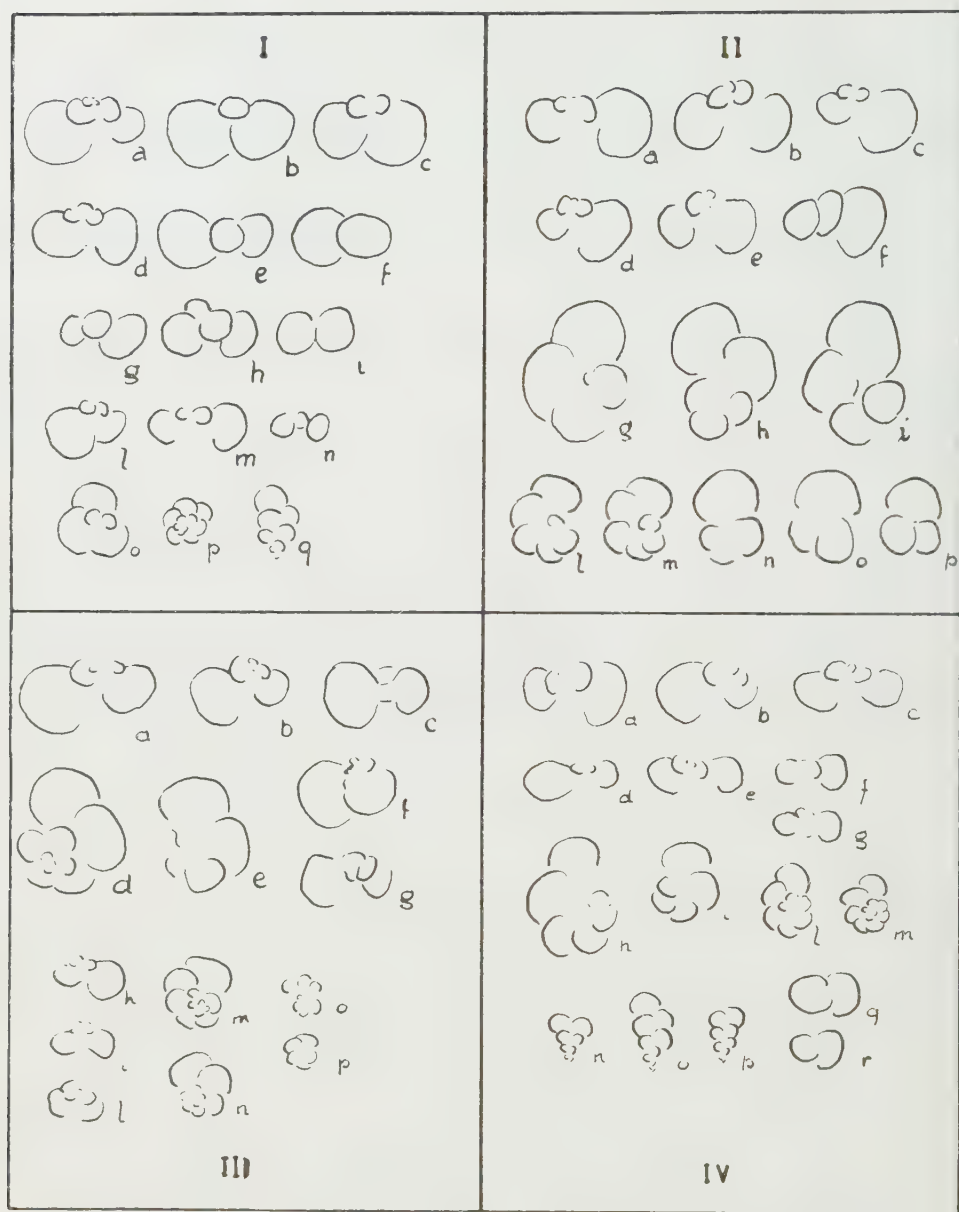


Fig. 1.

- I. Associazione microfaunistica con Globigerine (a-c), Globigerinelle (p), Gumbeline (q) del Daniano di Merone (Como, Lombardia).
- II. Associazione microfaunistica con Globigerine (a-i, n-p) e Globigerinelle (l, m) del Daniano di Sant'Antonio Bellunese (Belluno, Veneto).
- III. Associazione microfaunistica con Globigerine (a-l) e Globigerinelle (m-p) del Daniano del sottosuolo di Vincenza Nuova (Ferrara, Romagna).
- IV. Associazione microfaunistica con Globigerine (a-i), Globigerinelle (f-m), Gumbeline (n-r) del Daniano di Segesta (Trapani, Sicilia).



Fig. 2.

- Affioramenti daniani le cui microfaune sono rappresentate nella fig. 1 (Merone, Sant'Antonio Bellunese, Vincenza Nuova, Segesta).
- ▲ Altre località dove sono state segnalate microfaune riferibili al Daniano: Adda a SE di Lecco, Tignale (Lago di Garda), Fossombrone (Marche), Gubbio e Monte Acuto (Umbria), Terrasini (Sicilia).
- Principali affioramenti del Liburnico (Istria, Cherso, Colle di Medea).

**Geologia.** — *Il Cretaceo nei dintorni di Cimolais (Udine)* (\*).  
Nota di FRANCESCO FERASIN, presentata(\*\*) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

Assai interessanti per la loro complicazione, e perciò molto dibattute e controverse, sono le condizioni tettoniche nei dintorni di Cimolais, all'estremo limite occidentale della provincia di Udine.

Degna di non minore interesse si rivelò pure in questa zona la stratigrafia che, quale indispensabile premessa ad una sicura interpretazione della struttura tettonica, feci oggetto di dettagliate ricerche per incarico del Centro di studio per la petrografia e la geologia del C.N.R. presso l'Università di Padova.

È soprattutto la serie cretacea che offre il maggior interesse, sia per le differenze che essa presenta rispetto a quella delle regioni contigue, sia per la possibilità di valersi di ottimi fossili-guida, quali le globotruncane, non prima utilizzati in questa regione dove i macrofossili, a differenza di quanto si osserva un po' più ad occidente, sono quanto mai rari se non completamente assenti.

Ad illustrare la stratigrafia del Cretaceo in questa zona ho eseguito due accurati profili, valendomi anche dei dati offerti dallo studio delle sezioni sottili, rivelatesi in questo caso veramente indispensabili. Ambedue le località scelte sono esenti da disturbi tettonici che possano aver provocato la scomparsa o la riduzione di qualche termine della serie in esame.

Per una visione d'insieme della regione compresa tra la Valle del Piave e la Valle del Cellina sarà utile consultare i fogli Belluno e Maniago della «Carta geologica delle Tre Venezie» alla scala di 1 : 100.000, mentre, per più ampie notizie sulla geologia di tale regione e sui precedenti Autori che se ne occuparono, rimando ai lavori della Zenari sul bacino del Cellina e del Boyer sui dintorni di Longarone [Bibl. 6 e 1].

Profilo I: La serie giurese superiore - cretaceo si può osservare un po' a SW della cima del Monte Cornetto, seguendo la mulattiera che, passando ad ovest di Cima Gallinut e di Cima di Tola, sbocca sul Piano Grande del Monte Cornetto a quota 1682 (Tav. I NE, Cimolais, del Foglio 23 della Carta d'Italia al 100.000 dell'I.G.M.). Gli strati pendono leggermente verso nord; si distinguono dal basso verso l'alto i termini seguenti:

1. - Calcarei oolitici in grossi banchi, di colore da bianco a grigio. Le ooliti mostrano in sezione la caratteristica struttura concentrico-raggiata, generalmente ben sviluppata. Il nucleo è spesso costituito da gusci di foraminiferi e talvolta anche da piccoli gasteropodi o da granuli di calcare scuro. Non mancano in qualche caso anche delle pseudooliti. La forma

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro di studio per la petrografia e la geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.



è di solito sferica, il diametro variabile e da 0,1 mm può arrivare anche a 1,5 mm. Variabile è pure il rapporto ooliti/cemento. Quest'ultimo è dato da calcite cristallina.

2. - Calcarei nodulosi color rosso cupo a macchie verdastre, con selci prevalentemente rosse; verso l'alto si fanno di un rosso meno intenso e scompaiono i noduli verdi. Potenza 10-12 metri. Caratteri microscopici: la massa di fondo è di color bruno scuro, di aspetto terroso per la presenza di piccole quantità di sostanze argillose, non uniforme specie nei calcari a zone verdi. Abbondantissimi i resti fossili, più o meno diagenetizzati; si riconoscono: articoli di crinoidi, aptici, radiolari, foraminiferi (rotalidi, textularidi) e, nella parte alta, frequentissime *Calpionella alpina* Lomb.

3. - Calcarei verdognoli, compatti, della potenza di 1-2 metri. Si tratta, come si vede bene in sezione, di un vero calcare detritico. La frazione clastica è data da granuli di forma e dimensioni molto varie, generalmente arrotondati e con diametro variante da 0,1 mm. e anche meno, a 2 mm. Si riconoscono frammenti di calcare oolitico e di calcari scuri del giurese inferiore. Il cemento è costituito da calcite cristallina ed è subordinato rispetto alla frazione detritica. Si notano dei foraminiferi (globigerine, anomaline?) sicuramente non rimaneggiati, ma non determinabili, talora con le camere riempite da glauconite. Anche nel residuo insolubile in acido cloridrico diluito e a freddo si rinvenivano granuli di glauconite.

4. - Calcarei bianco giallicci, che verso l'alto diventano più marnosi e più fittamente stratificati così da far passaggio gradatamente ai calcari marnosi del livello 5. Non si può valutarne esattamente la potenza che non supera però i 10-15 metri. Caratteri microscopici: calcare ancora un po' detritico per la presenza di piccoli granuletti di calcare scuro con cemento calcareo leggermente argilloso. Molto abbondanti sono i fossili: globotruncane in prevalenza, poi altri foraminiferi come globigerine, textularie, gumbeline, nodosarie; spicule di spugne. Assai frequenti sono pure altri frammenti (articoli di crinoidi?). Tra le globotruncane ho potuto determinare: *Glt. lapparenti lapparenti* Bolli, *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau).

5. - Calcarei argillosi di color rosso più o meno intenso, fittamente stratificati (scaglia). Anche in questo caso è ben difficile calcolare lo spessore che ad ogni modo non è maggiore di quello dei calcari precedenti. Il limite tra questi due livelli non è ben netto. Caratteri microscopici: la massa di fondo è di color bruno-rossastro e di aspetto terroso per l'argilla e i pigmenti coloranti che contiene, uniforme. Sparsi nella massa si notano minutissimi granuli di quarzo clastici. I fossili sono frequenti, concentrati in piccole fascie irregolari; si riconoscono, oltre alle globotruncane, gumbeline, globigerine, nodosarie. Ho determinato: *Glt. lapparenti lapparenti* Bolli, *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau).

6. - Arenaria compatta di color chiaro affiorante solo in un piccolo lembo in corrispondenza alla sorgente sul Piano Grande. Caratteri microscopici: i granuli sono quarzosi, di dimensioni molto uniformi comprese tra 0,1 e 0,3 mm, ma non uniformemente arrotondati. Si notano con una certa frequenza piccoli granuli di glauconite. Il cemento è calcareo con una certa percentuale di materiale argilloso. Sono presenti rari foraminiferi, forse rotalidi, non ulteriormente determinabili.

Un campione raccolto al passaggio dai calcari argillosi della parte alta del livello 4 a quelli pure argillosi ma rossi del livello 5, lungo il sentiero che dalla malga del Monte Cornetto porta alla sorgente, non presenta differenze, colore a parte, con il calcare marnoso del livello 5, né come aspetto litologico né come microfauna. Altri campioni invece raccolti sulla cima del Cornetto e sul versante NW dello stesso su «la Roppa», mostrano una litobiofacies identica a quella descritta per il livello 4 cui si possono riferire.

I calcari oolitici mancano completamente di fossili e la loro datazione diretta è perciò problematica. Nella vicina zona di Erto essi sottostanno però a dei calcari selciferi riferibili su base paleontologica all'Oxfordiano e Lusitaniano ed hanno alla base degli strati ricchi di fossili toarciani e sono quindi,

sempre nella zona di Erto, corrispondenti al Dogger e alla parte bassa del Malm [1, p. 464]. Nella serie sopra descritta li abbiamo visti sottostare ai calcari a calpionelle del Titoniano. Con una certa sicurezza si può quindi ritenere che rappresentino anche in questa zona il Giurese medio e la parte bassa del superiore. Il calcare rosso noduloso del livello 2, ricco di aptici, articoli di crinoidi e verso l'alto di *Calpionella alpina* Lomb., si può senza alcun dubbio attribuire al Titoniano. Microfacies molto simili se non identiche sono state rinvenute da Selli nell'alto bacino dell'Isonzo e pure riferite al Malm [5, p. 57, tav. 1, fig. 5]. Nessun dato ci è offerto dal calcare detritico del livello 3; come vedremo in seguito parlando della serie di S. Martino esso è per analogia riferibile con buona approssimazione al Turoniano inferiore. Databili con sicurezza sono invece i livelli 4 e 5, molto simili come microfauna, per la presenza di *Globotruncana lapparenti* Bolli e *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau). Queste non appaiono mai in terreni più antichi del Turoniano, mentre si spingono fino al Maestrichtiano. Maggiori precisazioni entro questi limiti non si possono fare; resta assodato comunque che subito sopra i calcari detritici del livello 3 i quali a loro volta giacciono sul Titoniano, si trova un terreno riferibile al Cretaceo superiore. Nulla possiamo dire invece sull'età dell'arenaria del livello 6. Facies simili nella zona di Claut, pochi chilometri più ad est, sono state attribuite all'Eocene [6, p. 40]. In tal caso mancherebbero però sul Monte Cornetto i piani più alti del Cretaceo rappresentati a S. Martino, come si vedrà più avanti, e sul Monte Lodina, da calcari argilloso-arenacei grigiastri dei quali non esiste alcuna traccia sotto le arenarie del Piano Grande del Cornetto.

Profilo II: Il passaggio dai calcari oolitici al Cretaceo superiore si può vedere bene anche in località S. Martino (Erto), circa cento metri oltre l'abitato, poco sopra la strada che porta al passo di S. Osvaldo. Gli strati hanno qui una direzione intorno al NW-SE e pendono verso SW di 45° circa. La successione è la seguente:

1. - Calcari finemente oolitici, di colore biancastro, in grossi banchi. Caratteri microscopici: la tipica struttura oolitica è generalmente ben sviluppata, ma non mancano anche le pseudooliti. I corpuscoli hanno un diametro variabile da 0,1 a 0,65 mm, sono di forma ellittica, più raramente sferica. Il nucleo delle vere ooliti è spesso costituito da gusci di foraminiferi (miliolidi, rotalidi, nodosaridi); in tal caso lo strato concentrico è molto ridotto e la forma più varia. Il cemento è dato da calcite cristallina ed è subordinato rispetto ai corpuscoli che per lo più sono a contatto senza però essere molto costipati e deformati.

2. - Calcari varicolori, da bianchi a rossi, fittamente stratificati, con letti di selce generalmente rossastra; lo spessore è di circa due metri. In sezione sia gli strati rossastri che quelli bianchi rivelano abbondantissimi radiolari; pure abbondanti le spicule di spugna. Gli uni e le altre sono molto spesso intensamente diagenetizzati. I radiolari hanno gusci sferici privi di spine, le spicule di spugna sono di tipo monaxonide. La massa di fondo è calcarea criptocristallina con debolissima frazione argillosa.

3. - I calcari a radiolari ora descritti sono separati da quelli a globotruncane del livello che segue da un letto di un materiale calcareo-terroso, dello spessore medio di circa dieci cm, talvolta un po' di più per le irregolarità della superficie superiore dei calcari su cui giace. Si tratta di un calcare fortemente colorato in rosso-bruno da ossidi di ferro.

a struttura brecciato-concrezionare, a tratti ricco di glauconite. La frazione calcarea non concrezionare contiene abbondanti globigerine e globotruncane, tra le quali si riconoscono *Glt. renzi* Gand., *Glt. (Rotalipora) apenninica* Renz, *Glt. helvetica* Bolli.

4. - Calcare rossastro, compatto, a noduli di calcare concrezionato verdastro specie nella parte inferiore; potenza 50 cm. In sezione si distinguono abbondantissimi gusci di foraminiferi che spiccano sulla massa di fondo scura ed opaca. Si riconoscono textularie, gumbeline, e, soprattutto, globigerine e globotruncane; tra quest'ultime si possono determinare; *Glt. stephani* Gand., *Glt. (Rotalipora) apenninica* Renz, *Glt. renzi* Gand., *Glt. helvetica* Bolli.

5. - Allo strato ora descritto segue immediatamente un banco di calcare bianco della potenza di 40 cm circa. Si tratta di un calcare detritico molto simile a quello del livello 3 della serie del Monte Cornetto, da cui differisce solo per la mancanza dei foraminiferi non rimaneggiati.

6. - Calcarei nodulosi, rossastri, in grossi banchi che si fanno verso l'alto più sottili e di colore più grigio, così da fare passaggio ai calcari arenaceo-argillosi del livello 7. La potenza di questi due ultimi livelli è, per quanto si può valutare, di una cinquantina di metri, forse anche più. In sezione sottile si nota una massa di fondo dal solito aspetto terroso su cui spiccano i fossili; questi consistono essenzialmente in globotruncane e cioè *Glt. lapparenti lapparenti* Bolli, *Glt. lapparenti coronata* Bolli, *Glt. lapparenti tricarinata*. Sono frequenti anche piccole sferette regolari cave, forse lagene. Nella parte basale qualche globotruncana è riempita da materiale rossastro ematitico.

7. - Calcarei argilloso-arenacei, grigiastri, fittamente stratificati. Da questi, come si vede sul fondo della Val Zemola poco prima della confluenza con la Val Vajont, con l'apparire di interstrati argillosi o marnosi via via sempre più potenti si passa al flysch che occupa la conca di Erto. I limiti di questo livello quindi, sia il superiore che l'inferiore, non sono ben netti. In sezione, dispersi nella massa, si notano piccoli granuli clastici di quarzo del diametro fino a 0,05 mm. Dove gli strati cominciano a farsi più arenacei sono presenti: *Globotruncana stuarti* (Lapp.), *Glt. leupoldi* Bolli, *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau). In prossimità della fontana di S. Martino, dove i calcari sono ormai grigi e spiccatamente argilloso-arenacei, ho rinvenuto: *Glt. stuarti* (Lapp.) e *Glt. leupoldi* Bolli. Infine in un campione raccolto sul fondo della Val Zemola, poco prima dell'apparire delle intercalazioni argillose con cui si inizia il flysch, si notano, oltre a *Glt. stuarti* (Lapp.), delle forme dalla spira molto elevata riferibili probabilmente a *Glt. contusa* Cush.

Circa l'età dei calcari oolitici del livello 1 vale quanto detto a proposito della medesima formazione della serie del Monte Cornetto. Non sicuramente determinabile è la posizione stratigrafica dei calcari varicolori con selci del livello 2. Mancano in essi i fossili che ci possano dare sicure indicazioni cronologiche; non corrispondono ai calcari pure selciferi ma di aspetto diverso che si rinvencono in due livelli ad ovest di Erto e riferibili all'Oxfordiano e Lusitaniano quelli del livello inferiore, al Titoniano superiore e Cretaceo inferiore quelli del livello più alto. Vista però la loro posizione, seguono immediatamente i calcari oolitici, penso siano da riferire, sia pure con qualche dubbio, al Giurese superiore, considerato anche che calcari del genere, ricchi di radiolari, sono stati rinvenuti più ad oriente [4, p. 165; 5, p. 57] e riferiti pure al Malm. È da notare però che sul Cornetto sopra i calcari oolitici si trovano, come abbiamo visto, i calcari rossi nodulosi sicuramente titoniani, mentre nella stretta del Vajont tra questi e quelli si rinvencono i calcari grigi a selci nere oxfordiani e lusitaniani [1, p. 466]. Anche più ad est il calcare rosso titoniano è talora separato dall'oolitico da calcari selciferi, tal'altra invece ad esso immediatamente sovrastante [6, p. 23].



In mancanza di fossili credo sia ben difficile stabilire se si tratti di normali eteropie di facies o di lacune stratigrafiche sia pure locali e limitate.

Più facile è l'attribuzione cronologica dei livelli che seguono. Le globotruncane presenti nei livelli 3 e 4 cioè *Glt. stephani* Gand., *Glt. (Rotalipora) apenninica* Renz., *Glt. renzi* Gand., *Glt. helvetica* Bolli, indicano chiaramente un'età compresa tra il Cenomaniano sup. e il Turoniano inferiore. Non privo di significato è il livello 3, particolarmente ricco di ossidi di ferro, glauconite e di concrezioni calcaree dall'aspetto brecciato. Per quanto non si possa dare un preciso significato sedimentologico a tale materiale, cosa che forse si potrà fare in seguito ad accurate ricerche chimico-petrografiche, certo è che esso indica un ambiente di sedimentazione del tutto particolare e senza alcun dubbio in relazione, io credo, con la lacuna stratigrafica di cui ci stiamo occupando. Un materiale simile l'ho rinvenuto nella stessa posizione stratigrafica anche in vicinanza delle Casere Lodina.

Il livello 6, per la presenza di *Glt. lapparenti lapparenti* Bolli, *Glt. lapparenti coronata* Bolli, *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau), è riferibile al Turoniano, non però ulteriormente precisabile. Il calcare detritico del livello 5 quindi, compreso tra Cenomaniano-Turoniano inferiore e Turoniano, andrà riferito con ogni probabilità alla parte bassa di quest'ultimo piano, e allo stesso andrà riferito anche il calcare detritico del Monte Cornetto a questo assai simile. La parte inferiore del livello 7 con *Glt. stuarti* (Lapp.), *Glt. leupoldi* Bolli e *Glt. lapparenti tricarinata* (Quereau) si può attribuire al Santoniano-Campaniano, mentre al Maestrichtiano si potrà ascrivere la parte alta di esso contenente *Glt. stuarti* (Lapp.) *Glt. leupoldi* Bolli e le forme a spira elevata.

Merita infine di essere posto in evidenza il fatto che il livello 6 di questa serie se è molto simile come microfauna ai livelli 4 e 5 della serie del Monte Cornetto, e quindi correlabile con essi, non lo è invece dal punto di vista litologico.

In ambedue le serie descritte, e riassunte nelle colonne stratigrafiche, mancano completamente rocce che possano rappresentare il Cretaceo inferiore. Ciò è tanto più significativo se si tien conto del fatto che nella stretta del Vajont, quindi a ben poca distanza, il Cretaceo inferiore e medio è dato da calcari tipo « biancone » con intercalazioni del cosiddetto « marmo di Castelvazzo » [1, p. 468] per una potenza complessiva di almeno un centinaio di metri. Più ad ovest, nei dintorni di Longarone, il biancone, comprendente forse anche la parte alta del Malm, raggiunge una potenza ancora maggiore. Anche ad est di Cimolais sembra che tale tipica roccia sia presente [6, pp. 26, 27]. A togliere ogni dubbio sulla mancanza del Cretaceo inferiore nella zona considerata, sta poi la diretta sovrapposizione del Cretaceo medio-superiore sul Malm, e ciò per mezzo dei calcari detritici, che ritengo sicuramente turoniani, sul Monte Cornetto, e del livello 3 dalle particolari caratteristiche, a S. Martino. È interessante a questo proposito notare come in quest'ultima località i calcari detritici non giacciono direttamente sui terreni giuresi come avviene sul Cornetto. Ciò è imputabile evidentemente alla instabilità del fondo marino e alla non contemporaneità della

trasgressione nelle due zone; solo col Turoniano infatti si inizia il ciclo marino del Cretaceo superiore, ma a S. Martino sedimenti in trasgressione cominciano a depositarsi già nel Cenomaniano superiore quando ancora le condizioni batimetriche non erano stabili.

Nulla si può dire circa il limite inferiore della lacuna, poiché con ogni probabilità una parte almeno della serie giurese è stata erosa durante il periodo di emersione. Se però consideriamo che nella zona di Longarone il biancone presenta verso la parte alta delle intercalazioni di calcari marnosi e di un banco piritoso a tracce carboniose o addirittura viene sostituito da calcari nodulosi e marnosi e dal cosiddetto marmo di Castellavazzo, questo e quelli riferibili al Cenomaniano [1, p. 468], e testimoni di condizioni perturbate, è probabile che proprio in corrispondenza di questo livello si sia avuto il sollevamento. Nella valle del Vajont inoltre, sopra appunto il marmo di Castellavazzo qui di potenza ridotta, si può notare un bancone conglomeratico a grossi ciottoli di selce, indice se non di una lacuna, certo della instabilità del fondo marino in quest'epoca. Le ricerche in corso in tale zona da parte del prof. P. Leonardi, del dott. B. Accordi e della dott.ssa I. Vedana dell'Università di Ferrara, potranno indicare meglio fin dove tale conglomerato si estenda e quale sia il significato suo e delle particolari facies di Castellavazzo in rapporto con la lacuna che abbiamo individuata.

Il carattere trasgressivo del Cretaceo medio e superiore è stato messo in evidenza ad oriente della zona qui presa in esame, nel bacino del Tagliamento e dell'Isonzo [4 e 5]; nel Veneto centrale invece la sedimentazione fu continua per tutto il periodo [2, p. 46 e sgg.]. La lacuna in corrispondenza al Cretaceo medio e inferiore nei dintorni di Cimolais è quindi nel Veneto il testimonio più occidentale, a quanto sembra, di quella fase orogenica mesocretacea [3, p. 478] di cui evidentemente è conseguenza, e la cui importanza nelle Alpi meridionali orientali è già stata fatta notare da Selli [5, pp. 63 e 71]. Che ad est del Piave fosse avvenuto un sollevamento nel Cretaceo è del resto reso evidente dalla presenza dei « calcari a rudiste », correntemente ritenuti sedimenti di acque poco profonde. Tali calcari, mentre verso oriente iniziano già nel Giurese superiore, nei dintorni del Lago di S. Croce caratterizzano i livelli del Cretaceo medio-superiore [2, p. 51], dimostrando in tal modo che il sollevamento è avvenuto procedendo da est verso ovest.

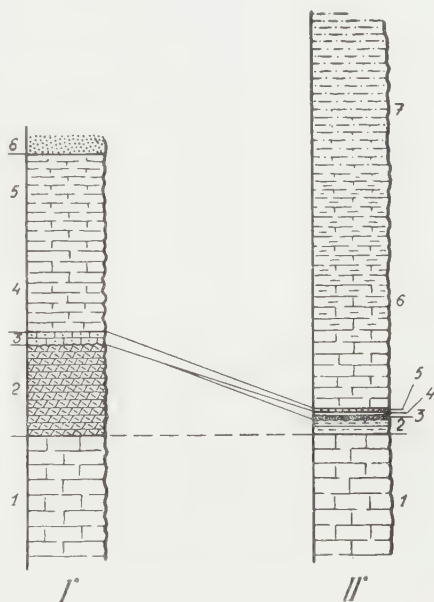


Fig. 1. — Serie stratigrafiche del Monte Cornetto (I) e di S. Martino (II). I numeri si riferiscono ai corrispondenti livelli descritti nel testo. La lacuna stratigrafica è tra i livelli 2 e 3 di ambedue le serie.



## BIBLIOGRAFIA.

- [1] BOYER G. R., *Etude géologique des environs de Longarone (Alpes vénitiennes)*, « Bull. Soc. Géol. de France », 4.me sér., vol. XIII, 1913, pp. 451-485.
- [2] DAL PIAZ G., *Studi geotettonici sulle Alpi orientali*, « Mem. Ist. Geol. Univ. Padova », vol. 1, 1912.
- [3] DAL PIAZ GB., *La genesi delle Alpi*, « Atti R. Ist. Veneto Sc. lett. arti », CIV, Cl. Sc. mat. e nat., pp. 467-498, tt. I-II, Venezia 1945.
- [4] FERUGLIO E., *Le prealpi fra l'Isonzo e l'Arzino*, « Boll. Ass. Agr. Friulana », Udine 1929.
- [5] SELLI R., *La geologia dell'alto bacino dell'Isonzo*, « Giornale di Geologia », 2<sup>a</sup> ser., vol. XIX, Bologna 1947.
- [6] ZENARI S., *Studio geo-idrologico del bacino del Cellina*, « R. Mag. alle Acque, Uff. idrogr. », Padova 1926.

**Fisiologia vegetale.** — *Ulteriore contributo alla fisiologia enzimatica della germinazione. Comportamento differenziale tra Leguminose e Graminacee nei confronti dei coenzimi piridinici* (\*). Nota di LETIZIA RIGGIO BEVILACQUA, presentata (\*\*) dal Corrisp. E. REMOTTI.

In un precedente lavoro<sup>(1)</sup> è stato riportato il contenuto di piridinadenin-nucleotidi (PAN) in semi di avena (*Avena sativa*), grano (*Triticum vulgare*), pisello (*Pisum sativum*), fagiolo (*Phaseolus vulgaris*), sia allo stato quiescente sia dopo 5 giorni di germinazione al buio.

Ne scaturivano, quali dati di particolare interesse:

1° Nei semi quiescenti una concentrazione di PAN assai elevata nelle leguminose e di gran lunga più bassa nelle graminacee.

2° Dopo la germinazione, incrementi dell'ordine del 100% nelle prime, del 1000% nelle seconde.

Per precisare l'origine delle differenze osservate ci è sembrato utile isolare gli embrioni dagli organi di riserva e determinarne separatamente il contenuto di PAN, sia durante la quiescenza, sia durante la germinazione, in modo da poter istituire un confronto tra i due componenti dello stesso seme e, d'altro lato, tra elementi corrispondenti nelle due famiglie.

## MATERIALE E METODO DI DOSAGGIO.

Le determinazioni sono state eseguite: a) durante la quiescenza, b) a vari momenti dall'inizio della germinazione. Per la prima serie abbiamo utilizzato tutte le specie del precedente lavoro (grano, avena, pisello, fagiolo), per la seconda abbiamo concentrato le ricerche sul grano e il pisello.

Nelle graminacee la separazione dell'embrione dal rimanente della cariosside veniva eseguita senza eliminazione dell'involucro, che è difficile

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) L. RIGGIO BEVILACQUA e R. SCOTTI, « Atti Acc. Ligure Sc. e Lettere », X (1953).

allontanare, ove non si voglia pregiudicare la integrità dell'endosperma, soprattutto in relazione allo strato di aleurona immediatamente sottostante. Nelle leguminose, invece, veniva eliminato il tegumento, onde poter agevolmente raggiungere l'embrione e separarlo dai cotiledoni.

I semi erano messi a germinare al buio, su vermiculite bagnata di acqua distillata. La temperatura era mantenuta a 25°C per tutta la durata dell'esperienza.

Il materiale, raccolto in quantità opportuna, veniva preparato per il dosaggio dei PAN mediante il metodo di Robinson e collaboratori<sup>(2)</sup>, con gli adattamenti da noi apportati nei confronti delle particolari difficoltà del materiale vegetale<sup>(1)</sup>.

Il metodo seguito permette di escludere gli altri derivati della nicotinamide eventualmente presenti nei tessuti, dosando unicamente i due coenzimi.

I valori ottenuti, calcolati come  $\gamma$  di DPN, ed espressi sia con riferimento all'unità seme, sia come percentuale del peso (secco o fresco), sono riportati nelle tabelle e nei grafici.

#### RISULTATI E CONSIDERAZIONI.

*Semi quiescenti.* — 1° La differenza, rilevata nel lavoro precedente per i semi in toto, appare localizzata essenzialmente negli organi di riserva, come del resto era prevedibile, data la loro forte prevalenza ponderale. I cotiledoni delle leguminose contengono infatti concentrazioni di PAN 20-25 volte superiori a quelle degli endospermi delle graminacee. La differenza si presenta ugualmente comunque i valori vengano calcolati, con riferimento cioè al peso fresco, come al secco. Questo fatto è di particolare interesse, perché, nonostante la diversità della loro configurazione genomica e del loro valore morfologico, i due tessuti presentano una percentuale di acqua pressoché uguale, il che è tanto più significativo in quanto — come vedremo — gli embrioni sono notevolmente diversi sotto questo aspetto: si direbbe che si faccia in questi ultimi risentire una differenza sistematica, che nei primi è per così dire — soverchiata dalla convergenza fisiologica.

2° Sensibilmente dello stesso ordine di grandezza sono invece i valori percentuali negli embrioni delle due famiglie: con una relativamente lieve prevalenza in quelli delle graminacee, ove il riferimento venga fatto al peso secco. Una tale differenza è da porsi in rapporto col più elevato tenore idrico degli embrioni di queste ultime. È difficile valutare il significato di questa diversità in quanto né sappiamo in che misura i pesi secchi siano comparabili — date probabili diversità di carica di riserve nei tessuti embrionali — né possiamo definire il significato funzionale di questa diversa quantità di acqua. Peraltro queste oscillazioni dei valori embrionali rientrano nei limiti

(2) J. ROBINSON, N. LEVITAS, F. ROSEN e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », 170, 653 (1947).

di quelle che possono essere le ordinarie differenze metaboliche dovute alle caratteristiche di specie; mentre il grande scarto riscontrabile tra le riserve suggerisce una diversità di più ampia portata, che ci fa risalire al problema stesso dell'accumulo o meno di tali coenzimi nelle riserve. Il che risulta anche da un altro ordine di dati.

TABELLA I.

*Distribuzione dei PAN in semi quiescenti (valori in  $\gamma$  di DPN).*

	Embrione $\gamma$ per grammo di		Endosperma o cotiledoni $\gamma$ per grammo di		Seme <i>in toto</i> $\gamma$ per grammo di p. s.
	p. f.	p. s.	p. f.	p. s.	
<i>Avena sativa</i> . . . . .	93	143	2,5	2,8	5,7
<i>Triticum vulgare</i> . . .	120	200	4	4,5	6,8
<i>Pisum sativum</i> . . . .	113	124	93	104	108
<i>Phaseolus vulgaris</i> . .	100	111	52	59	61

Di fatto, il confronto embrione/riserve darebbe una costante eccedenza del tenore percentuale di PAN nel primo rispetto alle seconde, ove ci si riferisca al peso sia fresco, sia secco.

Ma la situazione si modifica profondamente quando per i cotiledoni e per l'endosperma si calcoli il peso effettivo del protoplasma, libero dall'inerte massa paraplasmatica. L'entità di quest'ultima può, con una discreta approssimazione, essere ottenuta sottraendo dal peso del cotiledone o dell'endosperma nel seme quiescente il peso dei medesimi al loro esaurimento. La differenza corrisponde all'incirca all'80% del peso iniziale: il 20% corrisponde quindi al complesso tissulare (massa protoplasmatica attiva e relative membrane), alla base di riferimento, cioè, sulla quale possiamo impostare un confronto attendibile tra embrione e riserve.

Avremo allora cifre di 15-23  $\gamma$  di PAN per grammo di tessuto nelle graminacee e di 300-500  $\gamma$  per le leguminose.

Il primo valore, molto basso nei confronti di quello embrionale e anche come valore assoluto, suggerisce già di per sè l'ipotesi che nell'endosperma questi coenzimi non siano altro che i normali componenti del patrimonio respiratorio delle cellule <sup>(3)</sup>.

(3) Entro i limiti in cui possono valere dati relativi a specie diverse, è interessante ricordare come il rapporto embrione/endosperma nell'orzo quanto a intensità respiratoria si aggiri intorno a un valore di 17 [S. STOWARD, « Ann. Bot. », 22, 415 (1908)], rispetto al quale la concentrazione dei PAN da noi valutata per l'endosperma di grano sarebbe anche inferiore.

Nelle leguminose, invece, di fronte alla nuova base di riferimento, vediamo addirittura invertirsi il rapporto embrione/cotiledoni, la concentrazione nei secondi raggiungendo valori 3-4 volte superiori a quelli dei primi.

Questo fatto - a parer nostro - può giustificarsi ammettendo un accumulo di coenzimi nel quadro delle riserve.

Dovremmo quindi desumerne che l'endosperma contiene i PAN soltanto nella misura richiesta dalla sua attività respiratoria, mentre i cotiledoni fungono da riserve anche per questi peculiarissimi alimenti funzionali.

D'altra parte il confronto tra i nostri dati e il contenuto di nicotinamide nei semi di graminacee <sup>(4)</sup> e di leguminose <sup>(5)</sup> ci aveva già condotto a concludere per la presenza di tenori relativamente alti di nicotinamide, libera o comunque non combinata in coenzimi, nel primo caso, e per valori pressoché nulli nel secondo.

Da tutto questo complesso di considerazioni scaturirebbe una notevole differenza nel metabolismo dei PAN tra gli embrioni delle leguminose e quelli delle graminacee, in quanto i primi attingerebbero in larga parte a riserve già formate, mentre i secondi li sintetizzerebbero pressoché in totalità dai loro componenti.

L'attività degli embrioni delle leguminose in questo particolare capitolo del loro metabolismo dovrà poi anche esplicarsi nella trasformazione del DPN, che ricerche qualitative indirette indicano come prevalente nei cotiledoni <sup>(6)</sup>, in TPN, che risulterebbe il coenzima deidrogenasico caratteristico dei tessuti della plantula.

È possibile allora pensare che sia proprio una tale diversità nelle capacità metaboliche dell'organismo embrionale nei confronti dei PAN a condizionare le differenze della forma di accumulo negli organi di riserva e a

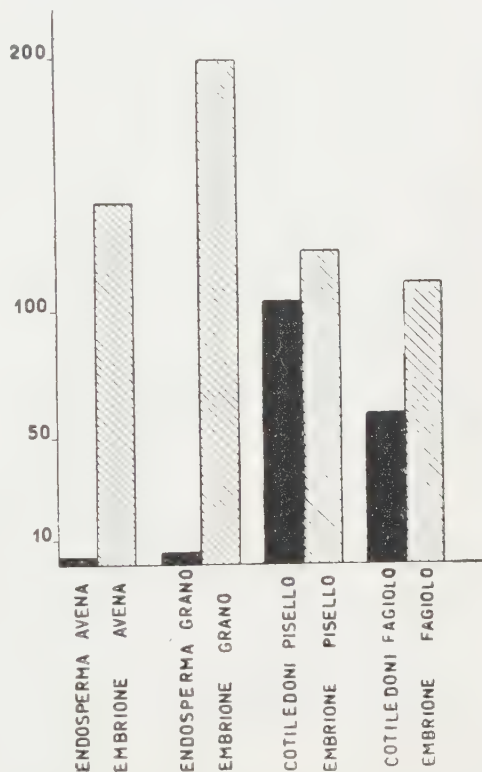


Fig. 1. - Distribuzione dei PAN in semi quiescenti (γ per g. di peso secco).

(4) C. KLATZKIN, F. W. NORRIS e F. WOKES, « Biochem. J. », 42, 414 (1948).

(5) C. ANTONIANI, L. FEDERICO e T. VALLE, « Ann. Sperim. Agraria », 8, 3, (1954).

(6) Y. OOTA, Y. YAMAMOTO, R. FUJII, « Bull. An. du C.N.R.S. », XV, 118, 748 (1954).

giustificare quindi il singolare contrasto tra le riserve delle leguminose e quelle delle graminacee. Naturalmente però il ragionamento può anche invertirsi, nel senso già prospettato nella precedente nota (1). È di fatto possibile che sia piuttosto la diversa natura dei due tessuti la causa primitiva. Forse il cotiledone, in quanto foglia e in quanto partecipe della fisionomia embrionale, elabora esso stesso quei nucleotidi che da esso diffonderanno all'embrione, mentre la peculiare situazione dell'endosperma potrebbe dare ragione di una sua diversa attività in questo campo.

Ulteriori ricerche comparative, che ci ripromettiamo di svolgere quanto prima, tra semi a cotiledoni e semi a endosperma appartenenti a famiglie diverse, potranno forse fornirci indicazioni atte a meglio precisare questo aspetto differenziale tra i due tipi di semi.

*Semi germinanti.* - I risultati relativi alla germinazione scaturiscono in parte come conseguenza di quelli riferiti per i semi quiescenti.

Nel caso delle Leguminose, infatti, il ricco corredo di PAN esistente nelle riserve potrà in larga misura coprire le esigenze sia dei cotiledoni, sia dell'embrione, di fronte all'esaltazione respiratoria della germinazione, mentre nelle graminacee occorrerà fabbricarli *ex novo*.

Ma l'analisi delle curve che esprimono, separatamente per embrione e riserve, l'andamento dei PAN nei giorni successivi della germinazione ci rivela altri fatti degni di nota.

TABELLA II.

*Distribuzione dei PAN in «Triticum vulgare» durante la germinazione al buio (a 25°C. Valori espressi come  $\gamma$  di DPN).*

Giorni di germinazione	Embrioni		Endosperma		Seme in toto	
	per unità	per g. p. s.	per unità	per g. p. s.	per unità	per g. p. s.
0	0,06	200	0,18	4,5	0,24	6,8
1	0,21	388	0,20	5,1	0,41	10
2	0,83	396	0,24	7	1,07	30
3	1,36	237	0,32	11	1,68	50
4	1,82	212	0,60	28	2,42	83
5	2,02	202	0,70	38	2,72	100
6	2,30	182	0,70	43	3,00	118
7	1,90	120	0,70	54	2,62	100
8	1,12	70	0,70	70	1,82	70



TABELLA III.

*Distribuzione dei PAN in semi di « Pisum sativum » durante la germinazione al buio (Valori espressi come  $\gamma$  di DPN. Temperatura 25° C).*

Giorni di germinazione	Embrione		Cotiledoni		Seme in toto	
	per unità	per g. p. s.	per 2 unità	per g. p. s.	per unità	per g. p. s.
0	0,34	124	14	107	14,34	108
8	3,4	453	20	200	23,4	217
5	7,5	441	18	219	25,5	257
7	8	296	10,4	154	18,4	197
10	7,4	151	5,6	140	13	146
12	5	90	3	100	8	93

*Embrioni.* — Il contenuto in coenzimi presenta nel periodo delle nostre osservazioni un primo incremento iniziale, cui segue un decremento.

Peraltro i momenti caratteristici e la fisionomia della curva sono notevolmente diversi a seconda si consideri il tenore totale per embrione o il contenuto percentuale.

La concentrazione percentuale ha il suo massimo entro breve tempo dalla ripresa germinativa (al 2° giorno per il grano, al 3° per il pisello,) precipita poi rapidamente. Le curve per i due semi sono notevolmente simili di forma e ci fanno pensare a una sostanziale analogia nei fattori determinanti. Tenuto conto che negli stessi momenti la carica totale di coenzimi nell'embrione è in pieno aumento ed in aumento è anche la carica nei cotiledoni e nell'endosperma, tale declino percentuale non può essere attribuito a fenomeni di esaurimento e deve piuttosto rispecchiare modificati equilibri interni dei tessuti. In particolare, esso sembra doversi porre in relazione con il declino respiratorio dovuto all'età, quando si pensi che col procedere dello sviluppo si sposta spiccatamente il rapporto di massa tra tessuti meristemati ad elevata intensità respiratoria e tessuti adulti a respirazione più tenue. Per tal modo la curva della percentuale dei PAN diviene rivelatrice del progressivo mutare della configurazione tissulare della piantina.

Anche le curve del contenuto globale, dopo un periodo di ascesa, declinano: ma ciò avviene assai più tardi (al 6° giorno per il grano, al 7° per il pisello) e con andamento diverso tra le due specie, ché al ripido decremento del grano si contrappone una lenta graduale discesa nel pisello. Una tale diminuzione del contenuto totale, in piantine in persistente allungamento, non può essere considerata se non come un fenomeno abnorme, che ci sembra

debba essere in qualche modo posto in relazione con le condizioni egualmente abnormi di queste plantule, mantenute al buio e senz'altra disponibilità nutritizia che le riserve.

Peraltro è difficile pensare ad un fenomeno di esaurimento o di ina-

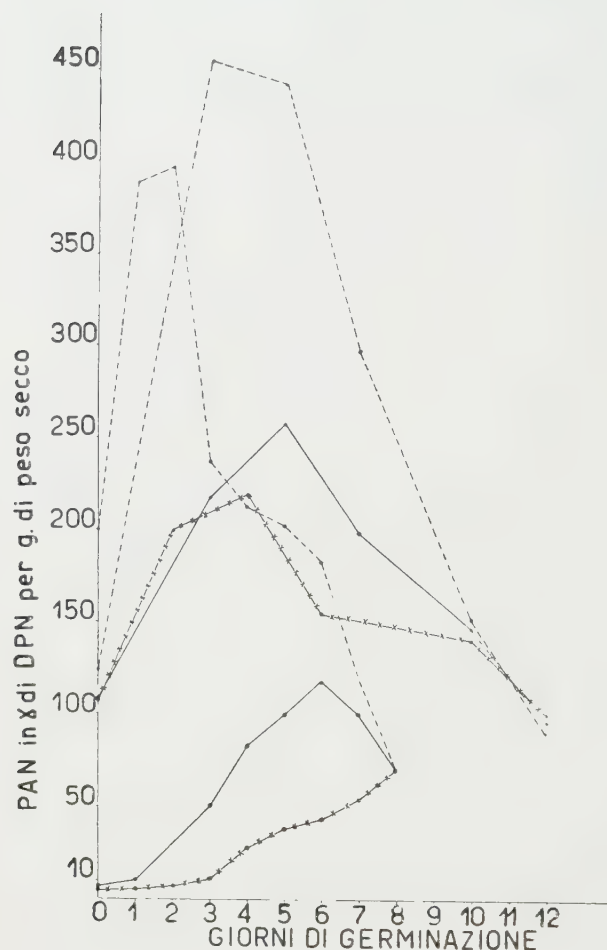


Fig. 2. - Sintesi di PAN in semi germinanti al buio e a 25°C. (valori percentuali).

linea intera: semi *in toto*, superiormente pisello, inferiormente grano;  
linea tratteggiata: embrioni, a sinistra grano, a destra pisello;  
linea con crocette: riserve, superiormente cotiledoni di pisello, inferiormente endosperma del grano.

nizzazione, soprattutto nel caso del pisello, nel quale, al momento di inversione della curva, i cotiledoni contengono ancora tenori elevati di PAN. Né un semplice fatto di inanimazione potrebbe - a nostro avviso - essere sufficiente a giustificare addirittura il decremento, che implica una distruzione di coenzimi preesistenti. Si potrebbe pensare che anche per i PAN sussista quell'ininterrotto movimento di degradazione e di resintesi che oggi dobbiamo ammettere per altri componenti protoplasmatici, e che le condizioni di relativa inanimazione delle piantine riducano l'apporto energetico necessario per la ricostruzione. Ma una tale spiegazione è limitata dal fatto che l'accrescimento ancora sussiste in queste condizioni, con tutte le sue ben più grandi esigenze di energia.

*Riserve.* - Nella curva relativa agli organi di riserva, singolare e inte-

ressante - in certo qual modo inaspettato - è anzitutto l'aumento che il contenuto globale dei PAN subisce, tanto nei cotiledoni quanto nell'endosperma, nonostante la loro profonda diversità. Un tale aumento ci dimostra che il risveglio germinativo deve essere considerato un risveglio funzionale notevolmente attivo anche per questi tessuti, che pur sono destinati a un rapido esaurimento, e che la neoformazione dei PAN interviene anche in questo

caso a sostenerne l'incremento respiratorio (cfr. Zanoni <sup>(7)</sup>). Di particolare interesse è ancora il pisello in cui tale neoformazione si verifica nonostante l'elevato tenore preesistente di PAN; il che ci induce a supporre che questi - accumulati in riserva - si trovino nel tessuto in una condizione di inattività che li rende praticamente inutilizzabili ai fini immediati delle cellule stesse che li contengono. E che i PAN del seme di pisello siano essenzialmente di riserva ci pare confermato studiando le curve dei valori unitari negli organi di riserva delle due famiglie. Nel pisello, infatti, a partire da un

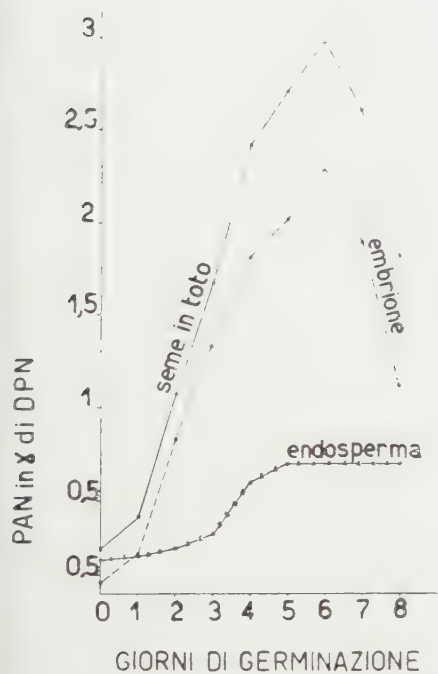


Fig. 3. - Contenuto di PAN per seme, in grano germinante (al buio e a 25°C).

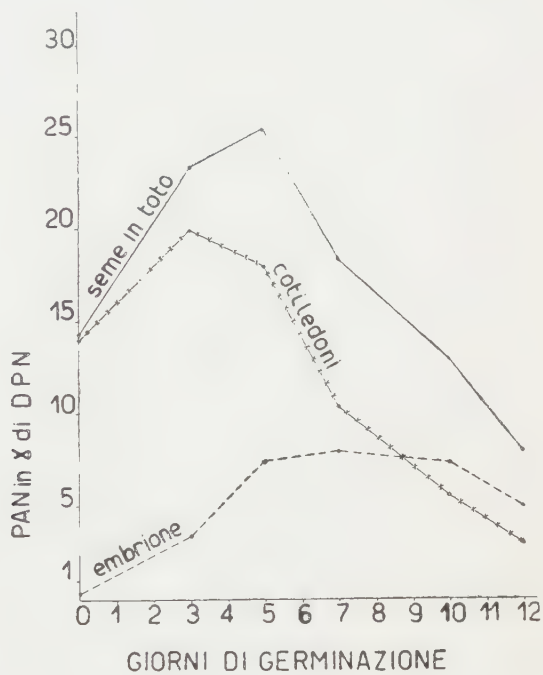


Fig. 4. - Contenuto di PAN per seme, in piselli germinanti (al buio e a 25°C).

momento molto precoce della germinazione (3° giorno), i coenzimi rapidamente decrescono, a rifornire evidentemente l'embrione; nell'endosperma, invece, dove i PAN presenti sono unicamente quelli necessari al tessuto e l'incremento è strettamente collegato con le sue immediate esigenze respiratorie, il tenore unitario, a partire dal 5° giorno, si mantiene costante sino alla fine dell'esperienza.

#### CONCLUSIONI.

La determinazione del tenore dei PAN negli embrioni e nelle riserve di semi - quiescenti e germinanti - ci permette di stabilire una netta differenza nella fisiologia di questi composti tra semi di graminacee e di leguminose.

(7) G. ZANONI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 2, 8 (1950).

Innanzitutto, la grande diversità di contenuto di PAN nei semi quiescenti delle due famiglie è attribuibile alla diversa fisionomia delle riserve, che ne sono ricche nelle leguminose, *pressoché prive, invece*, nelle graminacee.

In relazione, appunto, con la situazione della quiescenza, si ha, al momento delle germinazione, una sintesi proporzionalmente elevatissima di PAN negli embrioni delle graminacee, che debbono sintetizzarli in grande copia per far fronte alle necessità del metabolismo particolarmente attivo del risveglio germinativo, mentre gli embrioni delle leguminose si trovano a poter attingere alle ricche riserve dei cotiledoni e quindi possono sopperire alle nuove esigenze con una sintesi relativamente limitata.

Queste differenze indicano, nei confronti dei PAN, metabolismi almeno quantitativamente diversi negli embrioni delle due famiglie all'atto della germinazione, nonché una profonda differenza del loro modo di accumulo; il che assume un particolare rilievo quando si consideri la diversità di ordine genomico e morfologico, che - pur nella comunanza della funzione - separa i rispettivi organi di riserva.

**Fisiologia vegetale.** — *Azione protettiva della cisteina contro l'inibizione della germinazione e della crescita prodotte dalla trietilen-melamina (TEM) nel Grano* (\*). Nota di FRANCESCO D'AMATO, presentata (\*\*) dal Socio A. CHIARUGI.

INTRODUZIONE. — Com'è noto, la teoria del «cross-linkage» emessa nel 1949 da Goldacre, Loveless e Ross<sup>(1)</sup>, per spiegare l'attività radiomimetica delle ipriti, anche se contraddetta da più recenti osservazioni, ha avuto il merito di portare al ritrovamento di derivati ad alto potere antimitotico, quali la trietilenmelamina (TEM) e la trietilenfosforamide (TEPA), intensamente sperimentati in questi ultimi anni nella terapia dei tumori. Per quanto riguarda la TEM, è oggi noto che essa mostra fortissimo effetto antimitotico tanto nella cellula animale che in quella vegetale, apparendo altresì dotata di elevata capacità mutagena, come dimostrato in *Drosophila*<sup>(2)</sup> e nei testi vegetali *Allium Cepa*<sup>(3)</sup> e *Vicia Faba*<sup>(4)</sup>.

(\*) Dall'Istituto di Botanica dell'Università di Pisa.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

(1) R. J. GOLDACRE, A. LOVELESS e W. C. J. ROSS, *Mode of production of chromosome abnormalities by the nitrogen mustards*, «Nature», 163, 667-669 (1949).

(2) O. G. FAHMY e M. J. FAHMY, *Cytogenetic analysis of the action of carcinogens and tumor-inhibitors in Drosophila melanogaster*. - II. *The mechanism of induction of dominant lethals by 2 : 4 : 6-tri(ethyleneimino)-1 : 3 : 5-triazine*, «Journ. Genetics», 52, 603-619 (1954).

(3) J. J. BIESELE, R. E. BERGER, M. CLARKE e L. WEISS, *Effects of purines and other chemotherapeutic agents on nuclear structure and function*, «Exp. Cell. Res.», Suppl. 2, 279-303 (1952).

(4) A. LOVELESS, *Chemical and biochemical problems arising from the study of chromosome breakage by alkylating agents and heterocyclic compounds*, «Suppl. to Heredity», 6, 293-298 (1953).

A parte la possibilità di una azione per « cross-linkage », non è da escludere che la TEM svolga il suo effetto antimitotico per bloccaggio di gruppi SH, come ammesso già dal Dustin per la azoiprite <sup>(5)</sup>; ma mancano prove sperimentali al riguardo. Recentemente Schachter, Supplee e Hentenman <sup>(6)</sup> hanno dimostrato che la irradiazione totale di ratti o la somministrazione in essi di TEM porta, alcuni giorni dopo, ad una notevole riduzione del contenuto in SH del sangue. Gli Autori ritengono che questa riduzione sia dovuta ad una aumentata utilizzazione di gruppi SH da parte dei tessuti rigeneranti successivamente al danneggiamento subito con l'irradiazione o la somministrazione di TEM. Non è, però, improbabile che questa situazione rifletta un fenomeno di interferenza della TEM con la funzionalità di gruppi enzimatici SH; fenomeno, del resto, ben noto per le radiazioni ionizzanti. La presente Nota vuole essere un primo contributo al problema del meccanismo d'azione della TEM nella realizzazione di fenomeni d'inibizione funzionale nei vegetali.

MATERIALE E METODI. — Essendo il grano il materiale generalmente impiegato in esperimenti sulla germinazione <sup>(7)</sup>, si è pensato di utilizzare cariossidi di grano della razza « Brescia » (Costitutore: E. Avanzi), gentilmente fornite dalla Direzione dell'Istituto di Agronomia dell'Università di Pisa e provenienti da piante allevate in purezza nei poderi sperimentali dello stesso Istituto. Gli esperimenti di germinazione sono stati condotti con lotti di 100 semi in termostato all'oscuro e alla temperatura di  $22^{\circ} \pm 0,5^{\circ} \text{C}$  in cassule Petri di 9 cm di diametro e su doppio strato di carta da filtro, usando identico volume (10 cc) di acqua distillata (controlli) o di soluzioni in acqua distillata di TEM, di cisteina, o di cisteina + TEM. Della TEM fu usato un campione gentilmente fornito dalla Direzione Tecnica Centrale della Lepetit S. A., mentre per la cisteina si dette la preferenza alla « cisteina cloridrato » pura della Merck, Darmstadt. Dopo 48 ore dall'inizio della prova veniva stabilito l'andamento della germinazione [tenendosi conto delle tre categorie di: 1° semi germinati, 2° semi all'inizio della germinazione (rigonfiamento della cariosside e rottura del pericarpo) e 3° non germinati] e si misurava la lunghezza del coleoptile e della radichetta mediana nei semi germinati, riportandosi in Tabella la media delle misure. Alla 96ª ora si stabiliva il numero delle plantule in sviluppo e si calcolava un « indice di accrescimento » sotto forma di rapporto fra peso fresco medio delle plantule ottenute nelle prove sperimentali e peso fresco medio delle plantule nella prova di controllo (indice di accrescimento dei controlli = 1,00). Il metodo del peso fresco per la determinazione dell'effetto inibitore sull'accrescimento introdotto dal Konis (cfr. 7) è stato ritenuto come il più appropriato.

(5) P. DUSTIN Jr., *Some new aspects of mitotic poisoning*, « Nature », 159, 794-797 (1947).

(6) B. SCHACHTER, H. SUPPLEE e C. HENTENMAN, *Effect of X-irradiation, radio-mimetic substances and surgical trauma on sulphydril content of plasma*, « Amer. Journ. Physiol. », 169, 499-507 (1952).

(7) M. EVENARI, *Germination inhibitors*, « Bot. Rev. », 15, 153-194 (1949).



TABELLA I

*Azione della cisteina e della trietilenmelamina (TEM), da sole e in combinazione, sulla germinazione delle cariossidi e sulla crescita delle plantule di grano razza «Brescia» (100 cariossidi per ogni prova).*

N.	Cisteina Mol/l	TEM Mol/l	GERMINAZIONE (dopo 48 h)			Lunghezza radici mm	Lunghezza coleptili mm	N. Plantule dopo 96 h	Indice di accrescimento	Note
			Germi- nati	Germi- razione iniziale	Non ger- minati					
1	0,0	0,0	91	9	0	10,45	4,3	100	1,0	+ Plantule con so- lo coleptile e pr- mordi radicella- totalmente inibit
2	0,05712	0,0	0	56	44	—	—	0	—	
3	0,02856	0,0	59	35	6	4,3	1,2	80	0,31	
4	0,01428	0,0	96	4	0	6,9	3,2	100	0,75	
5	0,0	0,05	0	79	21	—	—	29 <sup>+</sup>	0,06	
6	0,0	0,02	57	31	12	—	—	76 (47 <sup>+</sup> )	0,11	
7	0,0	0,0	97	3	0	9,2	3,7	100	1,0	
8	0,0	0,05	0	73	27	—	—	27 <sup>+</sup>	0,08	
9	0,0714	0,05	53	43	4	4,8	2,6	92	0,35	
10	0,05712	0,05	76	24	0	6,8	3,0	100	0,70	
11	0,0428	0,05	82	15	3	4,7	2,6	97	0,33	
12	0,02856	0,05	72	18	10	4,7	2,4	90	0,30	
13	0,0	0,0	97	2	1	13,8	4,2	99	1,0	
14	0,0	0,02	69	25	6	4,6	2,7	81 (35 <sup>+</sup> )	0,14	
15	0,05712	0,02	26	72	2	5,1	3,1	26	0,18	
16	0,0428	0,02	52	58	0	5,2	3,1	57	0,22	
17	0,02856	0,02	94	4	2	9,0	3,7	98	0,51	
18	0,0	0,0	95	3	2	10,2	3,4	98	1,0	
19	0,0	0,05	0	76	24	—	—	25 <sup>+</sup>	0,07	
20	0,05712	0,05	81	17	2	5,4	3,1	98	0,57	
21	0,0	0,02	64	27	9	3,4	2,3	78 (40 <sup>+</sup> )	0,13	
22	0,02856	0,02	93	7	0	5,5	3,2	100	0,62	

**RISULTATI.** — Nella Tabella I sono riportati i risultati di alcune serie sperimentali istituite dopo che esperienze preliminari avevano messo in evidenza la possibilità di antagonizzare con la cisteina l'effetto inibitore della TEM sulla germinazione e sullo sviluppo delle plantule di grano, indicando le concentrazioni più meritevoli di studio. Come risulta dalla Tabella, tanto la cisteina quanto la TEM agiscono da inibitori della germinazione e della crescita delle plantule. Così la cisteina 0,05712 M (10 g/l) inibisce totalmente la germinazione, mentre la sua concentrazione 0,01428 M, determinante solo un leggero ritardo di germinazione, ha ancora un effetto negativo sulla crescita delle plantule. La TEM 0,05 M, pur permettendo il rigonfiamento delle cariossidi con una apparente iniziale « germinazione », rende possibile la produzione di sole poche plantule con primordi radicellari completamente inibiti, coleptili molto brevi e minimo « indice di accrescimento ». (È già noto, per altri inibitori, che le radici sono più sensibili dei coleptili all'effetto inibitore). Un effetto negativo sulla germinazione e sulla crescita svolge anche la concentrazione 0,02 M di TEM. Negli esperimenti di azione combinata cisteina-TEM di cui si riportano i risultati in Tabella, l'azione protettrice esplicita dalla cisteina è evidente in tutti i casi, pur raggiungendo il suo valore ottimale in una sola concentrazione di cisteina per ognuna delle due concentrazioni inibitrici di TEM impiegate (0,05 e 0,02 M). Così la cisteina 0,05712 M, che da sola inibisce completamente la germinazione, riesce ad antagonizzare l'azione antigerminativa della TEM 0,05 M, svolgendo anche un'ottima protezione contro l'effetto inibitore della crescita svolto dalla stessa dose di TEM (prove n. 10, 20). Risultati anch'essi altamente probanti sono quelli ottenuti nelle prove di azione combinata TEM 0,02 M + Cisteina 0,02856 M (prove n. 17, 22).

**DISCUSSIONE.** — La presente ricerca mostra che la cisteina è capace di antagonizzare totalmente l'azione antigerminativa della TEM e di svolgere un buon effetto protettore contro l'inibizione della crescita delle plantule operata dalla stessa sostanza. Questa diversa intensità di azione protettrice esplicita dalla cisteina nei confronti dei due effetti inibitori svolti dalla TEM è più che comprensibile, se si considera che le due inibizioni considerate, pur se generalmente manifestantisi come fenomeni paralleli, sono in alcuni casi legati a due ben distinti meccanismi <sup>(7)</sup>. Così la cumarina, capace di inibire la crescita attraverso una inibizione di complessi enzimatici SH <sup>(8)</sup>, determina l'inibizione della germinazione con un meccanismo sicuramente ben diverso, anche se per il momento non del tutto chiarito. Difatti la cisteina è incapace di antagonizzare l'azione antigerminativa della cumarina nel grano, mentre risulta addirittura capace di svolgere un'azione sinergica con la cumarina nella inibizione della germinazione del seme di lattuga <sup>(9)</sup>. Un incremento

(8) K. V. THIMANN e W. D. BONNER, *Inhibition of plant growth by protoanemonin and coumarin and its prevention by BAL*, « Proc. Nation. Acad. Sci. », 35, 272-276 (1949).

(9) A. M. MAYER e M. EVENARI, *The influence of two germination inhibitors (coumarin and 2,4-D) on germination in conjunction with thiourea and cysteine*, « Bull. Res. Council Israel », 1, 125-129 (1951).

di inibizione della germinazione si ha anche, sempre nel grano, per azione combinata della cumarina con la tiourea, sostanza ben nota per la sua azione stimolante del processo germinativo <sup>(7,10)</sup>. Nell'Orzo, al contrario, la stessa tiourea è capace di antagonizzare l'azione antigerminativa della cumarina <sup>(10)</sup>.

Nel caso dei nostri esperimenti l'azione protettrice della cisteina è stata stabilita con l'impiego di soluzioni contemporaneamente contenenti l'agente inibitore e quello protettore, come viene generalmente fatto per ricerche sui meccanismi di protezione. Recentemente Netien e Lacharme <sup>(11)</sup>, in uno studio dell'azione protettrice della cisteinamina contro l'inibizione della crescita di plantule di grano da parte della di-idrostreptomicina, hanno anche eseguito esperimenti di pre- e di post-trattamento con l'agente protettore. Essi hanno dimostrato che la cisteinamina è capace di antagonizzare l'effetto inibitore della di-idrostreptomicina solo se usata contemporaneamente o prima di questa, con migliori risultati nel caso di azione contemporanea. In ogni caso, l'azione protettrice viene a riguardare solo la crescita del fusto, la cisteinamina non apparendo capace di antagonizzare l'inibizione della crescita radicale operata dalla di-idrostreptomicina.

Quanto all'intensità dell'effetto protettore, dal complesso delle poche ricerche effettuate finora col testo germinazione, risulta chiaro che il caso di più elevata protezione finora ottenuto è rappresentato proprio dagli esperimenti riportati nella presente Nota.

**Istofisiologia.** — *Caratteri citologici e numero dei neuroni esterocettivi nei gangli spinali destinati all'innervazione dell'arto anteriore, nel cane* <sup>(\*)</sup>. Nota di GUIDO FILOGAMO e FELICE VIGLIONE, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

Ricerche antecedenti ci hanno permesso di dimostrare che i neuroni sensitivi spinali destinati all'innervazione viscerale appartengono a quelli di media grandezza; pochi sono i piccoli neuroni; essi inoltre non hanno localizzazione caratteristica. Il loro numero va da 3 a 7 %.

Con lo stesso metodo della reazione cromatolitica, secondo Nissl, ci siamo proposti di rintracciare la sede, il numero ed i caratteri dei neuroni destinati all'innervazione esterocettiva dell'arto anteriore.

**MATERIALE E TECNICA.** — In tre cani adulti di piccola e media grandezza fu dissecato tutto il tegumento dell'arto anteriore di destra, il quale fu riposto

(10) I. LAVOLLAY e F. LABOREY, *Antagonisme des effets de la thio-urée et de la coumarine sur la germination de l'Orge*, « C. R. Soc. Biol. », 142, 825-826 (1948). \*

(11) G. NETIEN e J. LACHARME, *Effet protecteur de la  $\beta$ -mercaptoéthylamine vis-à-vis de l'action provoquée par la dihydrostreptomycine sur la croissance de plantules de blé*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, 239, 445-446 (1954).

(\*) Ricerche compiute nell'Istituto Anatomico, nell'Istituto di Patologia Chirurgica dell'Università di Torino e nel Centro di Studi sull'accrescimento alle dipendenze del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.

in una tasca muscolo-cutanea appositamente preparata lungo la parete laterale del tronco. Con questa operazione riteniamo di aver reciso tutti i rami cutanei dell'arto anteriore, per lo meno nel loro tratto distale, mentre i rami muscolari, contenenti fibre motrici e sensitive, rimasero integri. Si ebbe guarigione per prima della ferita: gli animali furono sacrificati da 15 a 21 giorni dopo l'intervento.

In tutti e tre gli animali furono prelevati i gangli spinali corrispondenti alle radici connesse con il territorio cutaneo asportato (da C<sub>0</sub> a T<sub>1</sub>) sia dal lato operato che dal lato opposto, il quale serviva di controllo. Il materiale fu fissato in sublimato (soluzione satura in acqua), sezionato in serie e colorato con il Bleu di toluidina differenziando in alcool a 95°. In tutti i casi sono state facilmente rintracciate, nei gangli del lato operato, cellule in evidente cromatolisi: il quadro non lasciava adito ad alcun dubbio.

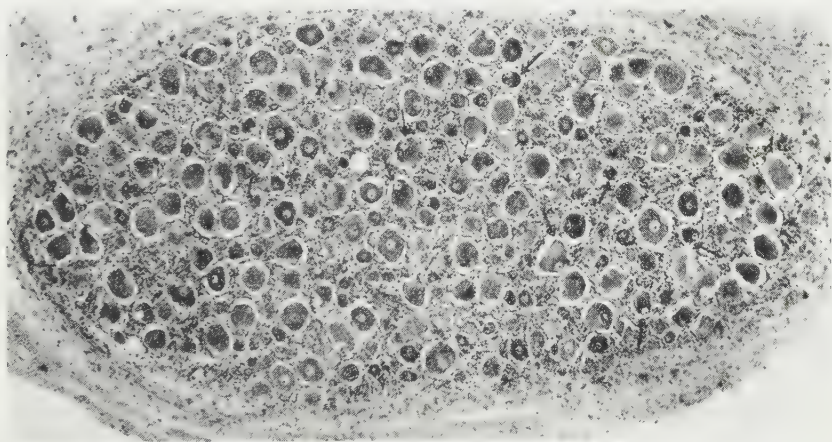


Fig. 1. — Sezione dell'8° ganglio cervicale di destra, di un cane sacrificato al 15° giorno dopo l'asportazione della cute dell'arto anteriore destro. Le cellule in tigrolisi sono indicate con frecce. Metodo Nissl. Ingrandimento 190 ×.

**RISULTATI.** — I risultati ottenuti furono concordanti nei tre animali trattati; alcune delle cellule dei gangli spinali hanno dimostrato, in seguito all'asportazione della cute ed alla conseguente resezione dei nervi cutanei, una reazione cromatolitica intensa con i caratteri ben noti: disgregazione delle zolle cromofile sino alla quasi completa scomparsa, rimanendo per lo più risparmiato dalla disgregazione un sottile orletto periferico; spostamento del nucleo verso la periferia (fig. 1). Rimandiamo per i particolari del processo cromatolitico alla magistrale descrizione che Nissl<sup>(1)</sup>, Lugaro<sup>(2)</sup> diedero di questo processo, confermata di recente da Bodian<sup>(3)</sup>. Sul destino ulteriore oltre il 21° giorno dall'intervento non abbiamo dati, ma è molto

(1) F. R. NISSL, «Ztuh Nervenbeilk», 1895; «Neurol. Zentralbl.», 1896.

(2) E. LUGARO, «Riv. di Patol. Nerv. e Ment.», 5, 6, 7, 8 (1896).

(3) D. BODIAN, «S.E.B. Synposia», n. 1, Cambridge, 163 (1947).



probabile che si abbia *restitutio ad integrum* di pari passo alla rigenerazione dei nervi.

Lugaro avrebbe invece osservato che l'asportazione di lembi cutanei determina una reazione cromatolitica lieve e fugace, mentre, secondo quanto noi abbiamo visto, la reazione è evidente anche in animali sacrificati al 21° giorno. È probabile che questa discordanza nei risultati dipenda dalla circostanza che noi abbiamo avuto cura di asportare, assieme al lembo cutaneo, una porzione della fascia superficiale in modo che fosse demolito un tratto il più possibile lungo del nervo.

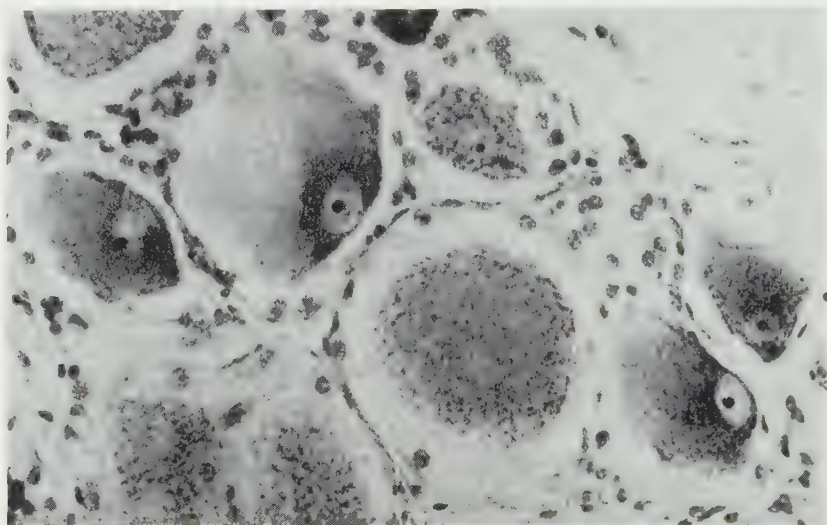


Fig. 2. - Sezione del 7° ganglio cervicale di destra di un cane sacrificato al 15° giorno dopo l'asportazione della cute dell'arto anteriore destro. Cellule di grandezza diversa, grande, media e piccola, in cromatolisi; la sostanza cromofila è quasi del tutto scomparsa, al di fuori di un piccolo alone periferico ed a contatto del nucleo; quest'ultimo è eccentrico. Met. Nissl. Ingrandimento 350×.

È noto infatti che la reazione cromatolitica dei pirenofori dei neuroni è tanto più intensa quanto più lunga è la porzione di assone che viene eliminata. E questa evenienza, che fu invero trascurata da molti Istologi, ci rende ragione della circostanza che il numero dei neuroni i quali presentano reazione cromatolitica è più piccolo di quello che sarebbe stato presumibile. Dalle nostre determinazioni risulta che è sempre inferiore al 15 % sul numero complessivo (con lievi variazioni da un ganglio all'altro). È poco probabile che questa cifra rappresenti realmente il numero dei neuroni esteroceettivi: risulterebbe infatti, pur tenendo conto dell'integrità del ramo dorsale del segmento rispettivo, che fu risparmiato dall'intervento circa l'85 % dei neuroni; è poco verosimile che il numero dei neuroni che presiede all'innervazione propriocettiva sia tanto alto. Riteniamo invece che nonostante il nostro tentativo di eliminare tratti quanto più lunghi era pos-



sibile di nervi cutanei, gli assoni di molti neuroni siano stati demoliti soltanto nel loro tratto estremo distale, di modo che i pirenofori non presentavano reazioni di sorta.

Dalle nostre osservazioni risulta che le cellule esteroceettive sono distribuite irregolarmente nel ganglio. Risulta inoltre che reagiscono sia le grandi che le medie e le piccole cellule (fig. 2) ed a questo riguardo vi è una differenza rispetto ai neuroni viscerali i quali appartengono alle classi di media e piccola grandezza.

**Biologia.** — *Osservazioni al microscopio elettronico di sezioni di leucociti umani.* Nota di DARIA STEVE BOCCIARELLI, LEONARDO TENTORI e GIROLAMO VIVALDI, presentata (\*) dal Socio G. C. TRABACCHI.

La recente elaborazione di una tecnica per la fissazione l'inclusione ed il taglio in fette estremamente sottili ha consentito l'osservazione al microscopio elettronico di sezioni di tessuti, di cellule e di strutture citoplasmatiche. I risultati assai interessanti e promettenti ottenuti nel corso di queste prime ricerche ci hanno indotto ad applicare allo studio della struttura delle cellule nucleate del sangue umano la tecnica standard

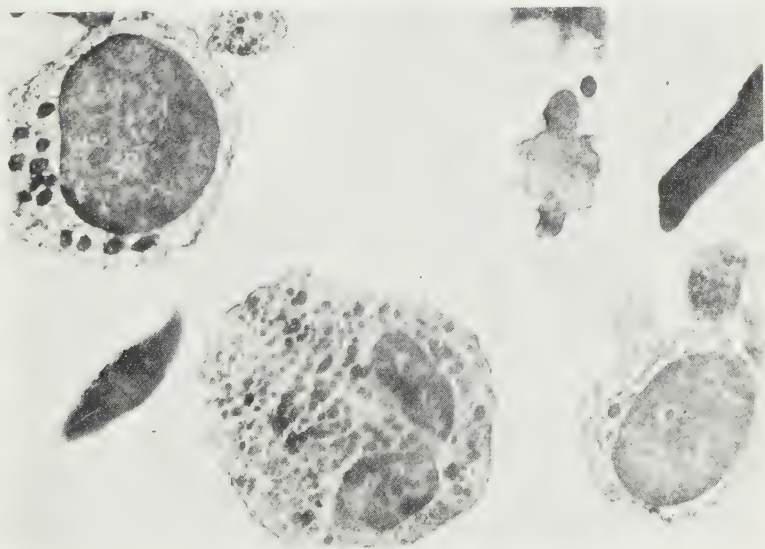


Fig. 1. — 8.700 $\times$ , sezione 50  $\mu$  circa: 1 granulocito neutrofilo (al centro), 2 linfociti?

Si osservano: la membrana cellulare ben conservata in tutte le cellule; le granulazioni specifiche fini e numerose nel citoplasma del granulocito; le granulazioni nel citoplasma dei linfociti (granulazioni azzurofile?).

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.



Fig. 2. - 14.500 $\times$ , sezione 50  $\mu$  circa: granulocito neutrofilo.

Si osservano la membrana cellulare, le granulazioni specifiche, la sezione di due lobi del nucleo.

di inclusione in resine acriliche, la quale ci ha permesso di ottenere i risultati che vengono esposti in questa Nota preventiva.

Vengono riportate le microfotografie elettroniche di sezioni di cellule dello spessore di circa 50 millimicron ( $m\mu$ ) (figg. 1, 2, 3) e dello spessore di circa 20  $m\mu$  (figg. 4, 5, 6); è ovvio che le sezioni più sottili consentono l'os-

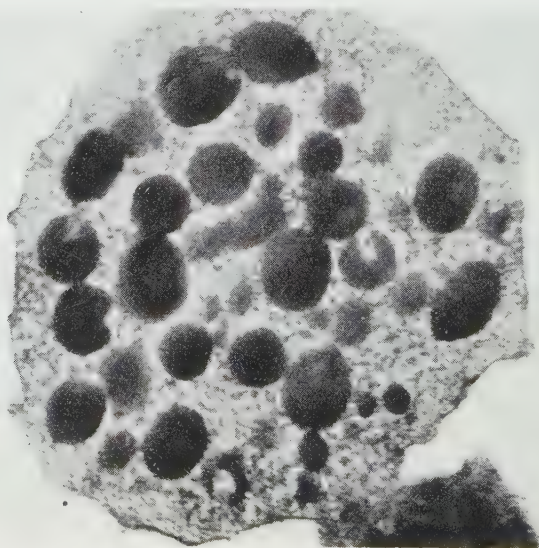


Fig. 3. - 16.000 $\times$ , sezione 50  $\mu$  circa: granulocito eosinofilo.

Molto evidenti la membrana cellulare e le grosse granulazioni specifiche assai opache. Il nucleo non appare nella sezione.

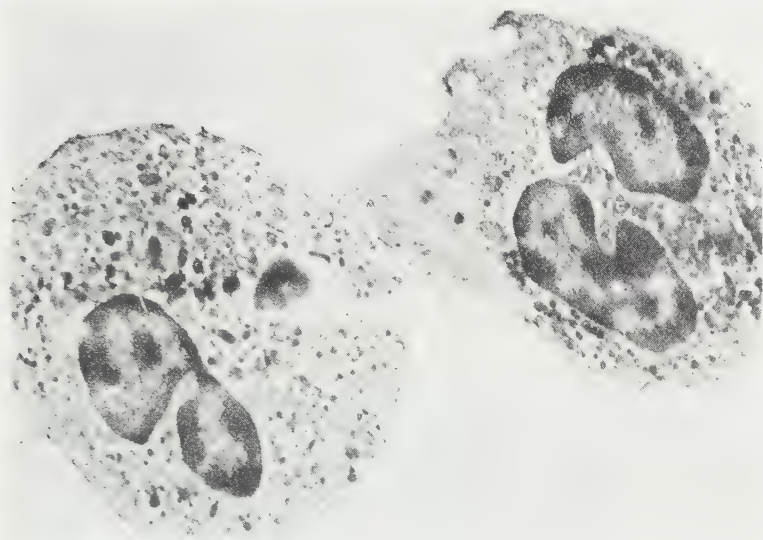


Fig. 4. -  $9.600\times$  sezione  $20\text{ m}\mu$  circa: 2 granulociti neutrofili.

La membrana cellulare è meno evidente, in parte mancante nella cellula di destra. Nella cellula di sinistra appaiono le sezioni di tre lobi del nucleo, in quella di destra di due lobi. Bene evidenti le delicate granulazioni specifiche e la caratteristica struttura del nucleo.

servazione di particolari più delicati della struttura ultramicroscopica delle cellule, ma anche l'interesse delle sezioni di  $50\text{ m}\mu$  è tutt'altro che trascurabile se si pensa che queste offrono come una visione d'insieme di due o tre fettine più sottili sovrapposte.

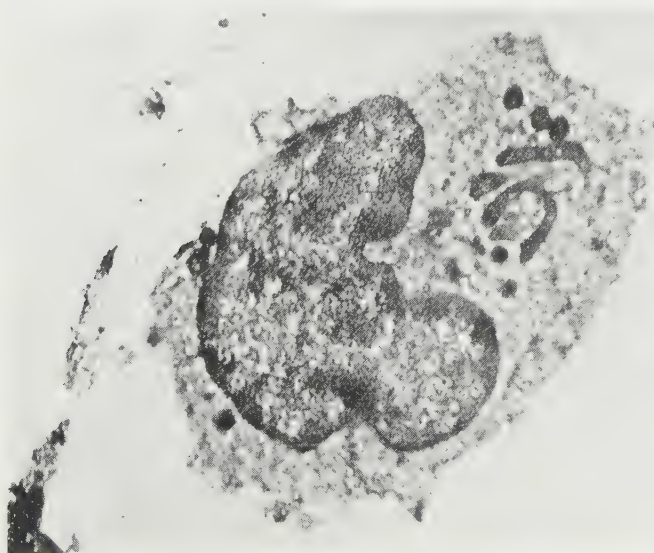


Fig. 5. -  $8.800\times$ , sezione  $20\text{ m}\mu$  circa: monocito?

Membrana cellulare quasi completamente mancante. Il nucleo eccentrico, che per la sua tendenza ad essere lobato ricorda quello dei monociti, presenta la solita struttura. A destra la sezione di 3 condrioconti e, probabilmente, di 3 mitocondri.



Tutte le cellule osservate hanno dimensioni inferiori a quelle reali delle cellule dello stesso tipo; a parte il fatto che la fissazione e la desidratazione producono necessariamente una riduzione dell'oggetto trattato, si deve ancora tener presente che la sezione è in generale inferiore alla sezione massima della cellula.

Lo studio delle microfotografie elettroniche consente fin d'ora la classificazione dei leucociti nelle due classi di leucociti con granulazioni specifiche, e leucociti senza granulazioni specifiche; i caratteri delle granulazioni permettono ancora di distinguere i granulociti neutrofili a citoplasma disseminato di sottili granulazioni, dai granulociti eosinofili il cui citoplasma è

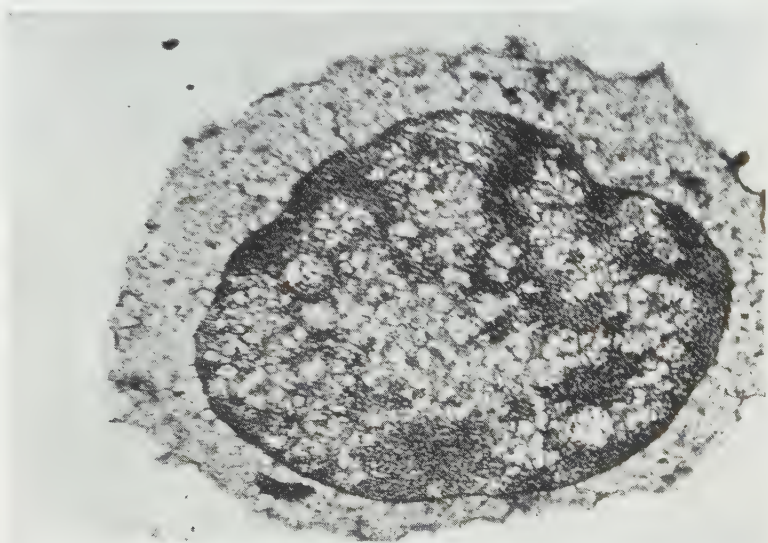


Fig. 6. -  $16.000\times$ , sezione  $20\text{ m}\mu$  circa: linfocito?

Membrana ben conservata, particolarmente evidente la membrana nucleare e la solita struttura del nucleo.

stipato di grosse granulazioni specifiche assai opache. Data la loro rarità non è stato ancora possibile osservare cellule assimilabili ai granulociti basofili o mastleucociti. Per quanto riguarda le cellule senza granulazioni specifiche non è ancora possibile stabilire dei criteri precisi per distinguere i linfociti dai monociti.

La membrana cellulare è visibile nella maggior parte delle cellule: particolarmente evidente e ben conservata nelle sezioni di circa  $50\text{ m}\mu$  è presente, sebbene a volte di aspetto discontinuo e sfrangiato, anche nelle sezioni di  $20\text{ m}\mu$ . Il citoplasma appare di struttura diffusamente spugnosa senza formazioni per ora chiaramente distinguibili. Nella figura 5 sono visibili tre condrioconti con una struttura simile a quella descritta da Palade <sup>(1)</sup> nelle cellule del rene e del fegato di ratto, e probabilmente tre mitocondri.

(1) G. E. PALADE, « J. Histochem. Cytochem. », 1, 188 (1953).

Il nucleo, delimitato da una membrana nucleare sempre assai netta, presenta una struttura interna caratteristica costituita da un fondo uniformemente spugnoso nel quale si addensano degli ammassi a struttura finemente reticolare assai delicata distribuita in maniera estremamente irregolare. Nelle sezioni più sottili non è possibile riconoscere alcuna differenza fra linfociti-monociti e granulociti per quello che riguarda la distribuzione nel nucleo di questa sostanza reticolare più densa. Tale struttura non risulta avere somiglianza con la struttura nucleare di cellule di tessuti differenti osservate con la stessa tecnica al microscopio elettronico.

Teniamo a ringraziare M. Viganò e A. Chiozzotto per la intelligente e volenterosa collaborazione.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Corrispondente Egidio Feruglio

Tenuta (\*) dal Socio MICHELE GORTANI

Con la tristezza di chi è sospinto lontano da una forza perversa, ma con la fierezza di avere obbedito a coscienza dignitosa e retta, EGIDIO FERUGLIO partiva esule volontario nel marzo 1934. A vincere l'intolleranza fascista non gli eran valsi i risultati brillanti di ricerche proseguite per vent'anni in Italia e all'estero, non la notorietà conquistata con esplorazioni ardite e faticose, non il valore di combattente decorato: per i non iscritti al partito totalitario non vi era posto nei concorsi alle cattedre universitarie come a nessun altro impiego statale. Né la rigidezza di principii e di carattere permetteva a EGIDIO FERUGLIO di chiedere la tessera del partito; a EGIDIO FERUGLIO che mi dichiarava la sua impossibilità di adattarsi al clima spirituale e politico di crescente intolleranza che si era venuto affermando in Italia, e di fronte al quale egli, pur estraneo alle competizioni politiche e intento unicamente agli studi e ai doveri della famiglia, si sentiva intimamente ribellare.

Fu in questo modo che per quindici anni l'Università italiana perdette un caposcuola di grande valore e all'investigazione geologica del nostro paese mancò una forza viva e geniale di primissimo ordine. Perché allora EGIDIO FERUGLIO, formata già compiutamente l'alta sua personalità scientifica, dotato ormai di larga esperienza e di molto sapere, affinato nel difficile lavoro di sintesi non meno che nelle ricerche analitiche, era nel pieno vigore delle sue doti naturali, delle capacità acquisite e dell'ardore di studioso. Al suo attivo, una collana di studi magistrali su la pianura e i monti del nativo Friuli, esplorazioni fruttuose e metodiche su remote plaghe ignote o mal note, una monu-

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1955.



mentale monografia paleontologica e monografie regionali su la geologia sud-americana.

Come a tanto egli fosse riuscito in così giovane età, lo dice il suo movimentato curriculum.

Nato a Feletto Umberto presso Udine il 1° settembre 1897, a soli quindici anni dava alle stampe le sue prime osservazioni naturalistiche, preso com'era dal fervore per tali studi che gli era istintivo, e che nobilitava in quel tempo la Società Alpina Friulana e l'annesso Circolo Speleologico e Idrologico sotto la guida animatrice di Olinto Marinelli e Francesco Musoni. Quando poté assistere alle lezioni del Marinelli nell'Ateneo fiorentino, aveva già l'abito all'osservazione ed aveva scoperto e illustrato una stazione neolitica in grotta; e quando si laureò con lode nel 1920, dopo la gloriosa parentesi militare, possedeva ormai per le ricerche di campagna la preparazione che viene dall'esperienza. Per due anni assistente geologo presso la Stazione chimico-agraria sperimentale di Udine, poté continuare ed estendere gli studi sulla regione friulana; studi proseguiti nel successivo triennio, durante l'assistentato all'Università di Cagliari che gli permise il contatto con i problemi principali della geologia sarda. Necessità economiche lo persuasero ad accettare nel 1925 l'offerta di impiego come geologo nel Servizio dei giacimenti petroliferi demaniali nell'Argentina. E furono sette anni di indefesso lavoro: esplorazioni e ricerche nell'immenso territorio dall'oceano alle Ande e dallo stretto di Magellano al tropico, alternate con soste laboriose per studio dei materiali ed elaborazione dei risultati.

Non pago di cogliere senza risparmio di sé ogni occasione di viaggi e di studi che il servizio gli offriva, volle anche per conto proprio completare il quadro geologico a lui aperto, con fruttuose esplorazioni nella zona arcaica dell'Uruguay e nelle sconosciute regioni della Patagonia meridionale. E qui divise con il P. Alberto De Agostini la gloria, non clamorosa ma duratura, della prima traversata della Cordigliera australe, dall'Atlantico al Pacifico, attraverso gli sterminati campi di ghiaccio del massiccio centrale Andino.

Fu nel mio Istituto a Bologna, che nell'inverno 1928-29 e dalla primavera del 1932 a quella del 1934, egli trasse in patria dalla ingente mole dei materiali raccolti e dei fatti osservati il maggior profitto scientifico. Ed ivi conseguì la libera docenza e fu professore incaricato di paleontologia.

L'esule del 1934 era quindi uno scienziato di valore; e come tale fu dal Governo Argentino riconosciuto e apprezzato. Messo a capo del rilevamento topografico e geologico della Patagonia e della Terra del Fuoco, e poi anche dell'Argentina centrale, riprese alacramente l'ormai usato lavoro fino a poter dare alle stampe le ampie monografie su i sistemi orografici e i ghiacciai dell'Argentina e, in tre grossi volumi, quella descrizione geologica della Patagonia che, unita con la grande carta al duemilionesimo, resterà monumento duraturo di sapienza italiana nel Nuovo Mondo.

Nel 1940 troviamo EGIDIO FERUGLIO all'Università di Mendoza, professore di geologia e mineralogia nella Facoltà di Agraria, e nel 1943 professore

di geologia storica, tettonica e del petrolio nell'Istituto del Petrolio da lui stesso fondato, organizzato e diretto. Nuovi viaggi di studio dall'estrema America australe al Brasile; partecipazione a congressi internazionali; riconoscimenti accademici dall'Accademia Nazionale delle Scienze della Repubblica Argentina, dalla Società Argentina di Studi geografici, dal Museo de la Plata. L'America latina dava largamente a Egidio Feruglio quanto non aveva potuto ottenere in patria.

Ma della patria troppo acuto sentiva il richiamo, troppo forte la nostalgia del paese natale, troppo intenso il bisogno che nei due figlioli vibrasse l'amorosa conoscenza diretta della nostra terra, perché egli si adattasse a viverne sempre lontano. E appena poté dignitosamente rientrarvi, tornò.

Reintegrato a 52 anni nella cattedra di Torino, accolto nella nostra Accademia, salutato con gioia dai colleghi antichi e nuovi, pareva si schiudesse un lungo periodo sereno e fecondo all'attività che egli aveva immediatamente e animosamente ripresa. Ahimé! Tre anni appena, e sorte crudele gli strappò il figlio diletto, che già egli vedeva seguire il solco paterno. Cercò invano sollievo nel febbrile lavoro, nel passaggio all'Ateneo romano, nello studio e negli affetti. Dopo nemmeno due anni, il 14 luglio 1954, la sua fine mostrava come il dolore possa anche materialmente schiantare il nostro povero cuore.

Non credo mi faccia velo l'affetto nel ritenere che l'opera scientifica di EGIDIO FERUGLIO sia destinata a resistere al tempo ed a far annoverare il suo autore fra i maggiori geologi; anche se la fine immatura gli tolse di portare a compimento importanti lavori già predisposti in base alle ricerche fatte e all'imponente materiale raccolto. Tanto più duratura quest'opera, in quanto fondata pressoché interamente su osservazioni e studi originali, con ampia documentazione di fatti accertati, e soltanto su questi basando ricostruzioni e sintesi di carattere generale.

Due sono i gruppi in cui si ripartisce naturalmente il complesso dei suoi cento e più lavori.

Frutto in gran parte di attività giovanile il primo gruppo, che si riferisce al Friuli, ma fecondo di risultati. Tre ordini di non facili problemi – la costituzione e struttura delle Prealpi, l'età ed evoluzione dei terreni quaternari, le condizioni idrogeologiche della pianura e dei massicci carsici prealpini – hanno trovato nel FERUGLIO un indagatore acuto e geniale, che li ha in modo originale presentati, affrontati e risolti. Le scaglie tettoniche embriciate da lui riconosciute come tipo strutturale delle Prealpi Carniche e Giulie (per citarne solo alcuni) sono fatti ormai acquisiti alla scienza, così come le sue ricostruzioni paleogeografiche e geomorfologiche; e i suoi studi su la pianura friulana sono stati inoltre provvida base per la bonifica delle zone basse che è in corso tuttora.

L'altro gruppo di lavori – il frutto dei vent'anni in cui nella piena maturità dell'ingegno il FERUGLIO si prodigò nel continente sud-americano – è ad un tempo opera di geografo esploratore, di morfologo e di consumato geo-

logo. A lui si deve la scoperta di alghe calcaree nel precambriano dell'Uruguay, del devoniano fossilifero nella zona subandina dell'Argentina tropicale e di depositi glaciali permiani in questa e nelle Ande contigue. Ma codesti, che già sarebbero argomento di alta e giustificata compiacenza per qualsiasi studioso, non sono che risultati marginali rispetto al complesso dei lavori in cui EGIDIO FERUGLIO ha rivelato alla scienza la geologia e morfologia dell'intera Patagonia. Smembrata la supposta immensa batolite andina in corpi intrusivi di composizione ed età molto diverse; dimostrata con la scoperta di fossili nelle intercalazioni tufacee l'età giurassica dei complessi porfirici che imbasano la serie sedimentaria della Cordigliera del Lago Argentino e della Patagonia extra-andina; riconosciuto terziario, pure su documenti paleontologici, il complesso liparitico-andesitico della fascia andina e subandina fra i paralleli 40° e 43°; stabilita la particolareggiata serie stratigrafica dell'intera regione risolvendo in modo definitivo controverse e incertezze; scoperte e illustrate faune e flore fossili di fondamentale importanza paleontologica e stratigrafica; rivelati i motivi strutturali nei particolari e nelle linee d'insieme; studiata a fondo la magnifica serie dei terrazzi marini scoprendovi importanti faune di clima freddo e di clima caldo; correlati questi con i terrazzi fluviali e con i depositi glaciali e interglaciali per la prima volta rivelati nella Cordigliera australe; delineate le caratteristiche geomorfologiche del vastissimo territorio che si allunga per oltre 1.800 km e si dilata a più di 600. E ancora: affrontate le questioni di carattere generale connesse con sì svariati problemi; tratteggiata in una visione sintetica la geografia morfologica dell'intero territorio Argentino; portate a compimento indagini d'importanza decisiva per la geologia del petrolio dalla Patagonia meridionale alla provincia tropicale di Salta, indagini i cui frutti, per quanto celati negli archivi del Demanio Argentino, non hanno meno contribuito a fare della grande Repubblica un paese produttore e a dare una base razionale alle ricerche ulteriori.

Tale, per sommi capi, il contributo di EGIDIO FERUGLIO alla scienza; tali le ragioni della vasta risonanza che ebbero, hanno ed avranno il suo nome e l'opera sua.

#### BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

- Principali scritti di E. FERUGLIO su la geologia del Friuli:
- I terrazzi della pianura pedemorenica friulana*, « Pubbl. n. 107 Uff. Idrogr. Magistr. Acque », Venezia 1920, 94 pp., 2 carte.
- L'altipiano carsico del Ciaorlècc nel Friuli*, « Mondo sotterr. », XVIII-XIX, Udine 1923, pp. 1-89, 10 fig.
- Le Prealpi fra l'Isonzo e l'Arzino. Descrizione geologica*, « Estr. d. Boll. Assoc. Agraria Friul. », 1924-25, Udine 1925, 104 pp., 18 tav., carta geol. 1:150.000.
- La zona delle risorgive del Basso Friuli fra il Tagliamento e la Torre. Descrizione geologica e idrologica*, « Ann. Staz. Chim.-Agr. Sperim. Udine », pp. 1-346, 10 tav., 3 carte, carta geol. 1:50.000.
- Carta geologica delle Tre Venezie al 100.000, foglio « Udine »*. Con annesse *Note illustrative*, « Uff. Idrogr. Magistr. Acque », 1925 (Note illustrative, 77 pp., 1 tav., 1929).

*Nuove ricerche sul Quaternario del Friuli*, «Giorn. di Geol.», IV, Bologna 1929, pp. 1-36.  
*La regione carsica di Villanova in Friuli*, «Pubbl. Ist. Geol. Univ. Torino», II, 1953, pp. 1-68, 34 tav., carta geol. 1 : 12.500.

Principali lavori di E. FERUGLIO su l'America Meridionale:

- Ricerche geologiche nell'Uruguay*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», XLVI, 1927, pp. 67-77.  
*Apuntes sobre la constitución geológica de la región del Golfo de San Jorge*, «Anal. Soc. Argent. Estud. Geogr. Gaea», III, 1929, pp. 395-486, 11 fig., 1 tav.  
*Fossili devonici del Quemado (San Pedro de Jujuy) nella regione subandina dell'Argentina settentrionale*, «Giorn. di Geol.», V, 1930, pp. 71-97, 1 tav.  
*Origine delle depressioni chiuse nella regione del Golfo di San Giorgio (Patagonia)*, «Mem. Geol. e Geogr. di G. Dainelli», II, 1931, pp. 153-233, 40 fig., 1 cartina, 2 tav.  
*Observaciones geológicas en las provincias de Salta y Jujuy*, Direcc. Yac. Petrol. Fisc., Contrib. I Reunion Nac. de Geogr., Buenos Aires 1931, 39 pp., 4 fig.  
*Fossili devonici della Sierra del Porongal*, «Giorn. di Geol.», VIII, 1932, pp. 127-46, 1 tav.  
*I terrazzi marini della Patagonia*, Ibid., VIII bis, 1933, pp. 1-288, 11 tav.  
*Fossili liassici della valle del Rio Genua (Patagonia)*, Ibid., IX, 1934, pp. 1-64, 5 tav.  
*Relaciones estratigráficas y faunísticas entre los estratos cretáceos y terciarios en la región del Lago Argentino y en la del Golfo de San Jorge*, «Bol. Inform. Petrol.», nn. 128-30, Buenos Aires 1935, 58 pp., 6 tav.  
*Palaeontographia Patagonica*, «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», X-XI, 1936-37, 384 pp., 26 tav.  
*Mapa geológico de la Patagonia al sur del paralelo 42° y Tierra del Fuego*, 1 : 2.000.000. Min. Agric., Direcc. Gen. Yac. Petrol. Fisc., Buenos Aires, 1939.  
*La flora liásica del valle del Río Genoa (Patagonia)*, I, «Notas Mus. La Plata», VII, «Paleontol.», n. 40, pp. 93-110, 5 tav., 1942; II, «Rev. Soc. Geol. Argent.», I, pp. 209-18, 3 tav., 1946.  
*Mapa geológico de la zona Oeste del meridiano 62°, entre los paralelos 32° y 42°*, 1 : 2.000.000, Min. Agric., Direcc. Gen. Yac. Petrol. Fisc., Buenos Aires 1943. Tuttora inedito è il foglio comprendente la zona più a nord, dis. nella medesima scala, e che trovavasi presso la medesima Direzione Generale.  
*Estudios geológicos y glaciológicos en la región del Lago Argentino*, «Bol. Ac. Nac. Cienc. Rep. Argent.», XXXVII, Cordoba 1944, pp. 1-208, 37 tav., carta topogr., carta geol.  
*Los sistemas orográficos de la Argentina*, in *Geografía de la Rep. Argentina*, IV, Buenos Aires 1947, 542 pp., 86 fig.; *Los glaciares de la Cordillera Argentina*, Ibid., VII, 1947, 86 pp., 3 tav., 11 fig.  
*Foglio geológico «San Carlos de Bariloche» della Carta geol. della Rep. Argentina*, 1 : 200.000. (Con Note illustrative in «Bol. Inform. Petrol.», n. 200, 1941, pp. 27-64), Direcc. Gen. Minas y Geol., Buenos Aires 1947.  
*Descripción geológica de la Patagonia*. 3 voll. di 1114 pp., 250 fig., 117 tav., Buenos Aires, 1949-50.  
*Edad de las terrazas marinas de la Patagonia*, «C. R. XVIII Intern. Geol. Congr.», part IX, London 1950, pp. 30-39, 4 fig.  
*Correlazione delle formazioni terziarie dell'Argentina*, «C. R. XIX Congr. Géol. Intern.», XIII, Alger (1952-54), pp. 155-64.  
*Pubblicazioni dell'Istituto Geologico dell'Università di Torino*, I-II, Torino, 1952 e 1953. (Fossili della Patagonia).



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che il Direttore del Servizio Geologico d'Italia, prof. Beneo, impossibilitato ad intervenire alla commemorazione del compianto Socio Egidio Feruglio che avrà luogo nella presente seduta, ha inviato un telegramma di adesione.

Il prof. Giordani dà poi la parola al Socio Nazionale Michele Gortani che rievoca la figura e l'opera dello scienziato scomparso.

Il Presidente ringrazia il prof. Gortani per la sua elevata e commossa orazione e rinnova ai familiari del Socio Feruglio, presenti alla commemorazione, l'espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso Collega.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio G. B. Dal Piaz presenta il volume XVIII (1953-54) delle «Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova», dirette da lui e dal Collega Bianchi. Tale volume che è il 2° della nuova serie delle Memorie dell'Istituto Geologico di quella Università, fondate nel 1912 dal Socio Giorgio Dal Piaz e da lui dirette per oltre un trentennio, contiene otto importanti lavori di studiosi italiani e stranieri ed è stato pubblicato grazie ai contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche, dell'Università di Padova, dell'Associazione Nazionale Imprese Produttrici e Distributrici di Energia Elettrica (A.N.I.D.E.L.), della Società Montecatini, dell'A.G.I.P. Mineraria e del Laboratorio di Geologia de «l'Institut Catholique» di Tolosa.

Il Socio U. Amaldi presenta, con le seguenti parole, il secondo volume delle «Opere scelte» di Salvatore Pincherle:

«Per amichevole incarico del Presidente prof. Sansone ho l'onore di offrire in omaggio all'Accademia, a nome dell'Unione Matematica Italiana, anche il secondo volume delle «Opere scelte» di Salvatore Pincherle, delle quali non più di due mesi fa ho potuto presentare il volume primo. Come ebbi ad accennare in quell'occasione, il Comitato di discepoli del Pincherle, cui l'Unione aveva affidato il compito di curare la pubblicazione, scelse nella vasta produzione matematica del Pincherle – costituita da circa duecentocinquanta lavori originali, oltre una ventina di trattati – una quarantina di Memorie e Note, precisamente trent'otto, di cui le prime quindici trovarono posto nel primo volume e le rimanenti ventitré costituiscono questa seconda parte dell'opera complessiva. Essa si inizia con la poderosa e fondamentale Memoria dei «*Mathematische Annalen* (1897)» sul *Calcolo funzionale distributivo*, che anche nell'evoluzione del pensiero matematico del Pincherle si può dire occupi un posto centrale, in quanto da un lato fornisce una sintesi sistematica delle idee via via maturate e dei risultati generali conseguiti da lui nella prima



fase – più decisamente costruttiva – della sua attività di ricercatore, e d'altro canto, nell'ampia e lucida introduzione storica e nei larghi riferimenti ad altri indirizzi tipici della Matematica di quel periodo, chiarisce le origini e le ragioni di quel programma di lavoro, che in qualche modo informa e determina i vari ordini di ricerca posteriori del Pincherle, dei quali si trovano, per così dire, condensati in questo volume i risultati salienti e caratteristici: operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica, teoria funzionale della trasformazione del Laplace e, in particolare, suoi nessi con le serie divergenti, funzioni determinanti e rispettive funzioni generatrici nel senso del Laplace e dell'Abel, sviluppi in serie di fattoriali, sviluppi asintotici e serie sommabili secondo il Borel, inversione di integrali definiti nel campo complesso, come problema di Calcolo funzionale, classificazione delle operazioni distributive e delle corrispondenze funzionali ad esse associate in relazione con le proprietà analitiche del nucleo e con la distribuzione degli autovalori e delle autofunzioni, che il Pincherle aveva considerato e studiato quando ancora non ne erano stati nemmeno conosciuti i loro nomi correnti, ed altre indagini collaterali, su cui sorvolo. Ma vanno almeno ricordate varie Note e una interessantissima conferenza riassuntiva – tenuta dal Pincherle qui a Roma presso il Seminario fisico-matematico di quell'epoca – sulla geometria degli spazi funzionali (che per il Pincherle erano gli spazi vettoriali ad una infinità numerabile di dimensioni) e sulle loro omografie, dove vien ripresa e ulteriormente chiarita l'osservazione sul duplice tipo di degenerazione, che diventa possibile per codeste omografie in codesti spazi – a differenza di quel che accade negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni – osservazione, che troppe volte è stata attribuita ad Hellinger e Toeplitz, mentre il Pincherle l'aveva formulata esplicitamente e illustrata con esempi particolarmente semplici ed espressivi fin dal lontano 1897, cioè quasi quindici anni prima. Il volume si chiude con la comunicazione presentata dal Pincherle al Congresso matematico di Toronto, dove quell'austera e veneranda figura di studioso suscitò intorno a sé un così largo consenso di simpatia e di fiduciosa considerazione, che fu affidato al Pincherle il compito di organizzare a Bologna il successivo Congresso col mandato – estremamente impegnativo in quel mondo ancora turbato e diviso, dopo la prima grande guerra, da passioni politiche e rancori mal sopiti – di assicurare a quel nuovo Congresso quella effettiva e completa internazionalità di interventi, che a Toronto non si era potuto ottenere. Il Pincherle, grazie ad uno sforzo mirabile di tatto, di saggezza e anche di energia – sebbene egli fosse già settantacinquenne – raggiunse pienamente lo scopo prefissogli e si può dire che quello sia stato il coronamento ideale di tutta la sua vita.

«Ora la pubblicazione di queste "Opere scelte" costituisce l'omaggio più degno e più durevole alla memoria di quello scienziato insigne, Maestro indimenticabile ed esempio luminoso di incontaminata nobiltà morale. Noi tutti e, specialmente, quanti avemmo la ventura di essergli discepoli o amici ne siamo riconoscenti all'Unione Matematica Italiana e al suo attivissimo Presidente prof. Sansone; e un ringraziamento particolarmente fervido va

indirizzato al prof. Antonio Mambriani dell'Università di Parma, al quale sono dovute, in modo pressoché esclusivo, la preparazione sapiente di questi "selecta" e la cura illuminata e diligentissima della loro pubblicazione».

Il Socio Dore, a nome dell'Università di Bologna, che ebbe l'onore di annoverare Salvatore Pincherle tra i suoi più illustri Maestri, e nella sua qualità di allievo del grande scienziato, si associa con commosse parole a quanto detto dal Collega Amaldi.

Il Socio Piconé presenta il volume suo e del prof. De Giorgi, in cui sono raccolte le lezioni tenute dal predetto Socio Piconé alla Scuola Politecnica di San Paolo del Brasile durante i mesi di agosto, settembre e ottobre. In queste lezioni il prof. Piconé ha svolto una teoria delle equazioni integrali lineari in tali ipotesi, per i dati e per le soluzioni, da consentirne l'applicazione immediata ai problemi d'integrazione delle equazioni differenziali della fisica-matematica.

Il Socio Puntoni presenta il volume I degli «Atti» del VI Congresso Internazionale di Microbiologia, svoltosi a Roma dal 6 al 12 settembre 1953 e mette in evidenza che tale Congresso, il quale ha avuto un carattere veramente internazionale, ha conseguito risultati di notevole importanza sia per la larga partecipazione di studiosi italiani e stranieri, sia per l'elevato numero delle comunicazioni che sono state ben 1500. Gli «Atti» del Congresso saranno pubblicati in sette volumi, dei quali è uscito il primo che raggruppa le seguenti sezioni:

Sezione I. - Microbiologia generale;

» II. - Fattori di inibizione;

» III. - Genetica dei micro-organismi;

» IV. - Azioni di patogeni (virulenza e tossine);

» V. - Tecnica e diagnostica microbiologica.

Gli altri volumi seguiranno a brevissimi intervalli.

Il Socio Polvani presenta, a nome dell'Università di Parma e della Società Italiana di Fisica, il primo volume delle *Opere di Macedonio Melloni*, pubblicato l'altr'anno sotto gli auspici della stessa Università e della stessa Società, in occasione del 1° Centenario della morte del fisico parmense.

Il Socio Polvani legge parte delle pagine, che qui si riporta, con le quali il volume viene presentato dai compilatori, che sono il prof. Giorgio Todesco, Direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Parma, e lo stesso prof. Polvani.

«Ad evitare il danno di questo scemarsi della cognizione della storia della scienza e dell'interessamento ad essa, meglio non v'ha che allestire pubblicazioni dove codesti documenti siano riportati in ordinate raccolte e novellamente presentati agli studiosi, affinché questi possano, se non sugli originali, almeno su copie fedeli, fermare la loro curiosità, la loro attenzione, la loro critica.

«Ora, ricorrendo il centenario della morte di Macedonio Melloni, la Società Italiana di Fisica ha desiderato che, in onore alla memoria di lui e perché possa venir facilmente e compiutamente conosciuto il contributo

portato da questo insigne fisico alla scienza, si iniziasse la pubblicazione delle opere.

« L'aiuto morale e materiale dato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dalla Università di Parma – ai quali si rende pubblicamente grazie – ha permesso che quel desiderio divenisse realtà.

« Ed oggi ecco uscire, sotto l'impresa della Casa Zanichelli, sempre sollecita alle iniziative della nostra Società, il primo volume delle *Opere di Macedonio Melloni*.

« Questo primo volume raccoglie solo *La Thermochrôse*, che è il trattato – famoso ma non facile a trovarsi – nel quale Melloni, giunto ormai alla sua completa maturità scientifica, narra la storia dei suoi studi sul calore raggiante, e stabilisce, in solido edificio, la fenomenologia essenziale della colorazione calorifica.

« Non è da credere che questa inversione cronologica tolga interesse ai volumi successivi che conterranno, in ordine cronologico, le Note e le Memorie di Melloni: tutt'altro. Prima di tutto perché alla concezione della colorazione calorifica egli giunse attraverso una lunga trafila di indagini sperimentali e un annoso lavoro mentale di critica, l'una e l'altro bellissimi a rivivere attraverso la lettura dei singoli e successivi lavori. Poi, perché *La Thermochrôse* è solo una tappa anche se la più importante, di questo processo evolutivo. Infine perché Melloni lasciò di sé profonda orma anche in altri campi della Fisica: nell'Elettrologia, nel Magnetismo, nell'Elettromagnetismo, nella Meteorologia... ».

Il Socio Polvani informa che ai volumi destinati alle *Opere* ne seguirà un altro destinato al *Carteggio epistolare* in modo che il lettore possa completamente conoscere quest'Uomo, il Melloni, « che visse esule pur di mantener fede all'ideale d'indipendenza, e tra straniere genti si meritò alta fama ed alti onori; e, conoscendolo, ammirarlo così come già lo ammirarono i suoi contemporanei: *umeris extantem* ».

Il Socio Polvani osserva infine che il volume ha anche un certo pregio librario, perché *La Thermochrôse* è presentata in riproduzione fotolitografica su carta speciale filigranata, simile a quella originale, comprese la copertina e la tavola finale.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato le opere sopra citate.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Semerano, G. B. Dal Piaz, G. Levi, Segre, Severi (a mezzo del Collega Segre), Trabacchi, Armellini, Cambi e Picone.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che il Ministero della Pubblica Istruzione ha richiamato l'attenzione delle Università, delle Accademie e in genere di tutti i Corpi scientifici sulla necessità della preventiva autorizzazione, da parte della Presidenza del Consiglio dei Ministri, per l'organizzazione dei Congressi internazionali e nazionali, a norma delle disposizioni contenute nel R.D.L. 17 ottobre 1935 n. 2082. Tali disposizioni, sorte in tempi ormai lontani, sembrano anacronistiche ed inoltre non tengono conto di varie circostanze che possono determinare la decisione di organizzare un Congresso, prima di poter chiedere la relativa autorizzazione, come, ad esempio, nel caso di Congressi internazionali che vengono decisi appunto in sede internazionale e in occasione del Congresso precedente.

La Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche ha ritenuto di dare mandato alla Presidenza perché richiami l'attenzione dei competenti organi del Governo sulla inopportunità di richiedere l'osservanza di una norma che fu sancita in altri tempi e che non può più essere considerata consona con le esigenze della libertà e della dignità della cultura.

Il prof. Giordani chiede ai Colleghi se intendano dare alla Presidenza uguale mandato e la Classe si pronuncia affermativamente.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 12 febbraio 1955*

- CHIAPPELLI Umberto. — *L'azione della medicina sociale per la rinascita delle aree depresse*. Estr. da «I Problemi del Servizio Sociale», a. IX, 1954, n. 5.
- CINOVSĖIJ Ja. P. — *Nasekomye latvijskoj SSR*. Riga, Akademija Nauk Latvijskoj SSR, 1953. Pp. 209, in-8°, con tavv. e figg.
- CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. ROMA, 6-12 SETTEMBRE 1953. — *Atti*. Vol. I, sezioni I-V, nn. 1-300. Roma, Staderini, 1955. Pp. 905, in-8°, con figg.
- CONVEGNO NAZIONALE DELL'INDUSTRIA PASTAIA. — *Atti ufficiali*. Estr. da «Molini d'Italia», 1954, settembre
- DE GIORGI Ennio. — Vedi: PICONE Mauro e DE GIORGI Ennio.
- Essais de Botanique*. Moskva-Leningrad, Académie des Sciences de l'URSS, Société Botanique, 1954. Voll. 2, in-8°, con figg.
- FRISCH Ragnar. — *Principles of linear programming*. With particular reference to the double gradient form of the logarithmic potential method. Oslo, 1954. Pp. 219, in-4° (Memorandum fra Universitæts. Sosialøkonomiske Institutt) (In litografia).
- Institut pour la Recherche Scientifique en Afrique Centrale*. S. l., 1954. Pp. 14, in-8°, con tavv.
- ISTITUTO SUPERIORE DI SANITÀ. — *Riassunto di attività varie dell'anno 1953*. Roma, 1954. Pp. 484, in-8°.
- LIGUORI Fernando. — *Ricerche matematiche*. Napoli, Pironti, 1955. Pp. 43, in-8°.
- MASSARI Maria. — *Raffaello e gli autotreni. Un nuovo impiego della registrazione oscillografica per esplorare il tormento causato dal traffico stradale meccanico a taluni monumenti ed opere d'arte antica*. Estr. da «Civiltà delle macchine», 1954, novembre.
- MELLONI Macedonio. — *Opere*. Pubblicate sotto gli auspici della Università di Parma e della Società Italiana di Fisica. A cura di G. Polvani e G. Todesco. Vol. I. Bologna, Zanichelli, 1954. Pp. XXIX-358, in-8°, con figg. e tavv.
- Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova*. Vol. XVIII, 1953-54.
- Perelety ptic v evropejskoj časti SSSR*. Riga, Akademija Nauk Latvijskoj SSR, Institut Biologii, 1953. Pp. 223, in-8°, con tavv. e figg.
- PETRUCCI Maria Caterina. — *La vaccinazione antitetanica*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 33, in-8° (Argomenti di Medicina Sociale, 4).
- PICONE Mauro e DE GIORGI Ennio. — *Ličões sôbre uma teoria das equações integrais lineares e suas aplicações, segundo a orientação de Jordan-Hilbert*. São Paulo, Escola Politécnica da Universidade, Departamento de Matemática, 1954. Pp. 259, in-4.
- PINCHERLE Salvatore. — *Opere scelte*. A cura della Unione Matematica Italiana. Vol. II. Roma, Edizioni Cremonese, 1954. Pp. 493, in-8°.
- POLVANI Giovanni. — Vedi: MELLONI Macedonio.
- SOPRANA Cesare. — *Direttive per la valutazione medico-legale della invalidità pensionabile*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 40, in-8° (Argomenti di Medicina Sociale, 6).
- TIHOV G. A. — *Osnovnye trudy*. T. I: *Astrofizika (1897-1919)*. Alma Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1954. Pp. 336, in-8°, con tavv.
- TODESCO Giorgio. — Vedi: MELLONI Macedonio.
- VALENTE Gioacchino. — *Prospettiva tridimensionale. L'uomo centro del sole e della terra*. Napoli, Raimondi, 1954. Pp. 151, in-4, con figg. e tavv.
- VERONESE Gino. — *Proposta per l'esercizio degli acquedotti rurali nei comprensori di bonifica della Venezia Euganea*. Estr. da «L'Acqua», 1954, nn. 3-4.
- Vo prosy dinamiki i dinamičeskoj pročnostj*. V. I. Riga, Akademija Nauk Latvijsskoj SSR, 1953. Pp. 184, in-8°.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 12 marzo 1955*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Passaggio apparente della Terra sul Sole in una escursione Terra-Marte.* Nota preliminare (\*) del Socio G. ARTURO CROCCO.

È notorio che il primo fondamento dell'Astronautica è quello che determina la evasione di un missile dalla gravità terrestre, quando sia comunicata al missile una velocità di lancio di 40.000 km/ora.

Ottenuta l'evasione dall'attrazione della Terra il missile rimane soggetto unicamente a quella del Sole di cui diviene un satellite; che inizia il suo moto spaziale con velocità identica a quella orbitale della Terra e su una propria orbita sensibilmente parallela a quella terrestre.

La tecnica ha già brillantemente investigato e delineato le modalità necessarie e sufficienti a raggiungere questo risultato.

È poi notorio che a risultato raggiunto, il che avviene dopo alcuni diametri terrestri di allontanamento dalla Terra, interviene il secondo fondamento dell'Astronautica che, basandosi sulle leggi del moto centrale, permette di allungare o raccorciare l'asse maggiore dell'ellisse orbitale, che descriverà il missile attorno al Sole, col solo espediente di variare opportunamente la velocità del mobile in partenza. In tal modo si può allungare l'orbita del missile sino a farla divenire tangente all'orbita di Marte.

Si rende così possibile per solo moto inerziale Kepleriano, una escursione esplorativa Terra-Marte della durata di 37 settimane terrestri. L'appuntamento col pianeta di arrivo richiede soltanto che sia dato a Marte un vantaggio di circa sei settimane rispetto all'istante di partenza del missile dalla Terra.

(\*) Presentata nella seduta del 12 marzo 1955.

Ciò premesso si deve osservare che mentre è raggiungibile tutta la precisione astronomica richiesta da questo avvenimento interplanetario per quanto riguarda i tempi e gli elementi geometrici, non si può invece contare sulla stessa precisione per quanto riguarda l'elemento tecnico *velocità di partenza* del missile dalla Terra. E si può ad esempio calcolare che l'errore di un *decimillesimo* sulla suddetta velocità porta ad un errore sulla distanza tra punto di partenza e punto di arrivo pari a circa *nove* diametri marziani: il che dal punto di vista del successo dell'impresa sarebbe proibitivo.

Come correggere dunque, in viaggio, l'errore eventuale sulla velocità?

A questo scopo è destinato il fenomeno che adesso io segnalo, credo per la prima volta, sebbene non possa garantirlo; e cioè il fenomeno del passaggio della Terra sul Sole; che si deve al fatto essenziale che il missile parte con velocità superiore a quella della Terra per giungere all'arrivo con velocità inferiore. Ne deriva la esistenza di un punto del percorso nel quale la Terra viene a trovarsi in congiunzione tra il missile ed il Sole: approssimativamente all'undicesima settimana dalla partenza.

Questo fenomeno celeste, che risulterà una novità in campo astronomico, ha tutti i caratteri per costituire base di rettificazione della velocità del missile. Anzitutto esso è bene osservabile con modesti ingrandimenti ottici, giacché il diametro apparente della Terra vista dal missile risulta di  $2'$  mentre quello del Sole è ridotto a  $28'$ . La Terra apparirà dunque sul Sole come un pisello su una grossa arancia. In secondo luogo, perché il fenomeno ha la durata di circa *dodici* ore; e consente quindi di operare con grande precisione nella misura.

Vi è solo una difficoltà: consistente nel fatto astronomico che il piano dell'orbita di Marte non coincide con quello dell'ecclittica, ma ne differisce di  $1^{\circ} 51'$ .

Questa differenza obbliga il missile a trovarsi, nell'istante in cui ha luogo il passaggio, esattamente sul piano dell'ecclittica; giovandosi ad esempio delle proprietà della linea dei nodi, se le coincidenze nel moto dei due pianeti le consentono; oppure ricorrendo ad una correzione ottica ben determinata e prestabilita nello strumento di osservazione, che sarà del tipo del sestante.

Ciò sarà meglio illustrato nella Nota definitiva.

Aggiungo che dopo circa *sedici* settimane dalla partenza avrà luogo un fenomeno simile di opposizione Marte-Missile-Sole; che potrà consentire una seconda messa a punto della correzione cinetica.

**Geofisica.** — *Sugli schiacciamenti delle superficie isopicnotiche nell'interno della Terra.* Nota <sup>(\*)</sup> del Corrisp. GIOVANNI BOAGA.

Allo scopo di determinare la variazione della rigidità nell'interno del corpo terrestre, secondo la Teoria di Schweydar <sup>(1)</sup>, abbiamo scelto per funzione atta a fornire la variazione interna di densità, il trinomio

$$(1) \quad \rho = \rho_0 (1 - \beta \cdot a^2 + \gamma \cdot a^4)$$

dove  $\rho_0$  rappresenta la densità al centro del pianeta e  $\rho$  quella dello strato generico alla profondità  $P$ , essendo

$$a = \frac{R - P}{R}$$

con  $R$  raggio medio terrestre ( $R = 6371$  km).

Questa formula trinomia è già stata considerata da Helmert per altre ricerche <sup>(2)</sup>; noi abbiamo rideterminato i valori dei parametri  $\rho_0$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  assumendo a base dei calcoli i moderni valori:

a) 1/305,6 per il rapporto  $Q$  tra la differenza dei momenti di inerzia rispetto agli assi polare ed equatoriale ed il momento di inerzia rispetto all'asse polare;

b) 1/288,3 per il rapporto  $\varphi$  tra la forza centrifuga equatoriale e la gravità corrispondente;

c) 1/297 per lo schiacciamento  $\varepsilon_i$  dell'ellissoide internazionale di riferimento delle misure geodetiche;

d) 5,52 per densità media terrestre  $\Delta$  generalmente usato nei calcoli delle riduzioni topografiche e di Bouguer delle gravità osservate.

Questi quattro parametri sono fra loro legati dalle seguenti relazioni

$$6 \cdot Q \int_0^1 \rho a^4 \cdot da - (2 \varepsilon_i - \varphi) \cdot \Delta = 0 \quad , \quad \Delta - 3 \int_0^1 \rho a^2 \cdot da = 0.$$

Da queste e dalla (4) che segue, riferita alla superficie, si sono ottenuti i valori <sup>(3)</sup>

$$(2) \quad \beta = 0,901 \quad \gamma = 0,127 \quad \rho_0 = 10,74$$

a cui corrisponde il valore 2,45 per la densità superficiale, prossimo al valore 2,5 relativo alla densità media delle rocce componenti la crosta terrestre.

(\*) Presentata nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) G. BOAGA, *Ricerche sulla rigidità di un pianeta sollecitato da forze esterne con speciali ipotesi sulla distribuzione della densità*, «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», tomo XC, parte II.

(2) R. F. HELMERT, *Die Mathematischen und Physikalischen Theorieen Höheren Geodäsie*, II Parte, p. 474.

(3) G. BOAGA, *Sopra una formula trinomia considerata come ipotesi relativa alla distribuzione della densità nell'interno della Terra*, «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», tomo LXXXVIII, parte II.

Nell'interpo della Terra gli strati di eguale densità risultano approssimativamente di forma ellissoidica di rotazione; i relativi schiacciamenti  $\varepsilon$  sono legati alla funzione  $\rho$  ed al parametro  $a$  dalla celebre equazione di Clairaut,

$$(3) \quad \varepsilon + a \cdot \frac{d\varepsilon}{da} + \left( \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{da^2} - \frac{3\varepsilon}{\rho a^2} \right) \int_0^a \rho a^2 \cdot da = 0,$$

fondamentale nella Teoria dell'equilibrio di una massa fluida rotante <sup>(4)</sup>.

Con riferimento alla (1) l'integrale della (3) è dato - come è noto - dalla <sup>(5)</sup>

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{5}{2} \varphi \cdot \xi / \left\{ 2 \xi_{\text{r}} + \left( \frac{d\xi}{da} \right)_{\text{r}} \right\},$$

dove le funzioni munite dall'indice 1 si intendono calcolate per  $a = 1$  (strato superficiale);  $\xi$  risulta definito dalla serie

$$(5) \quad \xi = c_0 + c_1 a^2 + c_2 a^4 + c_3 a^6 + \dots$$

I coefficienti  $c_i$  della (5) sono fra loro legati dalle <sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} 35 c_1 - 4 \beta c_0 &= 0 \\ 35 s (2s + 5) c_s - 21 \beta \{ 2 + (s-1) \cdot (2s+7) \} c_{s-1} + \\ &+ 15 \gamma \{ 4 + (s-2) \cdot (2s+9) \} c_{s-2} = 0 \end{aligned}$$

con  $s = 2, 3, 4, \dots$ . Conseguentemente, dopo di avere posto  $c_0 = 1$ , che corrisponde alla condizione  $\lim_{a \rightarrow 0} \xi = 1$ , si traggono le

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{6}{35} \beta \\ c_2 &= \frac{13}{30} \beta c_1 - \frac{2}{21} \gamma \\ c_3 &= \frac{28}{55} \beta c_2 - \frac{19}{77} \gamma c_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

ed in generale:

$$c_s = \frac{3}{5} \cdot \frac{2s^2 + 5s - 5}{2s^2 + 5s} \cdot \beta c_{s-1} - \frac{3}{7} \cdot \frac{2s^2 + 5s - 14}{2s^2 + 5s} \cdot \gamma c_{s-2}.$$

Introducendo in questa i valori (2) e limitando i calcoli alla quarta cifra decimale, come è lecito in questa ricerca, si ottengono gli importi

$c_0 = 1,0000$	$c_5 = 0,0025$
$c_1 = 0,1544$	$c_6 = 0,0010$
$c_2 = 0,0482$	$c_7 = 0,0004$
$c_3 = 0,0173$	$c_8 = 0,0001$
$c_4 = 0,0065$	$c_9 = 0,0000$
	$\dots \dots \dots$

(4) Cfr. F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, Tome II, Chap. XIV: *Equilibre d'une masse fluide hétérogène*, p. 214.

(5) F. TISSERAND, loc. cit.

(6) G. BOAGA, Nota precedente, *Sopra* ecc.



In base a questi valori, quelli delle funzioni  $\xi$ ,  $(d\xi/da)$  per  $a = 1$ , risultano

$$\xi_1 = 1,2304 \quad \left( \frac{d\xi}{da} \right)_1 = 0,7016$$

e per la (4), la funzione atta a fornire gli schiacciamenti delle superficie ellissoidiche isopicnotiche nell'interno della Terra è

$$\varepsilon = \frac{1}{364,7} \{ 1 + 0,1544 \cdot a^2 + 0,0482 \cdot a^4 + 0,0173 \cdot a^6 + 0,0065 \cdot a^8 + \\ + 0,0025 \cdot a^{10} + 0,0010 \cdot a^{12} + 0,0004 \cdot a^{14} + 0,0001 \cdot a^{16} + \dots \}$$

dalla quale per lo schiacciamento centrale ( $a = 0$ ) risulta il valore

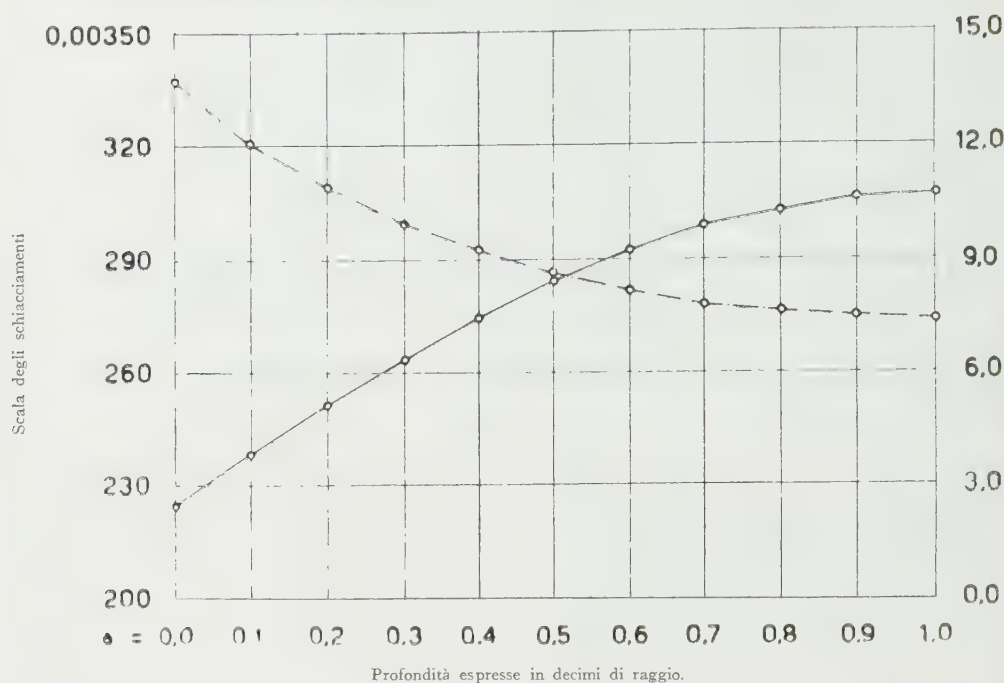
$$\varepsilon_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \varepsilon = \frac{1}{364,7}.$$

Consequentemente gli schiacciamenti delle superficie isopicnotiche interne risultano compresi fra i limiti  $1/364,7$  e  $1/297$ .

Nella tabella che segue sono riportati i valori delle densità interne e degli schiacciamenti delle superficie isopicnotiche, distribuite equamente dalla superficie al centro.

Profondità P	R — P	$a = \frac{R - P}{P}$	Densità	Inverso dello schiacciamento	Schiacciamento
0 km	6371 km	1,0	2,45	297	0,00337
637	5734	0,9	3,78	312	321
1274	5097	0,8	5,11	324	309
1911	4460	0,7	6,32	335	299
2548	3823	0,6	7,43	343	292
3185	3185	0,5	8,41	350	286
3823	2548	0,4	9,23	356	281
4460	1911	0,3	9,88	360	278
5097	1274	0,2	10,30	362	276
5734	637	0,1	10,64	364	275
6371	0	0,0	10,74	365	274

Si è ritenuto opportuno pubblicare i risultati di questa ricerca, perché si pensa che essi possano essere utili in taluni problemi geodetico-geofisici interessanti l'interno della Terra. I risultati numerici sopra scritti servono per il confronto fra i valori delle densità e degli schiacciamenti per i vari strati interni equidistanti.



L'andamento delle due funzioni e le loro variazioni con la profondità sono riprodotte nel grafico annesso, ove la curva a tratto continuo rappresenta le *densità*, mentre quella a tratto e punto, gli *schiacciamenti*.

Ci proponiamo estendere la ricerca in oggetto con riferimento a variazione discontinua della densità, partendo dai valori delle densità provenienti dalle ricerche analitico-numeriche del Bullen, basate sulle dromocrone sismiche.

**Geofisica.** — *Relazioni fra lente variazioni d'inclinazione e moti sismici in zona ad elevata sismicità.* Nota di PIETRO CALOI e MARIA CECILIA SPADEA, presentata (\*) dal Corrisp. PIETRO CALOI.

1. La previsione di un fenomeno richiede la perfetta conoscenza degli eventi che concorrono alla sua produzione e della successione cronologica di questi. In tale favorevole condizione si trova il fenomeno dell'eclisse e, con molta approssimazione, quello delle maree. Per altri, gli elementi in giuoco sono così complessi e di difficile valutazione da rendere precaria o addirittura impossibile una loro previsione, anche soltanto approssimativa. Fra questi ultimi, particolarmente ardua si presenta la previsione dei movimenti sismici, tanto da rendere anacronistico l'uso di questo termine a tale riguardo. Allo stato attuale delle nostre conoscenze, non sappiamo neppure se possiamo azzardarci a definire «premature» l'uso di questo vocabolo; perché ciò

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

potrebbe indurre qualcuno a ritenere che si nutra qualche speranza sulla soluzione di questo problema.

Ad ogni modo, qualche passo sulle vie d'approccio verso quella lontanissima meta è stato compiuto negli ultimi decenni. Specie in Giappone si sono occupati di siffatte ricerche, preoccupandosi soprattutto di cercare qualche legame fra lenti movimenti della crosta terrestre e i terremoti, che in essa hanno origine (si prescinde, naturalmente, dai terremoti profondi o profondissimi, con origine nell'astenosfera ed oltre). Qualche relazione è stata trovata, specie confrontando misure geodetiche di livellazione e di triangolazione, compiute prima e subito dopo un terremoto.

Anche mediante l'uso di clinografi è stato possibile trovare accostamenti fra moti gradualì della crosta e brusche rotture d'equilibrio. I casi considerati però lasciavano qualche dubbio sulla reale esistenza di una relazione da causa ad effetto, data la notevole distanza fra stazioni clinografiche e gli ipocentri attivi.

Il caso che ci apprestiamo ad esporre brevemente ha i caratteri di una insperata evidenza.

2. In un lavoro precedente, avevamo mostrato come il periodo sismico, verificatosi nella zona di Tolmezzo nell'aprile-maggio 1954, fosse stato preceduto da un lento moto di mutuo scorrimento degli strati lungo una superficie di frattura, individuata nella zona. La coppia di clinografi funzionanti in grotta, nei pressi di Tolmezzo, esauritosi quel periodo sismico, ha continuato a funzionare, senza registrare nulla di anormale, fino alla fine di settembre 1954. A cominciare dal 22 di questo mese, i clinografi iniziano la registrazione di una inclinazione graduale, dapprima in direzione nord, quindi decisamente verso ovest. L'inclinazione in questa direzione si è verificata particolarmente attiva dal 3 all'8 ottobre, per rivolgersi quindi nuovamente a nord. La fig. 1 dà una sintesi della deviazione registrata nel periodo accennato, riprodotta nelle sue componenti nella fig. 2. È in corrispondenza di questo nuovo cambiamento di inclinazione che si verifica la violenta scossa di terremoto, che ebbe ad allarmare vivamente la popolazione della zona la sera dell'11 ottobre. La fig. 3 dà l'estensione macrosismica del terremoto. Gli apparecchi della stazione sismica di Tolmezzo, ad una distanza ipocentrale di 10 Km ca., furono messi fuori funzione dalla violenza della scossa.

3. L'interesse del caso allo studio non si limita al constatato legame fra lento movimento d'inclinazione del terreno e susseguente violenta scossa sismica. È il modo come questo legame si manifesta inequivocabile e continuo che ne aumenta lo straordinario significato. Come si è detto, già altre volte, si è trovato – o si è creduto di trovare – qualche relazione fra lenti movimenti della crosta terrestre e terremoti. Si è trattato però, generalmente, di movimenti della crosta *causati* dal terremoto, e successivi a questo. I casi riferiti di movimenti precedenti non hanno mai presentato carattere di sufficiente

attendibilità, o non si sono, comunque, mai sottratti a più o meno serie obiezioni.

Il legame fra lento moto della crosta terrestre ed attività sismica si è manifestato subito, nel caso in discussione, stretto ed inconfondibile. Ciò è stato reso possibile dalla grande vicinanza della zona epicentrale alla stazione sismica di Tolmezzo e alle stazioni clinografiche dell'Ambiesta (nei pressi di Tolmezzo). A mano a mano che l'inclinazione verso W andava accentuandosi - quasi determinata da una spinta del terreno in lentissimo sollevamento ad est e a SE - cominciano a verificarsi le prime lievissime scosse di terremoto, registrate dai sismografi funzionanti a Tolmezzo. Le scosse, pur

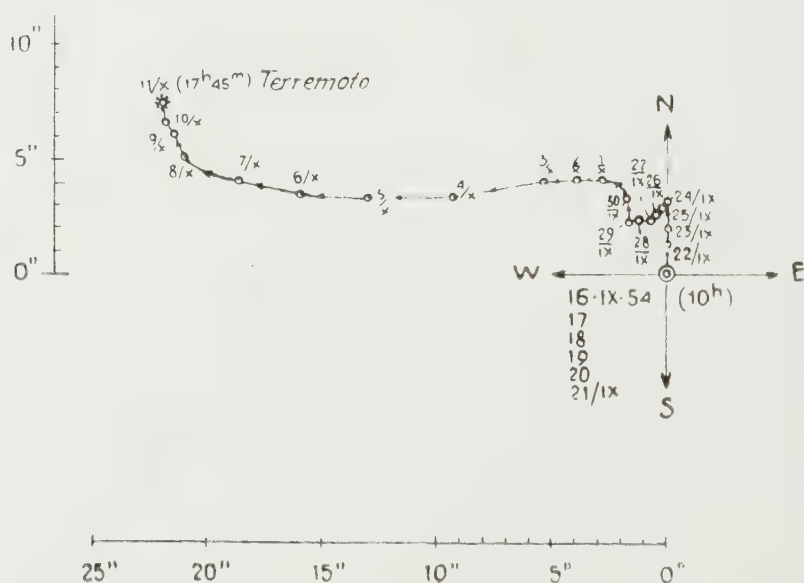


Fig. 1.

essendo tutte di carattere strumentale - inavvertite quindi dalla popolazione - sono andate via via facendosi più frequenti, a testimonianza delle tensioni crescenti nella zona in lento movimento dove, alle 17<sup>h</sup> 45<sup>m</sup> dell'11 ottobre, doveva poi verificarsi la violenta rottura d'equilibrio. Questa è stata quindi seguita da una serie, pressoché ininterrotta, di piccole scosse - tutte strumentali - di varia intensità, che hanno avuto il compito di esaurire le tensioni residue, nelle stratificazioni interessate dal terremoto.

La fig. 2 dà una rappresentazione schematica dell'andamento del fenomeno: in essa, con cerchietti aventi raggio proporzionale all'intensità (fatto uguale 22 mm il raggio del cerchio rappresentante l'intensità di  $10^{18}$  erg circa) sono rappresentate le scosse, registrate a Tolmezzo, mentre le due linee, contrassegnate dalle lettere N e W, rappresentano le registrazioni clinografiche, sintetizzate nella fig. 1. Data la ridotta sensibilità dei sismografi di Tolmezzo è da ritenere che il numero effettivo delle scosse stru-

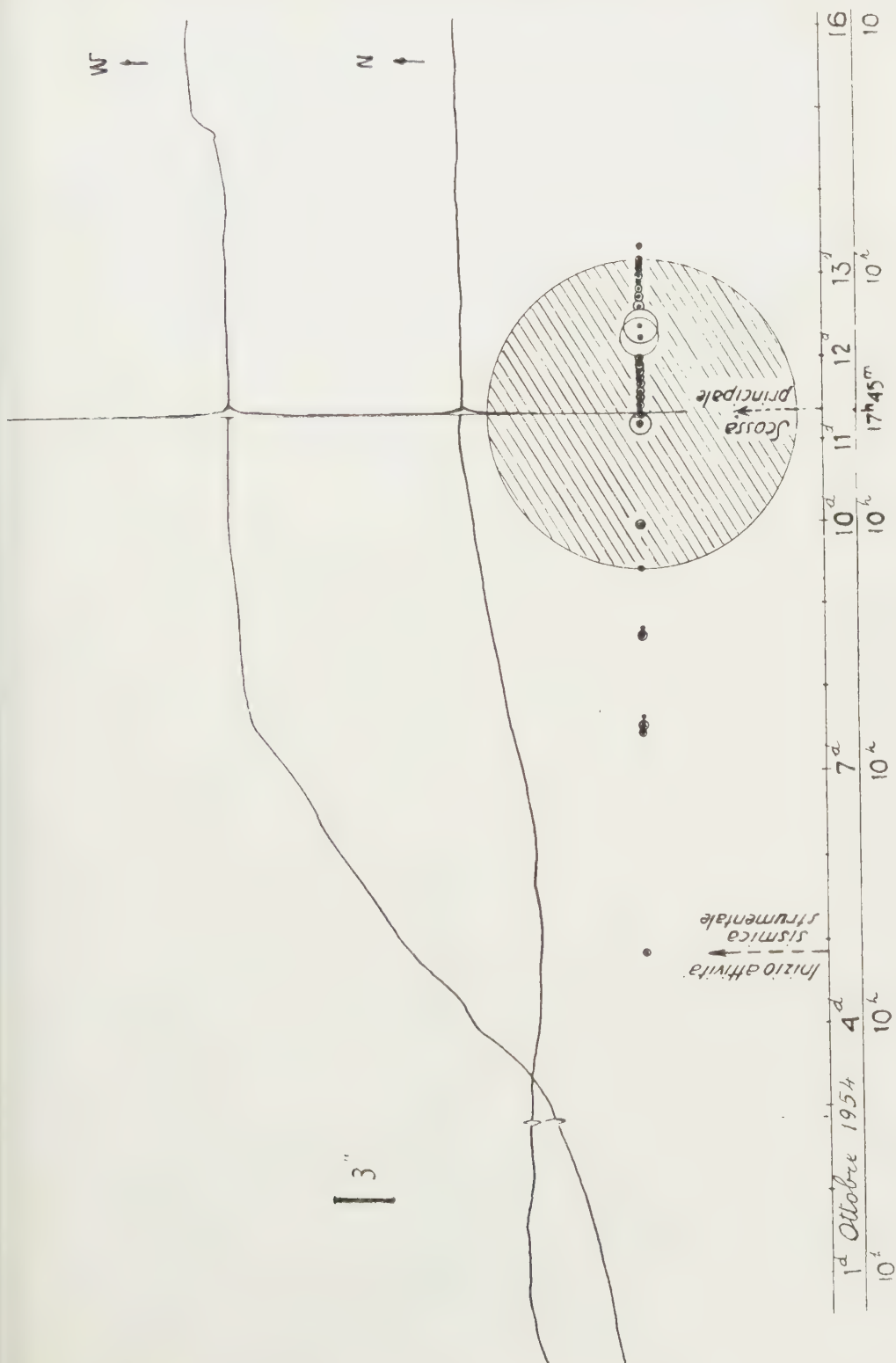


Fig. 2.



mentali, precedenti e susseguenti la scossa principale, debba essere stato ben più elevato. Ciò che conta mettere ancora una volta in evidenza è che l'attività sismica ha avuto inizio con l'accentuarsi della lenta inclinazione del suolo, rivelata dai fotoclinografi.

4. Abbiamo determinato l'energia approssimativa liberata dalle scosse registrate. La scossa principale, come si è detto, ha messo fuori funzione i

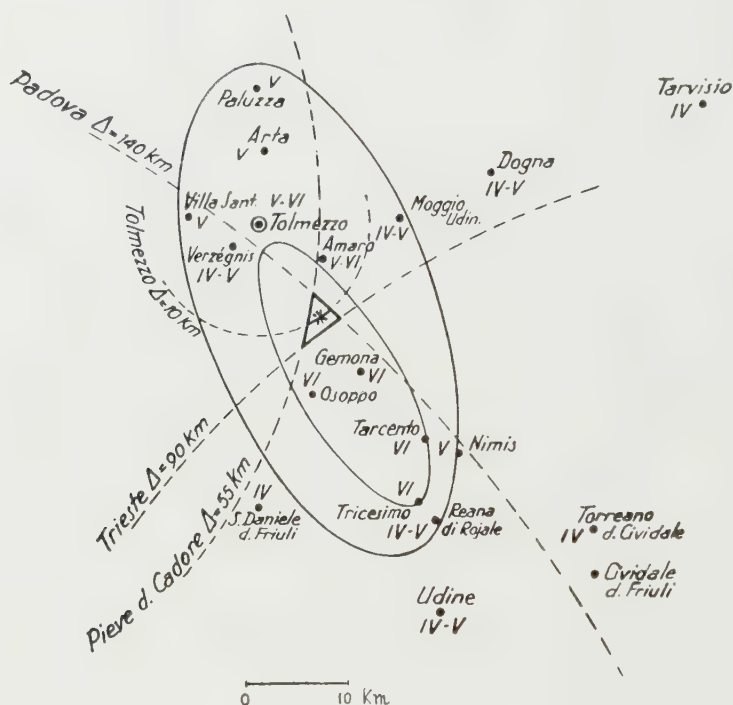


Fig. 3.

sismografi di Tolmezzo. La sua energia è stata determinata con le registrazioni ottenute a Pieve di Cadore e di Padova. Ci siamo serviti della formula

$$E = 4\pi^3 \rho v t \left( \frac{x}{T} \right)^2 \Delta^2, \quad \text{c. g. s.}$$

dove  $\rho$  è la densità del mezzo,  $v$  la velocità delle onde sismiche (longitudinali o trasversali),  $t$  la durata in secondi del treno d'onda considerato, alla distanza  $\Delta$ ,  $T$  il periodo e  $x$  l'ampiezza relativa.

Per la scossa principale un valore dell'energia può essere tratto anche dalla formula

$$\lg E = 11,7 + 3,2 \lg_{10} \left( \frac{r_l^2}{h} + h \right),$$

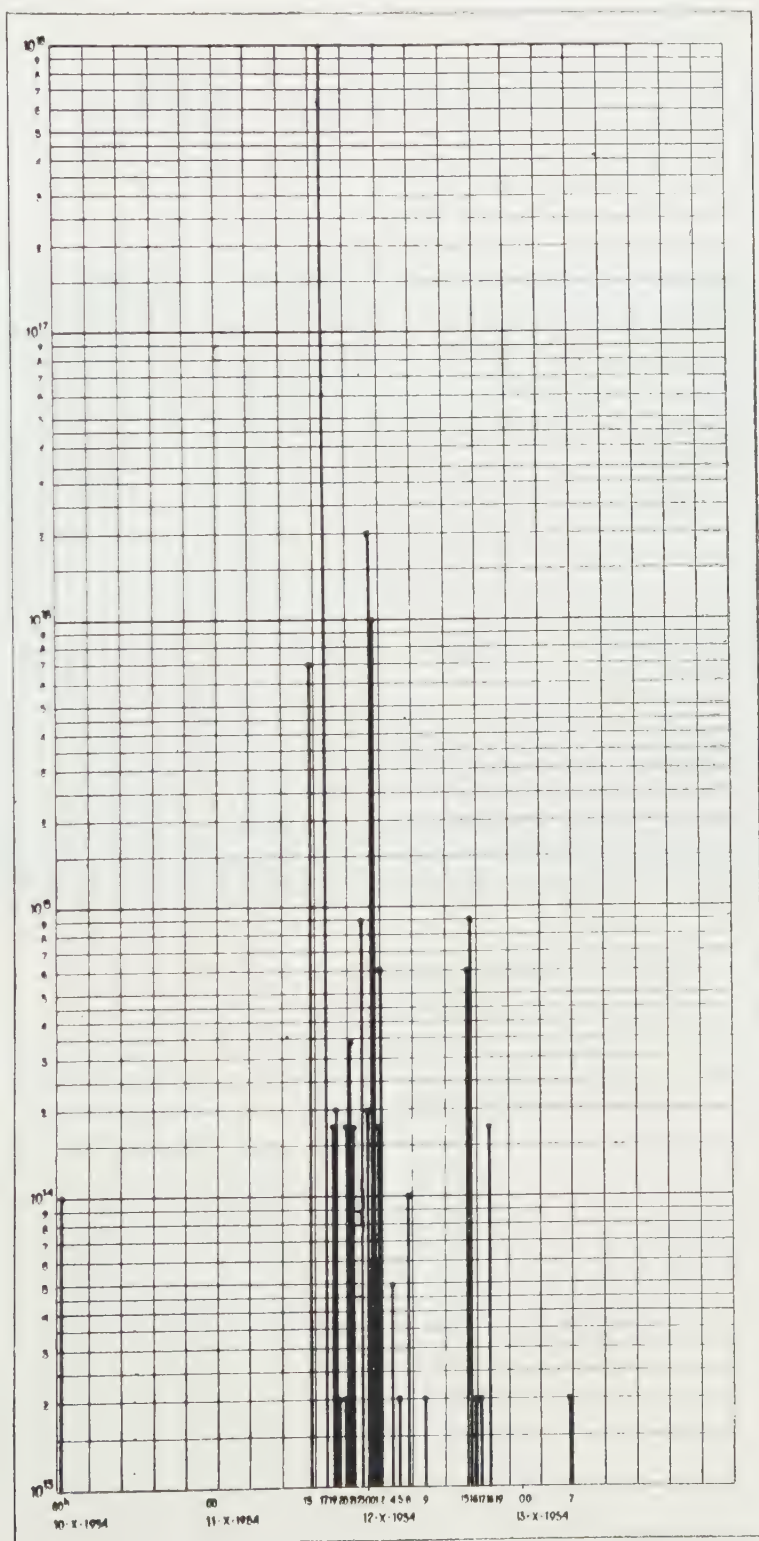


Fig. 4.

dove  $r_1$  è la distanza dall'epicentro al limite di percettibilità macrosismica ed  $h$  la profondità ipocentrale (nel caso specifico, inferiore a 10 Km).

La fig. 4 dà una rappresentazione sintetica delle energie sviluppate dalle scosse in questione.

La fig. 5 riproduce la registrazione della scossa principale, ottenuta a Pieve di Cadore.



Fig. 5.

5. Concludendo, l'esempio riportato non potrebbe essere più significativo, come prova dell'intima relazione fra graduali movimenti delle stratificazioni terrestri, sotto l'azione delle tensioni in esse agenti, e le brusche rotture d'equilibrio (terremoti) che queste tensioni possono alfine provocare. Poiché un caso analogo si era verificato qualche mese prima, nella zona in questione i due periodi sismici verificatisi dacché ivi funzionano i fotoclinografi, risultano entrambi *sorpresi* nella loro lenta fase di preparazione. Ci guardiamo bene, naturalmente, dal trarre da ciò azzardate illazioni; non possiamo però non sottolineare l'eccezionale interesse che il fenomeno presenta.

**Chimica biologica.** - *Trifosfotiamina cristallizzata*<sup>(\*)</sup>. Nota di A. ROSSI-FANELLI, N. SILIPRANDI, D. SILIPRANDI e P. CICCARONE, presentata<sup>(\*)</sup> dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Le ricerche sin'ora eseguite hanno dimostrato che la tiamina è presente nei tessuti animali e nei liquidi biologici o come tiamina libera o sotto forma di estere pirofosforico che, come è noto, rappresenta il coenzima della cocarbossilasi. Molto recentemente noi<sup>(1)</sup> abbiamo dimostrato per la prima volta la presenza nel fegato di animali da esperimento accanto alla tiamina libera (T) ed ai suoi esteri mono e difosforici (MPT, DPT) anche di un estere trifosforico (TPT)<sup>(2)</sup>. I nostri risultati sono stati confermati da Kiessling<sup>(3)</sup> il quale ha trovato questo estere anche nel lievito. L'interesse di questi risultati ci ha indotto a studiare le proprietà chimiche e biochimiche di questo nuovo composto della vitamina B<sub>1</sub>. Primo compito è stato quello di ottenere un prodotto sintetico assolutamente puro e possibilmente cristallizzato. Sulla preparazione del TPT esistono i lavori di Velluz e coll.<sup>(4)</sup> e Viscontini e coll.<sup>(5)</sup> i quali basandosi soprattutto sui dati delle analisi elementari hanno affermato di aver ottenuto dei composti puri. In un recente lavoro alcuni di noi<sup>(6)</sup> hanno elaborato un metodo cromatografico ed elettroforetico che permette la separazione e la determinazione quantitativa degli esteri fosforici della tiamina.

Esaminando con tali metodi i preparati di TPT ottenuti con i procedimenti proposti dagli autori sopra citati abbiamo potuto constatare che in nessun caso è possibile ottenere TPT puro, ma sempre una miscela in varie proporzioni degli esteri fosforici della tiamina (MPT, DPT, TPT e altri esteri superiori). Poiché i soli metodi chimici non ci hanno dato risultati soddisfacenti, abbiamo rivolto la nostra attenzione anche ad altri metodi; abbiamo cioè preparato per via chimica una miscela degli esteri fosforici della tiamina ed abbiamo poi separato il TPT puro impiegando la tecnica elettroforetica su colonna elaborata da alcuni di noi<sup>(6)</sup> per la individualizzazione degli esteri fosforici della tiamina e che abbiamo adattato opportunamente a scopo preparativo.

L'apparecchio impiegato in queste ricerche è essenzialmente quello ideato da Flodin e coll. per la separazione elettroforetica su colonna di cellulosa delle proteine<sup>(7)</sup> ed adattata alla separazione degli esteri fosforici della tiamina secondo suggerimenti degli stessi autori.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) A. ROSSI FANELLI, N. SILIPRANDI, P. FASELLA, « Science », **116**, 711 (1952).

(2) T = Tiamina; MPT = Monofosfotiamina; DPT = Difosfotiamina; TPT = Trifosfotiamina.

(3) K. H. KIESSLING, « Nature », **172**, 1187 (1953).

(4) L. VELLUZ, G. AMIARD, J. BARTOS, « Bull. Soc. Chim. », **15**, 871 (1948).

(5) M. VISCONTINI, G. BONETTI, P. KARRER, « Helv. Chim. Acta », **32**, 1478 (1949).

(6) D. SILIPRANDI, N. SILIPRANDI, « Biochim. Biophys. Acta », **14**, 52 (1954).

(7) P. FLODIN, J. PORATH, « Biochim. Biophys. Acta », **175**, 175 (1954).



Come tampone al posto dell'acetato di sodio, comunemente impiegato, abbiamo adoperato una soluzione di formiato di ammonio a pH 5,1 e 0,05 M. Questo tampone ha il vantaggio che può venire allontanato facilmente alla fine dell'esperienza. Su una colonna di polvere di cellulosa del diametro di  $50 \times 3,5$  cm vengono applicati 60 mg di una miscela di esteri fosforici della tiamina preparata con il metodo di Viscontini e coll. (loc. cit.) Dopo aver lasciato defluire 70 ml di solvente in modo che la miscela degli esteri discenda a circa metà della lunghezza della colonna (il *dead volume* della colonna è di 160 ml) si applica una corrente di 30 Am per 15 ore con il



Fig. 1. - Cristalli di TPT-cloruro.

catodo applicato all'estremità inferiore e l'anodo a quella superiore. Alla fine della corsa la colonna viene rimossa dall'apparecchio ed eluita usando lo stesso tampone di formiato. Le frazioni dei vari esteri vengono raccolte separatamente ed analizzate mediante elettroforesi su carta. La frazione corrispondente al TPT viene evaporata sotto vuoto spinto a temperatura inferiore a  $45^\circ$  fino a secchezza; in tal modo il tampone di formiato viene allontanato. Si riprende il residuo con 1 ml di acqua e si precipita il TPT con una miscela in parti uguali di acetone e di etere etilico. Se la sospensione assume aspetto colloidale basta generalmente acidificare con piccole quantità di HCl concentrato e lasciare in ghiacciaia per qualche tempo per ottenere la precipitazione del TPT. Si centrifuga e si ridiscioglie il precipitato in 1 ml di acqua, si riprecipita con miscela in

parti uguali di acetone ed alcool etilico assoluto. Acidificando con HCl concentrato e tenendo a bassa temperatura il TPT precipita in forma cristallina.

I cristalli di TPT si presentano come corti bastoncelli fortemente birifrangenti raggruppati a rosette come mostrano le microfotografie riportate nella fig. 1. Detti cristalli sono igroscopici e presentano un punto di fusione intorno a  $237^\circ$ - $239^\circ$ . La purezza del prodotto da noi ottenuto è stata controllata mediante analisi cromatografica ed elettroforetica ed analisi elementare.

Nella figura 2 riportiamo un esempio di cromatografia su carta eseguita sul composto da noi preparato. Da esso risulta chiaramente che il TPT da noi ottenuto è perfettamente omogeneo e privo di ogni altro estere fosforico della tiamina libera.

L'analisi elementare del composto ha dato i seguenti risultati:

calcolato:  $C_{12}H_{20}O_{10}N_4SP_3Cl \cdot H_2O$  (55.8)



calcolato:  $N = 10,90$  ;  $C = 25,95$  ;  $P_{(tot)} 16,63$  ;  $P_{(idr.) (a)} 11,08$

trovato:  $N = 10,75$  ;  $C = 25,70$  ;  $P_{(tot)} 16,40$  ;  $P_{(idr.)} 11,10$

I dati sperimentali trovati sono quindi in buon accordo con i dati teorici.

Sul TPT puro così ottenuto abbiamo eseguito alcune prove per studiare le proprietà chimiche e chimico-fisiche. Abbiamo seguito il comportamento spettrofotometrico nella U. V. di una soluzione preparata di fresco di TPT

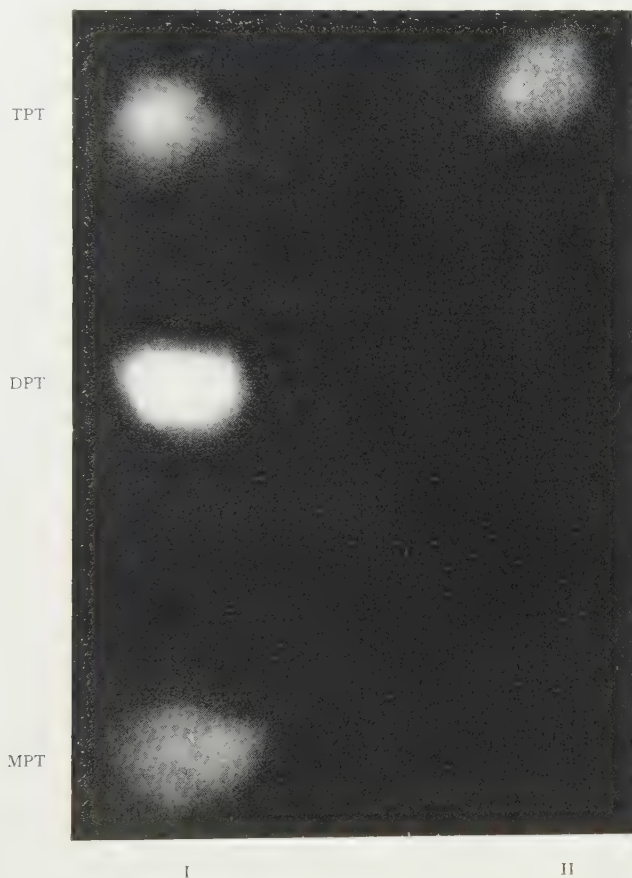


Fig. 2. - Separazione cromatografica degli esteri fosforici della tiamina.

Solvente: *n*-propanolo, tampone acetati N, acqua (65: 10: 25).

I = miscela di fosforilazione della tiamina (TPT + DPT + MPT).

II = TPT puro cristallino.

ed abbiamo osservato che questo composto presenta uno spettro di assorbimento praticamente eguale a quello della T, del MPT e del DPT.

È interessante notare che lo spettro di assorbimento nell'U. V. cambia notevolmente con il pH. Un simile comportamento è stato da noi osservato anche per il MPT, il DPT e la T. Sono state inoltre eseguite prove di elettrotitolazione, di stabilità in varie condizioni sperimentali, di attività biochimica come coenzima ecc.; i risultati di queste ricerche verranno pubblicati in un lavoro successivo.

**Mineralogia.** -- *Ricerche spettrografiche sulla scheelite di Traversella* (\*). Nota di MASSIMO FENOGLIO e GERMANO RIGAULT, presentata (\*\*) dal Corrisp. M. FENOGLIO.

La scheelite di Traversella, come del resto la scheelite dei più noti giacimenti mondiali di questa specie minerale, ha richiamato da tempo l'attenzione dei mineralisti e dei chimici, i quali ne indagarono a fondo la composizione chimica, che si rivelò ben presto particolarmente interessante per la presenza di elementi del gruppo delle terre rare; basterebbe ricordare i lavori di Bernoulli <sup>(1)</sup>, Horner <sup>(2)</sup>, Cossa <sup>(3)</sup>, Traube <sup>(4)</sup>, Colomba <sup>(5)</sup>, de Rohden <sup>(6)</sup>, Carobbi <sup>(7,8)</sup>, Servigne <sup>(9)</sup>, Marsh <sup>(10)</sup>. I metodi d'analisi impiegati furono di natura varia, andando dai metodi correnti dell'analisi chimica qualitativa a quelli fisici più sensibili, tipo i metodi spettroscopici basati sull'emissione diretta o quelli connessi con il fenomeno della fotoluminescenza e, assai più raramente, i metodi spettrografici.

Ci siamo perciò proposti di eseguire la ricerca sistematica per via spettrografica dei costituenti minori della scheelite di Traversella con particolare riferimento agli elementi delle terre rare, spinti a ciò fare dalla mancanza di un'analisi completa, poiché anche i dati più recenti si riferivano ad un metodo analitico connesso con il fenomeno della fotoluminescenza <sup>(11)</sup>, metodo questo presentante una sensibilità notevolissima per alcuni elementi, ma del tutto insufficiente per altri.

Questa ricerca intrapresa poté essere condotta nelle migliori condizioni, sia per il materiale sia per l'attrezzatura di cui potevamo disporre. Infatti lo studio venne eseguito su materiale tratto da una magnifica collezione di rari ed importanti esemplari, facente parte delle collezioni del Museo di Mineralogia annesso a questo Istituto, servendoci di un recentissimo impianto spettrografico, testé messo a punto nei laboratori dell'Istituto stesso.

Per la ricerca degli elementi più comuni è stata sottoposta all'analisi spettrografica direttamente la polvere ottenuta da un frammento di un cri-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Torino e Centro di Studio per la Petrografia del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) F. A. BERNOULLI, «Pogg. Ann.», *III*, 573 (1860).

(2) Ch. HORNER, «Chem. News», 28, 282 (1873).

(3) A. COSSA, *Ricerche chimiche e microscopiche su rocce e minerali d'Italia*, p. 283, Torino 1881.

(4) H. TRAUBE, «Neues Jahrbuch für Min. Geol. u. Pal.», Beil. Bd. VII, 232 (1891).

(5) L. COLOMBA, «Rend. Acc. Lincei», vol. XV, ser. 5<sup>a</sup>, 281 (1906).

(6) Ch. DE ROHDEN, «Compt. rend.», 159, 318 (1914).

(7) G. CAROBBI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XXXII, ser. 5<sup>a</sup>, 79 (1923).

(8) G. CAROBBI, «Gazz. Chim. Ital.», 54, 59 (1924).

(9) M. SERVIGNE, «Compt. rend.», 210, 440 (1940).

(10) J. K. MARSH, «J. Chem. Soc. London», 557 (1943).

(11) M. SERVIGNE, «Compt. rend.», 209, 210 (1939).

stallo di scheelite, di color giallo-miele, eccezionalmente puro; in prove successive sono stati utilizzati altri cristalli di scheelite scelti tra i più puri dei numerosi campioni facenti parte della collezione. Ciò per evitare che, sottoponendo la polvere del minerale a trattamenti chimici diversi, si potessero verificare inquinamenti dovuti ai reattivi impiegati ed alle impurezze in essi contenuti. Particolare cura fu posta nella preparazione dei vari campioni: la polverizzazione del minerale fu effettuata in mortai di agata, onde limitare al solo silicio le impurezze riconoscibili, e la polvere così ottenuta fu sottoposta ad un accurato esame microscopico onde assicurarsi della perfetta omogeneità del materiale preparato per l'analisi.

Per la ricerca invece degli elementi delle terre rare e del niobio e tantalio si è ritenuto necessario eseguire una preventiva concentrazione di questi, in relazione al fatto che molti di essi si supponevano presenti in concentrazioni inferiori al loro limite di sensibilità di riconoscimento, ulteriormente depressa, come di solito si verifica, dalle quantità considerevoli di altri elementi.

La separazione chimica <sup>(12)</sup> degli elementi delle terre rare fu effettuata decomponendo la polvere finissima del minerale con acido cloridrico in capsula di porcellana; si tirò poi a secco e si tenne la massa residua per alcune ore a 100°; indi si riprese con acido cloridrico diluito. L'acido wolframico, giallo, venne separato per centrifugazione ed accuratamente lavato con acqua addizionata di HCl onde evitare la formazione di pseudosoluzioni da parte di  $H_2WO_4$ ; la soluzione residua, addizionata dell'acqua di lavaggio, venne trattata a caldo con idrossido di ammonio e lo scarso precipitato ottenuto fu separato per centrifugazione e lavato; di poi riportato in soluzione con poco acido nitrico; infine, dopo parziale neutralizzazione, si aggiunse ossalato ammonico ed il precipitato degli ossalati delle terre rare, così ottenuto, venne separato, seccato e sottoposto all'analisi spettrografica.

La doppia precipitazione con idrossido d'ammonio prima e con ossalato ammonico dopo si rese necessaria per una buona purificazione finale, tenendo presente che necessariamente nel corso della separazione venivano introdotte varie impurezze sia da parte dei reattivi adoperati <sup>(13)</sup>, sia da parte dei recipienti.

Per maggior sicurezza vennero eseguite prove in bianco, condotte con le stesse quantità di reattivi e con lo stesso metodo testé accennato.

Per la separazione del niobio e del tantalio, si trattò il precipitato formato dall'acido wolframico, ottenuto nel corso della separazione delle terre rare, con idrossido di ammonio. Il residuo insolubile venne sottoposto nuovamente all'azione dell'acido nitrico e quindi, dopo aver tirato a secco, a quella dell'idrossido di ammonio. Il residuo, pur contenente ancora evidentemente scheelite non decomposta, venne sottoposto all'analisi spettrografica;

(12) R. J. MEYER e O. HAUSER, *Die chemische Analyse*, voll. 14-15, Stuttgart 1912.

(13) I prodotti usati in queste ricerche erano della Casa Merck, particolarmente puri. Purtroppo nei listini della Casa Johnson, Matthey, produttrice di sostanze spettrograficamente pure, non figurano i reattivi necessari nel corso di queste separazioni.

ci si limitò quindi ad un arricchimento del niobio e del tantalio, senza effettuare una separazione vera e propria di questi ultimi.

Ed ecco ora riassunti i principali dati sulle apparecchiature usate e su alcune condizioni generali di lavoro relative alle operazioni spettrografiche.

Spettrografo:

Gaertner L 254.

Caratteristiche generali sul sistema ottico (ottica in quarzo) <sup>(14)</sup>:

Diametro dell'obiettivo collimatore e dell'obiettivo della camera  
75 mm.

Lunghezza focale 1700 mm.

Lunghezza dello spettro (1900-8000 Å) 780 mm.

Prisma di Cornu: lunghezza della base 100 mm.

Generalità sull'impianto elettrico (gruppo convertitore motore-dinamo.  
Potenza KW 2,2):

Arco in corrente continua 200 V. 4-5 A.

Elettrodi:

Bacchette di ferro della Johnson, Matthey (J.M. 848).

Elettrodi supporto di carbone e di grafite:

Bacchette della Johnson, Matthey (J. M. 1 B) e della National Carbon Co.

Lastre e pellicole (in relazione alla regione spettrale fotografata):

Lastre Kodak IV-L U.V.

Lastre Ferrania Cappelli fotomeccaniche Ultra Contrasto Orto e Pancro.

Lastre Ferrania Cappelli ultra sensibili.

Pellicola Ferrania ultracromatica grana fina U. 2.

Pellicola Ferrania superpancro S. 2.

I vari campioni da analizzare venivano introdotti in un foro di mm. 4,5 di diametro e di mm. 2-3 di profondità praticato nel carbone funzionante da anodo. A mezzo di un diaframma di Hartmann a 5 finestre venivano fotografati nell'ordine, successivamente, i seguenti spettri con i sottoindicati tempi di posa:

1° spettro scala del ferro: 3''-5''; 2° spettro degli elettrodi + sostanza: 15'; 3° spettro degli elettrodi puri: 25''; 4° spettro degli elettrodi + sostanza: 25''; 5° spettro del ferro: 10''-15''.

La larghezza della fenditura dello spettrografo era di mm. 0,008.

Le lunghezze d'onda delle righe ultime od analitiche dei vari elementi sono state determinate per confronto con le righe dello spettro del ferro <sup>(15)</sup>

(14) Nello spettrografo Gaertner L 254 è intercambiabile un sistema ottico in vetro, comprendente un prisma di circa 100 mm. di base.

(15) A. GATTERER e J. JUNKES, *Arc Spectrum of Iron from 8388 to 2242 Å*, Specola Vaticana, Città del Vaticano, 1947.



sia usando un comparatore Cambridge sia, in special modo, adoperando un proiettore Fuess n. 118 H.

Per la ricerca delle righe analitiche sono state consultate tabelle riportate nei testi del Brode <sup>(16)</sup>, Scheibe <sup>(17)</sup>, Gerlach e Riedl <sup>(18)</sup>, Ahrens <sup>(19)</sup>, ma in particolar modo, ed in molti casi esclusivamente, quelle contenute nell'opera fondamentale di Gatterer e Junkes <sup>(20)</sup>.

L'esame degli spettrogrammi ottenuti nei vari casi, con la conferma derivante da ulteriori prove, ha portato ai seguenti risultati relativi alla ricerca analitica dei vari elementi. Sono stati ricercati direttamente nella polvere del minerale, con esito negativo, Al, Cr, Mn, Fe, Sn, Bi, elementi riportati invece nelle analisi di scheelite di giacimenti di talune altre località. Decisamente presenti Mo, Mg, in tracce Sr, in tracce minime Cu; il bario, già riscontrato per via spettroscopica <sup>(21)</sup>, è da ritenersi invece assente.

Per quanto riguarda Nb e Ta vennero confermati i risultati ottenuti da Carobbi <sup>(21)</sup> relativamente alla presenza di tenui quantità di niobio e di tracce di tantalio. E perciò anche i risultati dell'analisi spettrografica starebbero a documentare come nella scheelite di Traversella, contrariamente alle osservazioni di Carnot <sup>(22)</sup> su quella di Meymac, si trovi in quantità predominante il niobio e in tracce minime il tantalio; bisogna però ricordare che il limite di sensibilità del metodo spettrografico per il tantalio è discretamente basso.

Per gli elementi delle terre rare si giunse ai seguenti risultati: è stata accertata la presenza di Y, La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Dy, Yb, e l'assenza di Tb, Tu, Lu; in tracce minime Ho, Er. Sono stati pure ricercati con esito negativo Sc, Th.

In riferimento alle quantità relative dei vari elementi delle terre rare, non essendo per ora stato possibile effettuare un'analisi quantitativa rigorosa, si può soltanto riportare – basandoci sulle intensità relative delle varie righe dei singoli elementi – dei dati a carattere orientativo. Ad esempio per Pr e Nd si può concludere con sicurezza a favore della presenza di maggiori quantità di quest'ultimo. Si può inoltre affermare che l'elemento presente in tenori più sensibili è senza dubbio l'ittrio, che in quantità inferiori sono presenti Ce, Nd, Sm, Eu, Gd, Dy, Yb e in minor grado ancora La, Pr ed infine Ho, Er.

(16) W. R. BRODE, *Chemical Spectroscopy*, New York, 1952.

(17) G. SCHEIBE, *Chemische Spektralanalyse*, in *Physikalische Methoden der Analytischen Chemie*, vol. I, Leipzig, 1933.

(18) W. GERLACH e E. RIEDL, *Die Chemische Emissions-spektralanalyse*, vol. III, Leipzig, 1933.

(19) L. H. AHRENS, *Spectrochemical analysis*, Cambridge, 1950.

(20) A. GATTERER e J. JUNKES, *Atlas der Restlinien*, Specola Vaticana, Città del Vaticano, vol. I, 1937; vol. II, 1945; vol. III, 1949.

(21) G. CAROBBI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXXII, ser. 5<sup>a</sup>, 79 (1923).

(22) Ad. CARNOT, « Compt. rend. », 79, 637 (1874).



Questi risultati, in linea di massima, concordano con quelli ottenuti da Servigne<sup>(23)</sup> e da Marsh<sup>(24)</sup> mediante il metodo connesso con il fenomeno della fotoluminescenza, naturalmente nei limiti della differente sensibilità dei due metodi.

Per quanto riguarda poi l'abbondanza dei singoli elementi del gruppo delle terre rare (dal lantanio al lutezio), si può osservare come gli elementi a numero atomico pari siano presenti in quantità generalmente superiori, a quelle presentate dagli elementi a numero atomico dispari, i quali, in alcuni casi, risultano addirittura assenti. Ciò in stretto accordo con quanto già osservato sulla distribuzione e abbondanza di questi elementi nei vari minerali che li contengono, in relazione alla legge di Oddo e Harkins.

Rimane ancora da osservare come non vi sia una differenza netta tra l'abbondanza complessiva degli elementi delle terre ceriche e quella delle terre ittriche, come del resto fu già notato dal Carobbi (loc. cit.); possiamo quindi dedurre che non si è verificata alcuna differenziazione selettiva per i vari elementi dei due sottogruppi. E in riferimento alla suddivisione di Goldschmidt e Thomassen<sup>(25)</sup> dei vari minerali contenenti terre rare in sette diversi tipi, a seconda dell'abbondanza relativa dei singoli elementi, si può assimilare quindi il caso in esame con quello presentato dal tipo dell'yttrio-fluorite o dell'apatite, come spesso si verifica per quei minerali che contengono terre rare solo come costituenti accessori<sup>(26)</sup>.

Per spiegare la presenza di elementi del gruppo delle terre rare nella scheelite, Goldschmidt<sup>(27)</sup> propose un meccanismo consistente nella sostituzione di tre ioni  $\text{Ca}^{++}$  con due ioni trivalenti degli elementi di questo gruppo, in modo da mantenere la elettroneutralità: con ciò naturalmente rimarrebbero delle posizioni reticolari libere, distribuite statisticamente.

Però la presenza di Nb e Ta e la possibilità di sostituzioni isomorfe di questi elementi con W e Mo, già messe in evidenza da vari Autori<sup>(28)</sup>, possono suggerire un'altra ipotesi e cioè che si verifichi una sostituzione isomorfa coniugata fra le coppie  $\text{Ca}^{2+}-(\text{W}, \text{Mo})^{6+}$  e  $(\text{Y}, \text{La}, \text{Ce} \dots)^{3+}-(\text{Nb}, \text{Ta})^{5+}$ .

A conferma di questo modo di vedere stanno i valori assai prossimi dei raggi ionici degli elementi in questione, come risulta dalla seguente tabella (Goldschmidt 1926):

$\text{Nb}^{5+}$ 0,69 Å	$\text{Ta}^{5+}$ 0,71 Å	$\text{Mo}^{6+}$ 0,69 Å	$\text{W}^{6+}$ 0,69 Å
$\text{Ca}^{2+}$ 1,06 Å	$\text{Y}^{3+}$ 1,06 Å	$\text{La}^{3+}$ 1,22 Å	$\text{Ce}^{3+}$ 1,18 Å
$\text{Pr}^{3+}$ 1,16 Å	$\text{Nd}^{3+}$ 1,15 Å	$\text{Sm}^{3+}$ 1,13 Å	$\text{Eu}^{3+}$ 1,12 Å
$\text{Gd}^{3+}$ 1,11 Å	$\text{Tb}^{3+}$ 1,09 Å	$\text{Dy}^{3+}$ 1,07 Å	$\text{Ho}^{3+}$ 1,05 Å
$\text{Er}^{3+}$ 1,03 Å	$\text{Tu}^{3+}$ 1,01 Å	$\text{Yb}^{3+}$ 1,00 Å	$\text{Lu}^{3+}$ 0,99 Å

(23) M. SERVIGNE, «Compt. rend.», 210, 440 (1940).

(24) J. K. MARSH, «J. Chem. Soc. London», 577 (1943).

(25) V. M. GOLDSCHMIDT e L. THOMASSEN, «Vidensk. skr. I. Math.-nat. Kl.», n. 5 (1924).

(26) K. RANKAMA e Th. G. SAHAMA, *Geochemistry*, Chicago 1952.

(27) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemistry*, Oxford 1954.

(28) G. CAROBBI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XXXII, ser. 5<sup>a</sup>, 79 (1923).

D'altronde si potrebbe infine aggiungere che analoga interpretazione era già stata proposta da Goldschmidt e Peters <sup>(29)</sup> per spiegare la presenza dello scandio e del niobio e tantalio nella wolframite.

Concludendo, i risultati del nostro studio hanno consentito di documentare, mediante l'analisi spettrografica sistematica e completa, la presenza nella scheelite di Traversella di un numero notevole di elementi del gruppo delle terre rare, in parte già segnalati per altra via da alcuni Autori, in parte ricercati per la prima volta. Nel novero di questi ultimi sono da ricordare Yb, Ho, Tu e Lu, di cui i primi due con esito positivo, i due ultimi invece con esito negativo. Fra gli elementi comuni, è stata messa in evidenza la presenza in tracce minime del rame.

Ricorderemo infine la nuova interpretazione da noi formulata e testè accennata sul tipo di sostituzione degli ioni trivalenti degli elementi delle terre rare con quelli del calcio, interpretazione che avanza la possibilità di una sostituzione isomorfa coniugata fra le coppie  $\text{Ca}^{2+}-(\text{W}, \text{Mo})^{6+}$  e  $(\text{Y}, \text{La}, \text{Ce})^{3+}-(\text{Nb}, \text{Ta})^{5+}$ .

Del resto avremo agio di ritornare presto su questo argomento, non appena saranno ultimate le ricerche in corso sulla scheelite di altri giacimenti.

**Biologia.** — *Azione femminizzante di uova di Teleostei* <sup>(\*)</sup>. Nota di UMBERTO D'ANCONA, ARMANDO SABBADIN e GABRIELLA BURLINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In precedenti esperienze, D'Ancona e Sabbadin <sup>(1)</sup> hanno dimostrato che materiali gonadici di Teleostei, essiccati a vuoto, somministrati a larve di *Rana esculenta* per mezzo dell'acqua ambiente, sono in grado di alterare il differenziamento sessuale della gonade, almeno in alcuni individui: il materiale testicolare determinando inversione dell'ovario, probabilmente mediante stimolazione della medulla, il materiale ovarico femminizzando, direttamente o indirettamente, parte delle cellule germinali maschili.

In seguito a tale primo ciclo sperimentale, ci siamo proposti di vedere se l'azione estrogena e androgena potessero essere attribuite alle cellule germinali in se stesse o ad altri costituenti della gonade. È noto che a tale proposito esistono tuttora opinioni contrastanti e incertezze.

Per la gonade femminile la tesi prevalente è quella di Allen (1941), secondo la quale svariati elementi cellulari dell'ovario (della granulosa, tecali,

(29) V. M. GOLDSCHMIDT e C. PETERS, *Zur Geochemie des Scandiums*, « Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Klasse », III, IV, 257 (1931).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) U. D'ANCONA e A. SABBADIN, *Tentativi di deviazione sessuale in larve di Anfibi per mezzo di materiali gonadici adulti*, « Arch. Zool. Ital. », vol. 37, p. 405 (1952).

interstiziali e luteali) possono produrre azione estrogena, ma l'epitelio follicolare ne è la sorgente normale primaria.

Burrows (1949)<sup>(2)</sup> stima invece che non vi siano sicure prove che le cellule della granulosa rappresentino la sorgente dell'estrogeno. Selyè (1952)<sup>(3)</sup> ritiene che sia la teca che la granulosa partecipino alla produzione di ormoni follicoloidi.

È noto d'altra parte che estrogeni vengono prodotti anche fuori dell'ovario, nella placenta, nel testicolo, nelle capsule surrenali. Ne sono stati estratti inoltre da svariati invertebrati marini (Echinodermi, Crostacei) (Donahue) e da vegetali. A proposito di questi ultimi vanno ricordate le esperienze sugli estrogeni vegetali compiute in questo Istituto da Sabbadin e Mengarda<sup>(4)</sup>.

Più controversa ancora è la questione della produzione dell'ormone androgeno nella gonade maschile. Secondo Ancel e Bouin (1903-04) tale produzione ha luogo nelle cellule di Leydig del tessuto interstiziale, tesi che è stata appoggiata in seguito dalla maggior parte degli Autori (Steinach, Lipschütz, Courrier, Aron, Witschi, Levine e Hill, Moore, Benoit ecc.). In contrapposto a tale tesi, altri Autori e principalmente Diamare (1920)<sup>(5) (6)</sup> e Champy (1924)<sup>(7)</sup> hanno invece negato che vi siano prove sicure sull'origine interstiziale dell'ormone androgeno. Champy non ritiene necessario attribuire all'ormone un'origine cellulare specifica e ammette che anche gli spermatogoni partecipino a tale produzione. A questa opinione si associa il Padoa (1934)<sup>(8)</sup>. Harms (1926)<sup>(9)</sup> pure ammette una partecipazione sia delle cellule germinali che di quelle interstiziali all'attività endocrina. Altri infine (Stieve) negano al tessuto interstiziale qualsiasi partecipazione a tale attività.

Selyè (1952) riassumendo le conoscenze su questo argomento, ritiene tuttavia che i dati più probativi parlino a favore della produzione degli ormoni testoidi a livello delle cellule del Leydig. Per i Pesci questa tesi è stata affermata di recente da Potter e Hoar<sup>(10)</sup>.

Anche per gli ormoni androgeni è stata trovata una produzione extra-testicolare, così nell'ovario (Hill e Gardner 1936) e nelle surrenali (Lepinasse 1924), forse anche nella placenta.

(2) H. BURROWS, *Biological actions of sex hormones*, 2nd ed. Cambridge (1949).

(3) H. SELYÈ, *Trattato di Endocrinologia* (trad. ital.), Milano (1952).

(4) A. SABBADIN e G. MENGARDA, *Azione femminizzante di estratti vegetali sul differenziamento sessuale di Rana esculenta*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. 8<sup>a</sup>, volume 14, p. 153 (1952).

(5) V. DIAMARE, *Le armonie gonosomatiche*, «Arch. Ostetricia Ginecol.», ser. 2, vol. 8 (1920).

(6) V. DIAMARE, *Sessualità «intersesso» e la questione di un ormone interstiziale*, «Giorn. Assoc. Napol. Med. Nat.», Anno 1934, n. 4 (1935).

(7) CH. CHAMPY, *Les caractères sexuels considérés comme phénomènes de développement et dans leurs rapports avec l'hormone sexuelle*. Paris 1924.

(8) E. PADOA, *Ricerche sperimentali sulla sessualità nei polli*, «Arch. It. Anat. Embriol.», vol. 33, p. 242 (1934).

(9) J. W. HARMS, *Körper und Keimzellen*. Berlin 1926.

(10) G. D. POTTER e W. S. HOAR, *The presence of androgens in chum Salmon («Oncorhynchus keta» Wallbaum)*, «J. Fish. Res. Bd. Canada», vol. 11, p. 63 (1954).

Per verificare se effettivamente le cellule germinali producono ormoni sessuali ci siamo rivolti nuovamente ai Teleostei, sperimentando comparativamente l'azione della gonade in toto e quella degli elementi germinali emessi mediante spremitura, come si fa abitualmente per la fecondazione artificiale.

Mentre quasi tutti gli altri autori hanno sperimentato le azioni estrogene ed androgene usando quali tests Mammiferi e Uccelli, osservandone l'azione sull'apparato genitale esterno (ciclo estrale della vagina delle topine castrate) o sui caratteri sessuali secondari (cresta del cappone), noi abbiamo seguito il metodo già usato nelle precedenti ricerche, quello cioè di vedere l'azione ormonica sul differenziamento della gonade, e abbiamo usato quale test le larve di *Rana esculenta* della razza differenziata di Padova, particolarmente sensibile sotto tale punto di vista.

Le ricerche sono tuttora in corso e verranno sviluppate con successive esperienze. Nella presente Nota ci limitiamo a riferire in via preliminare su un interessante risultato, ottenuto in un primo allevamento.

A due lotti di 60 girini dell'età di 10 giorni, allevati ciascuno in 2 litri d'acqua, furono somministrati giornalmente 200 mg di ovario, rispettivamente di uova spremute, di *Salmo irideus*, essiccati a vuoto. L'acqua veniva cambiata ogni 4 giorni.

Fino all'età di 40 giorni alcuni esemplari venivano fissati ogni 5 giorni; poi il prelevamento fu sospeso fino alla metamorfosi, avvenuta circa all'età di 80 giorni. La mortalità fu trascurabile. L'accrescimento somatico non presentò differenze sensibili in confronto a quello di un allevamento di controllo tenuto in condizioni analoghe.

Nell'allevamento con ovario intero, su 42 esemplari esaminati a varie età, sono risultati sessualmente indifferenziati 10, femmine 16, maschi 16. Su 3 di questi ultimi si è notata una più o meno evidente azione femminizzante: presenza di ovociti in 2 di essi dell'età di 80 giorni, tratti di gonade che si differenziavano direttamente in senso femminile, accanto ad altri differenziati in senso maschile, in uno dell'età di 25 giorni.

Più dimostrativo è risultato l'allevamento con uova non fecondate. Su 48 esemplari esaminati, sono risultati indifferenti 3, femmine 21, maschi normali 12. Inoltre 12 maschi genetici hanno presentato più o meno accentuati aspetti di femminizzazione. Si va da una femminizzazione diretta di porzioni di gonade colpite prima dell'inizio del differenziamento sessuale, ad alterazioni secondarie in senso femminile di strutture testicolari già costituite, quali la comparsa di cavità ovarica e la formazione di nidi di gonociti femminili.

Questa esperienza dimostra che le uova vergini isolate di trota sono capaci di esercitare, sulle gonadi larvali di *Rana esculenta*, un'azione femminizzante che sembra esplicarsi in modo uguale a quello esercitato dall'ovarico in toto.

Quest'anno le esperienze verranno ripetute su materiale più abbondante, onde studiare più minutamente il meccanismo dell'inversione. Già dalle osservazioni fatte finora si può però vedere che sia le uova isolate che l'ovarico



intero esercitano una azione femminizzante simile a quella esercitata dagli ormoni estrogeni sintetici <sup>(11)</sup>.

Si può perciò ritenere che la femminizzazione da noi rilevata non sia dovuta ad una azione aspecifica dei materiali essiccati somministrati ai girini, ma che sia dovuta alla presenza nelle uova di ormoni estrogeni.

Per quanto ci consta, finora tale presenza è stata dimostrata per tutt'altra via soltanto da Donahue (1949) <sup>(12)</sup>. Estratti alcoolico-eteri di uova di 3 specie di Echinodermi, di 2 specie di Artropodi e di 3 specie di Teleostei, iniettati in ratte hanno dimostrato attività estrogena. Quella dimostrata dalle uova degli invertebrati usati è stata notevolmente più elevata che quella delle uova di Pesci. Estratti purificati di uova di *Homarus americanus* e di 2 specie di Pesci, hanno dimostrato, sia per via biologica che fluorimetrica, la presenza nell'astice di 1-3 unità internazionali di estrogeno per grammo di uova (peso umido), mentre nei Pesci soltanto di 2-3 unità per 100 grammi, vale a dire una quantità che l'autore giudica trascurabile.

Questi dati confortano la nostra opinione della presenza di estrogeni nelle uova di Pesci. Il nostro test, evidentemente più sensibile che quello delle topine, ha dato una prova più sicura per le uova di Pesci.

Resta a vedere se l'estrogeno viene prodotto dalle cellule follicolari e quindi ceduto alle uova, oppure se si origina direttamente in queste ultime.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Algebra.** — *Sulla definizione di corpo.* Nota di DAVIDE CARLO DEMARIA, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

1. In vari trattati <sup>(1)</sup> si definisce come corpo *un insieme di elementi C in cui esistano due operazioni di composizione interna, soddisfacenti alle seguenti proprietà:*

$I_1$ , *l'insieme C sia un modulo rispetto alla prima operazione: l'addizione;*

$I_2$ , *l'insieme C — 0 (cioè l'insieme che si ottiene da C togliendo lo 0, unità del modulo additivo) sia un gruppo rispetto alla seconda operazione: la moltiplicazione;*

$I_3$ , *la moltiplicazione sia distributiva tanto a sinistra che a destra rispetto all'addizione, cioè:*

$$x(y+z) = xy + xz \quad ; \quad (y+z)x = yx + zx \quad , \quad x, y, z \in C.$$

(11) E. VANNINI, *Organogénèse et déterminisme du sexe chez les Amphibiens et les Amniotes*, « Arch. Anat. Micr. et Morph. exp. », vol. 39, p. 295 (1950).

(12) J. K. DONAHUE, *Determination of natural estrogens in marine eggs by biological and fluorimetric procedures*, « Amer. J. Physiol. », vol. 159, p. 567 (1949).

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) Cfr. per esempio B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948), § 5, n. 16, p. 13; B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, vol. I (Berlino, Springer, 1930), § 5.



Prima di mostrare la sovrabbondanza delle condizioni  $I_1, I_2, I_3$ , mettiamo alcuni Lemmi.

LEMMA 1°. — *Se in un insieme  $J$  sono definite due operazioni (l'addizione e la moltiplicazione), tali che:*

$II_1$ ,  $J$  sia un gruppoide rispetto all'addizione,

$II_2$ ,  $J$  sia un gruppo rispetto alla moltiplicazione,

$II_3^s$ , valga la proprietà (che diremo quasi distributiva):

$$y(x + u) = yx + y \quad , \quad x, y \in J \quad (u = \text{unità del gruppo moltiplicativo}),$$

*allora la moltiplicazione è distributiva a sinistra rispetto all'addizione.*

Infatti:

$$\begin{aligned} z(x + y) &= z[y \cdot y^{-1}x + y] = z[y(y^{-1}x + u)] = (zy)(y^{-1}x + u) = \\ &= zy y^{-1}x + zy = zx + zy \quad (\text{c. d. d.}). \end{aligned}$$

Analogamente, dalla

$$II_3^d \quad (x + u)y = xy + y \quad , \quad x, y \in J,$$

si deduce la distributività a destra.

Alle  $II_3^s$ ,  $II_3^d$  possono sostituirsi rispettivamente le

$$II_3^{s'} \quad y(u + x) = y + yx \quad , \quad II_3^{d'} \quad (u + x)y = y + xy \quad , \quad x, y \in J.$$

LEMMA 2°. — *Se l'insieme  $J$  gode, oltre alle  $II_1, II_2, II_3^s$ , della seguente proprietà (che diremo quasi associativa):*

$$II_4 \quad u + (x + y) = (u + x) + y \quad , \quad x, y \in J,$$

*allora  $J$  è uno pseudo gruppo additivo.*

Applicando il Lemma 1° si trae che, nelle ipotesi del lemma 2°, risulta

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + xx^{-1}(y + z) = x[u + x^{-1}(y + z)] = \\ &= x[u + (x^{-1}y + x^{-1}z)] = x[(u + x^{-1}y) + x^{-1}z] = x(u + x^{-1}y) + \\ &+ z = (x + y) + z \quad (\text{c. d. d.}). \end{aligned}$$

La  $II_4$  può venir sostituita con una qualunque delle altre due proprietà quasiassociative:

$$\begin{aligned} II_4' \quad x + (u + y) &= (x + u) + y \quad , \quad x + (y + u) = (x + y) + u, \\ &x, y \in J. \end{aligned}$$

LEMMA 3° — (2). *Se l'insieme  $J$  è tale che:*

$III_1$ ,  $J$  sia un semigrupp additivo,

$III_2$ ,  $J$  sia un gruppoide moltiplicativo,

$III_3$ , la moltiplicazione sia distributiva tanto a sinistra che a destra rispetto all'addizione,

(2) Cfr. B. SEGRE, *Lezioni*, cit., vol. I, § 5, n. 17, p. 14; L. E. DICKSON, *Definitions of a group and a field by independent postulates*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1905, vol. 6, pp. 198-204.

III<sub>4</sub>, esista almeno un elemento tale che, se  $a \cdot ax = ay$ , segua  $x = y$ ,  
 $a, x, y \in J$ ;

allora l'addizione è commutativa <sup>(3)</sup>.

Calcolando nei due modi il prodotto  $(a + z)(x + y)$ , si ha infatti:

$$\begin{aligned} ax + ay + ax + ay &= ax + ax + ay + ay \rightarrow ay + ax = ax + ay \rightarrow \\ &\rightarrow a(y + x) = a(x + y) \rightarrow y + x = x + y, \quad x, y \in J. \end{aligned}$$

Dai lemmi 1° e 3° segue ora che:

Un insieme  $C$  risulta necessariamente un corpo, se soddisfa alle seguenti condizioni:

IV<sub>1</sub>,  $C$  sia un gruppo additivo,

IV<sub>2</sub>,  $C - 0$  sia un gruppo moltiplicativo ( $0 =$  lo zero, unità del suddetto gruppo additivo),

IV<sub>3</sub>, la moltiplicazione sia quasi distributiva rispetto all'addizione, cioè:

$$y(x + u) = yx + yu, \quad (x + u)y = xy + uy, \quad x, y \in C.$$

Infatti, a norma delle IV<sub>3</sub>, si ottiene:

$$x = ux = (0 + u)x = 0 \cdot x + x, \quad x \in C - 0$$

$$x = xu = x(0 + u) = x \cdot 0 + x,$$

$$0 = u0 = (0 + u)0 = 0 \cdot 0 + u \cdot 0,$$

donde si ricava:

$$IV_4 \quad 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \quad x \in C.$$

Le relazioni I<sub>3</sub>:  $x(y + z) = xy + xz$ ,  $(y + z)x = yx + zx$ ,  $x, y, z \in C$ , sono soddisfatte:

a) se  $x, y, z \in C - 0$ , in forza del lemma 1°;

b) se qualcuna tra le  $x, y, z$  è lo zero, in virtù delle IV<sub>4</sub>.

A norma del lemma 3° si ha che il gruppo additivo  $C$  è abeliano.

Dalle IV<sub>1</sub>, IV<sub>2</sub>, IV<sub>3</sub> derivano pertanto le I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, epperò  $C$  è un corpo; e poiché le condizioni IV sono meno forti delle I, resta pure stabilito la sovrabbondanza di queste ultime.

OSSERVAZIONE. - Alle IV<sub>3</sub> possono venire sostituite la IV<sub>4</sub> e la

$$IV'_3 \quad y(x + u) = yx + y, \quad (x + u)y = xy + y, \quad x, y \in C - 0.$$

2. TEOREMA. - Un insieme  $C$  di elementi qualsiasi risulta necessariamente un corpo, se in esso sono definite due operazioni di composizione: l'addizione e la moltiplicazione, soddisfacenti alle seguenti condizioni:

V<sub>1</sub>,  $C$  sia chiuso rispetto all'addizione, cioè  $C$  sia un gruppoide additivo;

V<sub>2</sub>,  $C$  sia chiuso rispetto alla moltiplicazione, cioè  $C$  sia un gruppoide moltiplicativo;

(3) Da questo lemma si deduce che:

Se non tutti gli elementi di un anello  $A$  sono nulli o divisori dello zero, cioè se esiste almeno un  $a \in A - 0$  tale che, per ogni  $x \in A - 0$ , risulti  $ax \neq 0$  oppure  $xa \neq 0$ , allora la commutatività dell'addizione segue dalle altre proprietà dell'ordinaria definizione di anello.

$V_3$ , la moltiplicazione sia associativa;  
esista almeno un elemento  $0$  (lo zero) tale che:

$$V_4 \quad 0 + 0 = 0,$$

$$V_5 \quad 0 \cdot 0 = 0;$$

$V_6$ , esista per l'insieme  $C - 0$  almeno un'unità moltiplicativa sinistra,  $u \neq 0$ ;

$V_7$ , esista per ogni  $x \in C - 0$  almeno un inverso moltiplicativo sinistro,  $x^{-1} \in C$ ;

$V_8$ , esista almeno un elemento  $-u$  inverso additivo sinistro di  $u$ , tale cioè che:

$$-u + u = 0;$$

$V_9$ , sussista la seguente relazione tra lo zero e l'unità moltiplicativa sinistra:

$$0 + u = u;$$

$V_{10}$ , valgano le proprietà quasidistributive:

$$a) \quad y(x + u) = yx + y, \quad x \in C, \quad y \in C - 0;$$

$$b) \quad (u + x)y = y + xy,$$

$V_{11}$ , valga per l'addizione la proprietà quasiassociativa:

$$u + (x + y) = (u + x) + y, \quad x, y \in C - 0.$$

Dividiamo la dimostrazione in varie parti A, B, ..., G.

A) Per le  $V_2, V_3, V_6, V_7, V_8, C - 0$  è un gruppo moltiplicativo. Innanzitutto per le  $V_8, V_{10}$ :

$$u \cdot 0 = u(-u + u) = -u + u = 0.$$

Ora, se per assurdo, esistessero delle  $x, y \in C - 0$ , tali che  $xy = 0$ , moltiplicando a sinistra per  $y^{-1} x^{-1}$  si avrebbe:

$$(y^{-1} x^{-1}) 0 = (y^{-1} x^{-1}) xy = u,$$

e di qui verrebbe:

$$u = (y^{-1} x^{-1}) 0 = (y^{-1} x^{-1}) (0 \cdot 0) = [(y^{-1} x^{-1}) 0] 0 = u \cdot 0 = 0,$$

in contraddizione con l'ipotesi  $V_6$ :  $u \neq 0$ .

$$B) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad x \in C - 0.$$

$$a) \quad x \cdot 0 = 0: \text{ragionando come in A};$$

$$b) \quad 0 \cdot x = 0:$$

invero, se fosse  $0 \cdot x = y$  ( $y \neq 0$ ), si avrebbe moltiplicando per un  $k$ -supposto esistente - che soddisfaccia alle  $k \neq 0$ ,  $k \neq u$ :

$$ky = k(0 \cdot x) = (k \cdot 0)x = 0 \cdot x = y \rightarrow k = u,$$

assurdo; che se poi  $C$  contenesse i due soli elementi  $0, u$ , la  $B_b$ ) si dimostra direttamente osservando che è ora necessariamente  $-u = u$ , onde

$$0 \cdot u = (u + u)u = u + u = 0.$$

$$C) \quad 0 + x = x \quad , \quad x \in C - 0.$$

Per le  $V_9, V_{10}, B$  risulta infatti:

$$x = xu = x(0 + u) = x \cdot 0 + x = 0 + x.$$

D) Esistenza, per ogni  $x \in C - 0$ , di un opposto (inverso additivo) sinistro,  $x \cdot (-u)$ .

Per le  $V_8, V_{10}, B$  si ha invero:

$$x \cdot (-u) + x = x(-u + u) = x \cdot 0 = 0.$$

E) La moltiplicazione è distributiva a destra rispetto all'addizione; cioè:

$$(x + y)z = xz + yz \quad ; \quad x, y, z \in C.$$

a) Se  $x, z \in C - 0$ , si dimostra la E con un ragionamento analogo a quello del lemma 1°.

b) Se  $0x = 0, 0z = 0$ , si verifica la E direttamente in virtù delle B, C.

F) Il gruppoide additivo è associativo, cioè:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad , \quad x, y, z \in C.$$

a) Se  $x, y, z \in C - 0$ , si può procedere come per la dimostrazione del lemma 2°, tenendo conto delle B, E.

b) Se  $x = 0$ , la F è verificata in virtù delle  $V_4, C$ .

c) Se  $y = 0, z \neq 0$ , dopo avere osservato che, per le  $V_8, V_9$ , risulta  $-u \neq 0$ , mostriamo intanto che:

$$(x + 0) + u = x + (0 + u).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} (x + 0) + u &= [x + (-u + u)] + u = \{[x + (-u)](+u)\} + u = \\ &= [x + (-u)] + (u + u) = x + [-u + (u + u)] = x + \\ &+ [(-u + u) + u] = x + (0 + u). \end{aligned}$$

Si procede poi come per il lemma 2°.

L'ultima parte della dimostrazione viene a cadere se  $u + u = 0$ ; ma in questo caso dalla  $(u + u) + u = u + (u + u)$  si ricava  $0 + u = u + 0 = u$ , donde, come in C,  $x + 0 = x$ , il che ci permette di stabilire la F pure nel sottocaso c.

d) Se  $z = 0$ , si procede come in c, ponendo  $z = -u + u$ .

G) Il gruppoide additivo è un gruppo.

Ciò segue dal complesso delle  $V_1, V_4, V_8, V_9, C, D, F$ .

Concludendo: le  $G, A, V_{10}, B$ , sono equivalenti rispettivamente alle condizioni  $IV_1, IV_2, IV_3, IV_4$ ; epperò C è un corpo.

3. Proveremo ora l'indipendenza delle condizioni elencate nel teorema del n. 2. Basterà dare esempi di insiemi che non sono corpi e che soddisfanno a tutte le  $V_i$  all'infuori di una (quella indicata in seguito tra parentesi).

(V<sub>3</sub>) I numeri di Cayley, generalizzazione dei quaternioni reali.

(V<sub>4</sub>) L'insieme 0, 1, con la seguente tabella per le operazioni di composizione:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 = 1 \quad , \quad 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad , \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 + 1 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 1 = 1. \end{array} \right.$$

(V<sub>5</sub>) L'insieme 0, 1, con la seguente tabella:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \quad , \quad 0 \cdot 0 = 1, \\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad , \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 + 1 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 1 = 1. \end{array} \right.$$

(V<sub>7</sub>) L'insieme J dei numeri interi relativi; in questo caso J — 0 è addirittura un semigruppato moltiplicativo.

(V<sub>8</sub>) L'insieme dei numeri razionali  $\geq 0$ .

(V<sub>9</sub>) L'insieme 0, 1 con la seguente tabella:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 = 0, \\ 0 + 1 = 0, \\ 1 + 0 = 1, \\ 1 + 1 = 1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 \cdot 1 = 1. \end{array}$$

(V<sub>10</sub> a) L'insieme 0, 1, — 1, con la seguente tabella:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \quad , \quad 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad , \quad x = 0, 1, -1, \\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad , \quad 1 \cdot (-1) = -1 \cdot 1 = -1, \\ 0 - 1 = 1 \quad , \quad -1 + 0 = -1 \quad , \quad 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1, \\ \pm 1 \pm 1 = 0, \end{array} \right.$$

La V<sub>10</sub> a non è verificata nel caso  $x = 0, y = -1$ ; risulta infatti:

$$-1 (0 + 1) \neq 0 - 1$$

in quanto i due membri valgono rispettivamente — 1 ed 1.

(V<sub>10</sub> b) L'insieme 0, 1 con la seguente tabella:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \quad , \quad 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 = 1 \quad , \quad 0 \cdot 1 = 1, \\ 1 + 0 = 1 \quad , \quad 1 \cdot 0 = 1, \\ 1 + 1 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 1 = 1. \end{array} \right.$$

La V<sub>10</sub> b non è soddisfatta, se  $x = 0, y = 1$ ; si ha infatti:

$$(1 + 0) \cdot 1 \neq 1 + 1,$$

ove i due membri valgono 1 e 0.



( $V_{II}$ ) L'insieme  $J - 0$  sia un gruppo non identico, in cui l'addizione sia così definita:

$0 + 0 = 0$  ,  $0 + x = x + 0 = x$  ,  $x + y = 0$  ,  $x, y \in J - 0$  ,  
ed inoltre si abbia

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

La  $V_{IO}$  è soddisfatta, in quanto, per ogni  $x, y \in J - 0$ , è:

$$(u + 0) x = x + 0 \rightarrow x = x \quad ; \quad x(0 + u) = 0 + x \rightarrow x = x;$$

$$(u + y) x = x + yx \rightarrow 0 = 0 \quad ; \quad x(y + u) = xy + x \rightarrow 0 = 0.$$

La  $V_{II}$  non è invece verificata, poiché, se  $x \neq u$ , risulta:

$$(x + u) + u \neq x + (u + u),$$

i due membri di questa relazione valendo rispettivamente  $u$  ed  $x$ .

**Scienza delle costruzioni.** — *Principio della minima energia elastica differenziale.* Nota di LEO FINZI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio G. KRALL.

È noto che nell'ambito dell'ordinaria teoria dell'elasticità il principio variazionale di Menabrea equivale e può sostituirsi alle equazioni indefinite di congruenza <sup>(1)</sup>. Se cioè il legame sforzi-deformazioni è del tipo

$$(I) \quad \xi_{rs} = C_{ikrs} p^{ik} \quad (2)$$

essendo  $\xi_{rs}$  il tensore di deformazione,  $p^{ik}$  il tensore degli sforzi,  $C_{ikrs}$  il tensore elastico, le equazioni indefinite di congruenza

$$(2) \quad \varepsilon^{rip} \varepsilon^{skq} \xi_{rs|ik} = 0 \quad (\varepsilon^{rip} \text{ è il tensore di Ricci})$$

valide per un generico continuo soggetto a deformazioni infinitesime, sono perfettamente equivalenti al principio variazionale di Menabrea. Questo afferma essere nulla la variazione dell'energia elastica di deformazione  $E$  conseguente ad una variazione di sforzo simmetrica e solenoidale nell'interno del volume  $\tau$  del continuo e nulla al contorno.

Contrassegnando con il simbolo  $\delta$  questo tipo di variazione, scriveremo pertanto:

$$(3) \quad \delta E = \delta \int_{\tau} \frac{1}{2} C_{ikrs} p^{rs} p^{ik} d\tau = 0.$$

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) P. LOCATELLI, *Sul principio di Menabrea*, « Boll. Un. Mat. It. », 1940.

(2) In questa formula e nelle successive gli indici assumono i valori 1, 2, 3 ed è sottinteso il segno di sommatoria rispetto agli indici che vengono saturati.

Analogamente una generalizzazione del principio di Menabrea equivale e può sostituirsi alle equazioni di congruenza indefinite e al contorno.

Se infatti attribuiamo alle forze superficiali  $f_i d\sigma$ , relative alla porzione vincolata  $\bar{\sigma}$  del contorno  $\sigma$ , una variazione  $\delta f_i d\sigma$  a risultante e a momento nullo e variamo gli sforzi  $p_{ik}$  in modo che la variazione dello stato di sforzo rispetti con le  $\delta f_i$  le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno, risulta

$$(4) \quad \delta_f \left[ E - \int_{\sigma} f^i g_i d\sigma \right] = 0.$$

In questa relazione  $g_i$  sono i cedimenti al contorno. Essi si intendono noti e indipendenti dalle  $f_i$ .

Nel caso particolare in cui sia  $g_i = 0$ , si ha dalla (4):  $\delta_f E = 0$ .

È questa la forma consueta del principio di Menabrea inteso come strumento determinatore di reazioni iperstatiche.

In questa Nota rivolgo la mia attenzione a continui soggetti a deformazioni infinitesime, per i quali il legame sforzi-deformazioni non è il semplice legame lineare omogeneo (1).

Rilevo come convenga classificare i vari legami che possono presentarsi per un generico continuo deformabile in due categorie: quella dei legami olonomi e quella dei legami anolonomi.

Per gli uni e per gli altri le equazioni indefinite di congruenza, fintanto che le deformazioni si possono ritenere infinitesime, come accade per i problemi che più da vicino interessano la Scienza delle Costruzioni, restano le (2). In questa Nota mostro come tali equazioni equivalgano volta a volta a formule e a principi variazionali di cui la (3) e la (4) costituiscono un caso particolare. In particolare mostro che per un generico legame anolonomo, sotto condizioni molto late, è possibile pervenire alla formulazione di un principio variazionale che può essere denominato della « minima energia elastica differenziale ».

Dal generico legame sforzi-deformazioni anolonomo traggio poi un legame più semplice, che ancora comprende però quelli proposti nelle più note teorie relative ai corpi elastoplastici senza incrudimento.

Mostro quale veste assumano in tal caso le formule variazionali generali proposte e il principio enunciato della minima energia elastica differenziale, facendone discendere infine, come casi particolari, alcuni noti principi delle teorie di Hencky, di Mises e di Prandtl-Reuss.

1. Un legame sforzi deformazioni molto generale è il seguente legame differenziale:

$$(5) \quad d\xi_{rs} = \mu_{ikrs} dp^{ik}$$

dove  $\mu_{ikrs}$  è un tensore quadruplo dipendente genericamente dallo stato di sforzo e da quello di deformazione, il quale, tenuto conto delle simmetrie

di cui godono il tensore degli sforzi e il tensore di deformazione, è caratterizzato da 36 componenti. Esse obbediscono ad altrettante relazioni del tipo

$$(6) \quad \oint_{j h p q} (\mu_{i k r s}, p^{i k}, \xi^{r s}) = 0$$

che per il loro ufficio possono dirsi le « condizioni di stato » del continuo.

Se l'espressione differenziale (5) è esatta, da essa si trae il seguente legame finito:

$$(7) \quad \xi_{rs} = \xi_{rs}(p^{ik}).$$

Diremo olonomo un tale legame sforzi-deformazioni.

Quando invece non sia possibile trasformare la (5) in una relazione del tipo (7), quando cioè la (5) non è una espressione differenziale esatta, diremo che il legame sforzi-deformazioni è anolonomo.

Ciò in analogia con quanto avviene nella meccanica ordinaria dove appunto i sistemi olonomi sono quelli per cui i vincoli limitano la posizione oltre che la mobilità, mentre i sistemi anolonomi sono quelli per cui i vincoli limitano soltanto la mobilità.

2. Per un continuo generico è sempre possibile tradurre le condizioni di congruenza indefinite e al contorno nelle due seguenti formule variazionali del 1° ordine deducibili dal principio dei lavori virtuali:

$$(8) \quad \int_{\tau} \xi_{ik} \delta p^{ik} d\tau = 0$$

$$(9) \quad \int_{\tau} \xi_{ik} \delta_f p^{ik} d\tau - \int_{\sigma} g_i \delta f^i d\sigma = 0.$$

Supponiamo olonomo il legame sforzi-deformazioni. È allora possibile esprimere nelle (8) e (9) il tensore di deformazione in termini di sforzo mediante le (7). Le (8) e (9) permettono così di addivenire, insieme alle equazioni di equilibrio, alla determinazione dello stato di sforzo. Quando poi esiste una energia di deformazione, quando cioè  $\frac{\partial \xi_{rs}}{\partial p^{rs}} = \frac{\partial \xi_{rs}}{\partial p^{ik}}$ , esse si traducono rispettivamente nei seguenti principi variazionali:

$$(10) \quad \delta F = \delta \int_{\tau} \varphi d\tau = 0 \quad \text{essendo} \quad \varphi = \int \xi_{ik} dp^{ik}$$

$$(11) \quad \delta_f \left[ F - \int_{\sigma} g_i f^i d\sigma \right] = 0.$$

La (10) è il noto principio della stazionarietà della seconda energia potenziale  $F$  ed equivale e può sostituirsi alle equazioni indefinite di congruenza <sup>(3)</sup>. La (11), che ho dedotto in maniera analoga, ne è l'estensione e sostituisce le equazioni di congruenza indefinite e al contorno nel caso di cedimenti vincolari noti e indipendenti dalle forze superficiali.

Tipici esempi di continui a legame sforzi-deformazioni olonomo, oltre al caso elastico ordinario per cui in particolare  $F = E$ , sono i continui quasi-elastici di Locatelli <sup>(4)</sup> e i corpi elastoplastici di Hencky <sup>(5)</sup>, a patto che per questi ultimi si escludano processi di scarico.

3. Per i continui a legame sforzi-deformazioni (5) anolonomo le formule variazionali (8) e (9) sono ancora vere e valide, ma incapaci di condurre alla determinazione dello stato di sforzo.

Sono invece efficienti le formule seguenti che traducono la congruenza dell'incremento di deformazione <sup>(6)</sup>:

$$(12) \quad \int_{\tau} d\xi_{ik} \delta p^{ik} d\tau = \int_{\tau} \mu_{ikrs} dp^{rs} \delta p^{ik} d\tau = 0$$

$$(13) \quad \int_{\tau} \mu_{ikrs} dp^{rs} \delta_f p^{ik} d\tau - \int_{\sigma} dg_i \delta f^i d\sigma = 0.$$

Queste però non sono traducibili in principi variazionali generali.

È possibile addivenirvi considerando, anziché la variazione dello stato di sforzo, quella dell'incremento dello stato di sforzo, ricorrendo cioè alle seguenti formule variazionali del 3° ordine:

$$(14) \quad \int_{\tau} \mu_{ikrs} dp^{rs} \delta dp^{ik} d\tau = 0$$

$$(15) \quad \int_{\tau} \mu_{ikrs} dp^{rs} \delta_f dp^{ik} d\tau - \int_{\sigma} dg_i \delta df^i d\sigma = 0.$$

Osserviamo infatti che la (5) può essere fatta coincidere con la (1) sostituendo  $d\xi_{rs}$  con  $\xi_{rs}$ ,  $dp_{ik}$  con  $p_{ik}$ ,  $\mu_{ikrs}$  con  $C_{ikrs}$  e che, come  $C_{ikrs}$  non dipende da  $\xi_{rs}$  e da  $p_{ik}$ , così  $\mu_{ikrs}$  dipende dallo stato di sforzo e di deforma-

(3) P. LOCATELLI, *Sulla congruenza delle deformazioni*, « Ist. Lombardo Sc. Lett. », vol. LXXIII, 1940.

(4) P. LOCATELLI, *Energie potenziali termodinamiche nell'equilibrio di continui elastoplastici*, « Rend. Acc. Italia », 1940.

(5) H. HENCKY, *Zur Theorie plastischer Deformationen*, « Zeitschr. ang. Math. Mech. », 1924.

(6) Non riporto per brevità la dimostrazione di queste formule, né quella della loro equivalenza alle equazioni di congruenza, anche perché esse si ottengono con trasformazioni di integrali analoghe a quelle usate da Locatelli a proposito del teorema di Menabrea.

zione, ma non dai loro incrementi. Allora col solo patto che sia  $\mu_{ikrs} = \mu_{rsik}$  le (14) e (15) possono essere trasformate nelle seguenti:

$$(16) \quad \delta_{(dp)} \int_{\tau} \frac{1}{2} \mu_{ikrs} dp^{rs} dp^{ik} d\tau = 0$$

$$(17) \quad \delta_{(df)} \left[ \int_{\tau} \frac{1}{2} \mu_{ikrs} dp^{rs} dp^{ik} d\tau - \int_{\sigma} dg_i df^i d\sigma \right] = 0$$

nelle quali  $\delta_{(dp)}$  significa variazione equilibrata dell'incremento dello stato di sforzo, simmetrica e solenoidale nel volume  $\tau$ , nulla al contorno;  $\delta_{(df)}$  significa invece variazione a risultante e momento nullo dell'incremento delle forze superficiali agenti sulla porzione vincolata del contorno e variazione dell'incremento dello stato di sforzo equilibrata insieme alla prima.

La (16) e la (17) traducono principi variazionali equivalenti e sostituenti le equazioni di congruenza indefinite e al contorno riguardanti l'incremento della deformazione.

La (16) in particolare afferma la stazionarietà (minimo) della formazione  $\int_{\tau} \frac{1}{2} \mu_{ikrs} dp^{rs} dp^{ik} d\tau$ .

Data l'analogia della (16) con la (3) propongo di chiamare il principio tradotto dalla (16) « principio della minima energia elastica differenziale » <sup>(7)</sup>.

Quanto alla (17) essa si presenta tutt'affatto analoga alla (4) e essa richiede per essere valida l'indipendenza degli incrementi di spostamento al contorno  $dg_i$  dai corrispondenti incrementi di forze superficiali.

4. Se, essendo  $a_{ik}$  il tensore fondamentale, poniamo:

$$(18) \quad \mu_{ikrs} = \mu \left( a_{ir} a_{ks} - \frac{1}{3} a_{ik} a_{rs} \right) + \nu_{ik} q_{rs}, \quad \nu_{ik} dp^{ik} = d\lambda,$$

il generico legame sforzi-deformazioni (5) si trasforma nel seguente:

$$(19) \quad d\eta_{ik} = \mu dq_{ik} + q_{ik} d\lambda.$$

La relazione ottenuta comprende come casi particolari i legami sforzi deformazioni posti alla base delle più importanti teorie dei corpi perfettamente plastici, cioè omogenei, isotropi, incompressibili e non soggetti ad incrudimento. Nella (19)  $q_{ik}$  è il deviatore degli sforzi,  $\eta_{ik}$  il deviatore della deformazione,  $\mu$  e  $\lambda$  sono parametri funzioni, genericamente, dello stato di sforzo e di deformazione.

Le 36 condizioni di stato (6) si riducono in questo caso a due sole: l'una è una relazione involgente  $\lambda$  e  $\mu$ , l'altra è la cosiddetta condizione di plasti-

(7) Si tratta effettivamente di un minimo, perché la variazione seconda dell'integrale che compare nella (16) è essenzialmente positiva, dato il suo carattere di lavoro diretto.



cità che si traduce, di norma, in soli termini di sforzo. Nella sua forma più generale essa, essendo nullo l'invariante lineare del deviatore degli sforzi, stabilisce un legame finito fra gli invarianti quadratico  $J_2$  e cubico  $J_3$  del deviatore degli sforzi. Le teorie più moderne e più note pongono la condizione di plasticità nella forma seguente:

$$(20) \quad J_2 = \frac{1}{2} q_{ik} q^{ik} = h^2$$

dove  $h$  è una costante caratteristica del continuo: la costante di plasticità.

La (20) differenziata si scrive:

$$(21) \quad q_{ik} \delta q^{ik} = 0.$$

La condizione di plasticità nella forma (21) deve essere verificata ovunque il corpo è plastico, tranne che nelle regioni per cui prende l'avvio un processo di scarico, dove cioè  $q_{ik} d\eta^{ik} < 0$ . A compensare l'inefficienza della relazione (21), viene però la considerazione che in queste regioni il corpo ridiviene elastico: la (19) deve conseguire cioè dall'ordinario legame (1).

Nella teoria di Mises la condizione di stato che va posta accanto alla condizione di plasticità (20) si limita ad affermare che  $\mu = 0$ , cosicché la (19) si riduce alla  $d\eta_{ik} = q_{ik} d\lambda$ ; nella teoria di Prandtl-Reuss la condizione di stato che va posta accanto alla condizione di plasticità (20) afferma che  $\mu = 1/2 G = \text{costante}$ ; nella teoria di Hencky, se si escludono processi di scarico, la condizione di stato che va posta accanto alla condizione di plasticità (20) afferma che  $\mu = \lambda$  e conseguentemente la (19) si riduce alla  $d\eta_{ik} = d(\lambda q_{ik})$ .

In quest'ultimo caso il legame sforzi-deformazioni è dunque essenzialmente il legame olonomo  $\eta_{ik} = \lambda q_{ik}$ , sicché valgono i principi variazionali (10) e (11).

Consideriamo allora un corpo costituito da una regione elastica  $\alpha$  e da una regione plastica  $\beta$ , separate da una superficie di frontiera  $\gamma$ . Nella regione plastica la variazione della densità di seconda energia  $\varphi = \int \lambda q_{ik} dq^{ik}$ , è:  $\delta\varphi = \lambda q_{ik} \delta q^{ik}$ . Questa variazione, se disciplinata dal rispetto della condizione di plasticità (21), è identicamente nulla. Nella regione elastica la variazione della densità di seconda energia coincide invece con quella dell'energia di deformazione.

Ne segue, per la (10), che se attribuiamo allo stato di sforzo del continuo elastoplastico una variazione solenoidale e simmetrica all'interno del volume, nulla al contorno e rispettosa della condizione di plasticità (21), risulta semplicemente stazionaria l'energia elastica di deformazione della parte elastica  $\alpha$  del continuo: è questo il noto principio di Haar-Karman<sup>(8)</sup> valido per i corpi elastoplastici di Hencky.

(8) HAAR-KARMAN, *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*, «Goettinger Nachr. Math. Phys. Kl.», 1909.

Corrispondentemente al legame (19) e alla condizione di plasticità (21), le formule variazionali del 2° ordine (12) e (13) si scrivono:

$$(22) \quad \int_{\tau} (\mu dq_{ik} + q_{ik} d\lambda) \delta q^{ik} d\tau = \int_{\tau} \mu dq_{ik} \delta q^{ik} d\tau = 0$$

$$(23) \quad \int_{\tau} \mu dq_{ik} \delta f q^{ik} d\tau - \int_{\sigma} dg_i \delta f^i d\sigma = 0.$$

Adottando in particolare la teoria di Mises, per cui  $\mu = 0$ , la (22) è identicamente soddisfatta, mentre la (23) perde il primo integrale e traduce il noto principio di Hill del massimo lavoro plastico <sup>(9)</sup>.

Il principio enunciato della minima energia elastica differenziale (16) dà luogo invece alle due seguenti relazioni:

$$(24) \quad \delta_{(dp)} \int_{\tau} \frac{1}{2} \mu dq^{ik} dq_{ik} d\tau = 0$$

$$(25) \quad \delta_{(df)} \left[ \int_{\tau} \frac{1}{2} \mu dq^{ik} dq_{ik} d\tau - \int_{\sigma} dg_i df^i d\sigma \right] = 0.$$

Adottando in particolare la teoria di Prandtl-Reuss per cui  $\mu = 1/2 G = \text{costante}$ , esse si riducono al noto principio di Greenberg <sup>(10)</sup>.

**Astronomia.** — *Orbita della stella binaria A.D.S. 10188.* Nota I di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il satellite, del sistema binario A.D.S. 10188 ha pressoché compiuto una intera rivoluzione intorno all'astro principale, da quando si cominciò ad osservarlo. Infatti, il Dembowski che l'aveva scoperto, trovava nel 1869,74 per l'angolo di posizione  $\vartheta$  il valore di  $132^{\circ},7$ , mentre Baize nel 1954,66 assegnava a  $\vartheta$  il valore di  $161^{\circ},0$ ; vale a dire, dal 1869 al 1954, il satellite (che si muove in senso antiorario), ha percorso circa  $330^{\circ}$  della sua orbita. Malgrado ciò e le numerose osservazioni esistenti sul sistema in questione, pochi sono stati gli astronomi che ne hanno determinato gli elementi orbitali; forse per il fatto che l'orbita più recente, trovata da Van Biesbroeck nel 1925 <sup>(1)</sup>, rap-

(9) R. HILL, *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*, «Q. J. Mech. Appl. Math.», 1948.

(10) H. J. GREENBERG, *Complementary minimum principles for an elastic-plastic material*, «Q. Appl. Math.», 1949.

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) Cfr. «Pubbl. Yerkes», V, 1, 233 (1927).

presenta ancora abbastanza bene le osservazioni moderne. C'è da notare però, che gli scarti  $O - C$ , fra le posizioni osservate e quelle calcolate, sono per gli ultimi anni generalmente positivi; inoltre, tenendo presente l'esiguo arco che il satellite deve ancora percorrere per riprendere la posizione del 1869, il periodo di rivoluzione appare minore di quello dato dal Van Biesbroeck.

Sulla base di queste considerazioni, ho ripreso in esame l'orbita del satellite intorno all'astro principale, usufruendo a tale scopo anche delle osservazioni posteriori al 1925, gentilmente fornitemi dal prof. P. Müller dell'Osservatorio Astronomico di Strasburgo. Le misure anteriori a tale data, sono ovviamente tratte dal « Gen. Catalogue of Double Stars » del Burnham e dal « New Gen. Cat. of Double Stars » dell'Aitken.

2. Ho ridotto tutte le osservazioni all'equinozio del 1950,0 applicando a ciascuna la correzione  $\Delta\vartheta = -0^{\circ},00723 (1950,0 - t)$ . Servendomi poi delle coordinate  $\vartheta$  (anomalia) e  $\rho$  (raggio vettore), prese rispetto alla stella principale, ho disegnato le posizioni apparenti assunte dal satellite durante gli anni di osservazione ed ho tracciato l'ellisse che meglio rappresentasse le posizioni stesse e che è espressa dalla seguente equazione:

$$(1) \quad 0,00768 x^2 + 0,01208 xy + 0,01347 y^2 + 0,07734 x + 0,02020 y - 1 = 0.$$

Col metodo di Glasenapp <sup>(2)</sup>, ho poi ricavato i seguenti elementi orbitali:

$$\Omega = 144^{\circ},4 \quad ; \quad i = \pm 120^{\circ},1 \quad ; \quad \omega = 148^{\circ},9 \quad ; \quad e = 0,441 \quad ; \quad a'' = 0'',92;$$

dove i simboli rappresentano rispettivamente, la posizione del nodo, l'inclinazione del piano dell'orbita, la posizione del periastro, l'eccentricità e il semi-asse maggiore dell'orbita.

Per avere infine il periodo di rivoluzione  $P$ , ed il tempo  $\tau$  del passaggio al periastro, ho disegnato la curva rappresentante l'andamento dei valori di  $\vartheta$  in funzione del tempo  $t$ , e da essa ho tratto i seguenti luoghi normali:

$t$	$\vartheta$	$t$	$\vartheta$	$t$	$\vartheta$
1878,0	114°,3	1908,0	293°,5	1938,0	178°,9
1888,0	40°,0	1918,0	241°,4	1948,0	166°,4.
1898,0	329°,5	1928,0	199°,2		

Per ciascuno di questi valori - partendo dagli elementi orbitali ora trovati - ho cercato l'anomalia media  $M$ ; e poiché  $M$  è legata al tempo del passaggio al periastro  $\tau$  ed al moto medio annuo  $n = 360^{\circ}/P$  (dove  $P$  è il periodo in anni) dalla nota formula:  $M = n \cdot (t - \tau)$ , ho determinato quei valori di  $n$  e  $\tau$  che meglio rappresentassero gli angoli  $M$  calcolati. Ho ottenuto in tal modo:

$$\tau = 1895,11 \quad ; \quad n = 3^{\circ},0061 \quad ; \quad P = 119,7 \text{ anni.}$$

(2) Cfr. ARMELLINI, *Astronomia Siderale*, vol. II, p. 439 e sgg.

3. Per migliorare l'orbita, ho poi considerato *diciotto posizioni* del satellite distribuite lungo l'orbita percorsa e tratte direttamente dalle osservazioni; però per alcuni anni e cioè il 1892, 1895, 1899, 1929, 1935, 1941, 1946, 1949 (per cui esistono numerose osservazioni), ho eseguito le medie ponderate, tenendo conto per ciascuna misura, del numero delle notti di osservazioni su cui poggiava.

Ad ogni luogo normale ho poi assegnato un peso con il seguente criterio: poiché in genere ogni astronomo ha osservato per tre notti, ho dato peso 1 alle posizioni determinate da un solo astronomo, peso 2 a quelle dovute a due o tre astronomi, peso 3 alle osservazioni dovute a più di tre astronomi, e peso 4 a quelle che in particolare fossero state eseguite in un grande numero di notti.

Nella seguente Tabella I, riporto i luoghi normali considerati; oltre l'angolo  $\vartheta$  ed il raggio vettore  $\rho$ , è dato in radianti lo scarto  $\Delta\vartheta$  fra l'angolo osservato e quello calcolato con gli elementi orbitali ora trovati ed infine il peso assegnato a ciascuna posizione.

TABELLA I.

$t$	$\vartheta$ (eq. 1950,0)	$\rho$	$\Delta\vartheta$ (radianti)	peso	$t$	$\vartheta$ (eq. 1950,0)	$\rho$	$\Delta\vartheta$ (radianti)	peso
1869,74	132°,12	0'',91	— 0,00233	1	1915,49	250°,15	0'',46	— 0,00116	2
1877,00	116 ,27	0 ,66	— 0,05614	1	1921,45	226 ,39	0 ,50	+ 0,09483	4
1882,47	99 ,41	0 ,42	— 0,02879	1	1925,46	208 ,22	0 ,61	+ 0,03636	3
1892,53	355 ,65	0 ,45	— 0,04276	2	1929,52	196 ,37	0 ,64	+ 0,02792	2
1895,45	339 ,99	0 ,50	+ 0,00931	2	1935,37	182 ,66	0 ,88	— 0,00902	2
1899,38	325 ,04	0 ,55	+ 0,04887	3	1941,53	173 , 61	1 ,01	— 0,01396	4
1903,57	308 ,56	0 ,58	+ 0,03695	3	1946,46	167 ,67	1 ,06	— 0,02210	2
1908,26	292 ,30	0 ,52	+ 0,09076	3	1949,52	165 ,56	1 ,12	— 0,00698	3
1911,66	275 ,72	0 ,46	+ 0,08843	3	1954,66	161 ,03	1 ,17	— 0,00844	1

Ciò posto, ricordiamo che chiamando con  $\Delta\Omega$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta\omega$ ... ecc. le correzioni infinitesime da apportare agli elementi, onde la somma dei quadrati degli scarti divenga minima, e sostituendo per comodità di calcolo, le tre quantità  $\Delta\tau$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta e$ , con le quantità  $\Delta\tau'$ ,  $\Delta n'$ ,  $\Delta e'$ , ad esse legate da note formule, il metodo <sup>(3)</sup> di Hellerich, dà la seguente equazione che collega le correzioni  $\Delta\Omega$ ,  $\Delta i$ ... ecc. con gli scarti  $\Delta\vartheta$ :

$$(2) A_k \Delta\Omega + B_k \Delta i + C_k \Delta\omega - \beta_k C_k \Delta\tau' + \beta_k C_k (t_k - \tau) \Delta n' + \alpha_k C_k \Delta e' = \Delta\vartheta_k.$$

(3) Cfr. ARMELLINI, opera citata.

In essa i coefficienti sono facilmente calcolabili, alcuni direttamente, altri dalle tavole <sup>(4)</sup> dello Schlesinger.

Dopo avere perciò calcolate le diciotto equazioni del tipo (2), le ho ridotte al sistema normale con il metodo dei minimi quadrati, ottenendo il seguente sistema di equazioni normali:

$$(3) \quad \begin{array}{rcccccccc} 42,0 \Delta\Omega + 6,623 \Delta i - 45,612 \Delta\omega + 16,552 \Delta\tau - 252,885 \Delta n' - 19,788 \Delta e' = + 1,03533 \\ + 17,584 \quad - 7,260 \quad + 0,260 \quad - 63,042 \quad + 0,634 \quad = - 0,33470 \\ \quad \quad + 58,573 \quad - 19,300 \quad + 347,746 \quad + 29,415 \quad = - 1,51741 \\ \quad \quad \quad + 8,436 \quad - 94,493 \quad - 9,034 \quad = + 0,51364 \\ \quad \quad \quad \quad + 2645,711 \quad + 231,173 \quad = - 11,59351 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 23,906 \quad = - 1,35452. \end{array}$$

Ho risolto il sistema e sono passata dai valori di  $\Delta\tau'$ ,  $\Delta n'$ ,  $\Delta e'$  ai valori di  $\Delta\tau$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta e$  ed ho ottenuto infine

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta\Omega = 2^{\circ},0 & \Delta i = 0^{\circ},7 & \Delta\omega = -1^{\circ},3 & \Delta\tau = -0,55 \\ \Delta e = -0,057 & \Delta n = 0^{\circ},2606: \end{cases}$$

onde gli elementi definitivi dell'orbita del satellite della ADS 10188 sono

$$(I) \quad \Omega = 146^{\circ},4; \quad i = \pm 120^{\circ},8; \quad \omega = 147^{\circ},6; \quad e = 0,384; \quad \tau = 1894,56; \quad P = 110,25.$$

Per avere ora la correzione da apportare al semiasse maggiore  $a$ , sono partita dalla nota formula che ci dà il raggio apparente  $\rho$  in funzione di  $a$  e da cui derivando rispetto ad  $a$  si ottiene subito

$$(5) \quad \Delta a = \frac{a \Delta \rho}{\rho}.$$

Calcolati con gli elementi orbitali migliorati i valori di  $\rho$ , e paragonati con quelle osservati, otteniamo i valori di  $\Delta\rho$  e quindi per ogni misura una equazione del tipo (5). Eseguendo tale calcolo per tutti i luoghi normali - tenendo sempre conto del loro peso - ho risolto ancora col metodo dei minimi quadrati le diciotto equazioni ottenute, avendo infine:

$$\Delta a = -0'',04$$

da cui ho ricavato  $a'' = 0''88$ .

Ora gli elementi trovati da Van Biesbroeck sono i seguenti:

$$(II) \quad \Omega = 144^{\circ},7; \quad i = \pm 117^{\circ},4; \quad \omega = 149^{\circ},8; \quad e = 0,420; \\ a'' = 0'',91; \quad \tau = 1895,40; \quad P = 119,9$$

essendo il periodo  $P$  sempre misurato in anni.

Come si vede, gli elementi (I) da me trovati, si discostano alquanto dagli elementi (II) dati dal Van Biesbroeck; il divario maggiore è nella determinazione del periodo, che - come era da aspettarsi - è risultato essere minore di quello del Van Biesbroeck.

(4) Cfr. SCHLESINGER, *The determination of the orbit of a spectroscopic binary ... ecc.*, « Publ. of Allegheny Observatory », vol. I, n. 6.



**Astronomia.** — *Gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci e l'effetto di longitudine.* Nota di MARIA CRISTINA BALLARIO, presentata (\*) dal Socio G. ABETTI.

In una Nota precedente <sup>(1)</sup> riguardante le caratteristiche fisiche e spaziali delle stelle ad alta velocità peculiare, cioè liberata dal moto del Sole, si era giunti alle seguenti conclusioni:

a) gli apici delle stelle veloci presentano due direzioni preferenziali: essi, cioè, si addensano prevalentemente in due zone indicate per brevità con  $K_1$  e  $K_2$ . La prima si estende da  $l = 135^\circ$  a  $l = 210^\circ$  di longitudine galattica e da  $b = +38^\circ$  a  $b = -30^\circ$  in latitudine; la seconda si estende da  $l = 270^\circ$  a  $l = 345^\circ$  in longitudine e da  $b = +30^\circ$  a  $b = -30^\circ$  in latitudine.

Tali limiti si riferiscono agli apici delle stelle veloci tratte dal Catalogo pubblicato da G. Miczaika <sup>(2)</sup> e sono leggermente variabili al variare del materiale che si considera e specialmente al variare del limite inferiore di velocità che viene adottato, come risulta dalla Nota <sup>(1)</sup> sopracitata;

b) un esame più approfondito di queste due correnti ha rivelato la esistenza di un effetto di longitudine che risulta evidente dai dati riportati in Tabella I. Si ha infatti che se si dividono le stelle appartenenti alla corrente  $K_2$  in tre sottogruppi, ciascuno dei quali contiene le stelle i cui apici sono compresi in intervalli di circa  $25^\circ$  di longitudine, e si determinano le velocità medie peculiari,  $W_m$ , delle stelle di ciascun sottogruppo, risulta che tale velocità media cresce al decrescere della longitudine galattica degli apici.

TABELLA I.

*Effetto di longitudine.*

Corrente $K_2$			Corrente $K_1$		
sottogruppi $+30^\circ \geq l \geq -30^\circ$	$W_m$	numero stelle	sottogruppi $+38^\circ \geq l \geq -30^\circ$	$W_m$	numero stelle
$270^\circ \leq l \leq 295^\circ$	153 km/sec	47	$135^\circ \leq l \leq 159^\circ$	92 km/sec	55
$296^\circ \leq l \leq 320^\circ$	104 km/sec	54	$160^\circ \leq l \leq 184^\circ$	113 km/sec	102
$321^\circ \leq l \leq 345^\circ$	89 km/sec	54	$185^\circ \leq l \leq 210^\circ$	113 km/sec	80

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) M. C. BALLARIO, *Caratteristiche fisiche e spaziali di stelle con  $V \geq 40$  km/sec. - Effetto di longitudine per un gruppo di stelle veloci*, «Mem. S.A.I.», vol. XXIV, 3, 1953 e «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XIV, fasc. 2, 1953.

(2) G. MICZAIKA, *Die Sterne grosser Geschwindigkeit*, «A.N.», Bd. 270, 1940.

Per la corrente  $K_1$  i risultati sono più incerti come appare dalla stessa tabella. In questo caso si può dire soltanto che le velocità medie maggiori competono ai sottogruppi con apice a longitudine maggiore.

La Tabella I contiene i risultati ottenuti prendendo in esame le stelle date nel Catalogo di G. Miczaika nel quale sono comprese 555 stelle veloci fino alla grandezza 10,8 e con velocità  $\geq 63$  km/sec, ma risultati del tutto analoghi sono stati ottenuti considerando un materiale assai differente e cioè le 406 stelle con grandezza fino a 5,5 e con velocità  $\geq 40$  km/sec, riportate nella Tabella II della Nota <sup>(1)</sup> sopracitata.

Allo scopo di giungere ad una possibile interpretazione dell'effetto di longitudine si è pensato, come primo passo, di prendere in considerazione gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci per vedere quale corrispondenza esistesse fra questi elementi e l'effetto di longitudine.

Tale ricerca ci è stata notevolmente facilitata dalla pubblicazione del Catalogo compilato da K. Schütte <sup>(3)</sup> e contenente gli elementi orbitali di 1026 stelle con parallasse  $\geq 0'',030$ . Gli elementi orbitali calcolati in questo lavoro debbono considerarsi, come premette l'autore, soltanto come elementi osculatori e affetti da imprecisioni dovute alle varie ipotesi semplificatrici adottate. Viene infatti supposto che il Sole percorra un'orbita circolare rispetto al centro della galassia con velocità di 268 km/sec e che le stelle percorrano orbite kepleriane. Questi elementi possono tuttavia essere molto utili per ricerche statistiche.

Il catalogo comprende, tra altri, i valori di:  $a$  = semiasse maggiore,  $e$  = eccentricità,  $v$  = anomalia vera,  $U$  = periodo,  $V$  = velocità orbitale galattica, per stelle con  $\pi \geq 0'',030$ .

Tutte le considerazioni che seguiranno si riferiscono perciò esclusivamente a stelle aventi per limite inferiore delle parallassi il valore suddetto.

Dal catalogo di K. Schütte abbiamo quindi estratto tutte le stelle in comune con il catalogo di G. Miczaika ed appartenenti alle due correnti  $K_1$  e  $K_2$ . Suddivise queste stelle nei sei sottogruppi considerati nella Tabella I, in dipendenza cioè della longitudine galattica dei loro apici, si sono dedotti i valori medi degli elementi orbitali per ciascun sottogruppo, come si vede sotto  $b)$  e  $d')$  nella seguente Tabella II; gli scarti medi sono, in generale, molto piccoli.

Da questa risulta che per le stelle della corrente  $K_2$  l'effetto di longitudine, cioè l'aumento della velocità peculiare media di ciascun sottogruppo col decrescere della longitudine, si traduce in una diminuzione dei valori medi del semiasse maggiore, dell'anomalia vera, del periodo e della velocità orbitale galattica, mentre il valor medio dell'eccentricità cresce al decrescere della longitudine degli apici.

(3) K. SCHÜTTE, *Galaktozentrische Bahnelemente von 1026 Fixsternen in der nächsten Umgebung der Sonne*, «Sitzber. Österreichischen Acad. der Wiss. Math.», Abt. II<sup>a</sup>, 161 Bd. 9 und 10 Heft, 1952.

Per la corrente  $K_1$ , che pure presenta un effetto di longitudine meno definito, si ha una dipendenza del tutto analoga (ma in senso contrario) fra la variazione della velocità peculiare e la variazione degli elementi orbitali galattici.

TABELLA II.

gruppi	$a_m$	$e_m$	$v_m$	$U_m$	$V_m$	$W_m$	$l_m$	num. stelle
a)								
$0^\circ \leq l \leq 135^\circ$	1,31	0,307	19°	1,52	295 km/sec	84 km/sec	97°	13
$345 \leq l \leq 360$								
b) corrente $K_1$								
$135 \leq l \leq 159$	1,01	0,355	113	1,01	268 »	89 »	150	16
$160 \leq l \leq 184$	0,81	0,449	144	0,73	233 »	94 »	172	31
$185 \leq l \leq 210$	0,71	0,505	162	0,60	205 »	96 »	196	31
c)								
$210 \leq l \leq 270$	0,67	0,569	182	0,55	182 »	100 »	240	29
d) corrente $K_2$								
$270 \leq l \leq 295$	0,71	0,524	197	0,60	205 »	105 »	284	17
$296 \leq l \leq 320$	0,87	0,363	226	0,82	245 »	93 »	308	21
$321 \leq l \leq 345$	1,06	0,286	262	1,09	274 »	89 »	331	19

Il numero di stelle preso in esame è piuttosto piccolo perché la limitazione delle parallassi a  $\pi \geq 0'',030$  ci ha costretti ad escludere dal conteggio numerose stelle. Perciò si è ritenuto opportuno eseguire analoga ricerca prendendo in esame un diverso materiale, considerando cioè le stelle del nostro catalogo di Nota<sup>(1)</sup>. I risultati ottenuti su 92 stelle (fra queste 22 sono in comune con il materiale precedentemente considerato) danno un andamento concordante con quello sopra trovato.

Ci è parso infine interessante esaminare i valori medi degli elementi orbitali galattici relativi alle stelle veloci i cui apici cadono fuori delle zone di corrente cioè tra  $210^\circ \leq l \leq 270^\circ$  e tra  $345^\circ \leq l \leq 135^\circ$  e i risultati si trovano pure nella Tabella II, come si vede sotto a) e c).

Infine in fig. 1 sono poste in ascisse le longitudini galattiche (in alto) e in particolare sono segnate (in basso) le longitudini medie degli apici delle stelle di ciascuno dei vari sottogruppi considerati nella Tabella II, e in ordinate rispettivamente i valori medi di  $a$ ,  $e$ ,  $v$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  calcolati per ciascun sottogruppo.

L'esame dei dati e dei grafici ci permette di dire che questa preliminare ricerca delle relazioni intercorrenti fra l'effetto di longitudine e gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci, ci ha portati alla conoscenza di una dipendenza della posizione media degli apici dagli elementi orbitali, secondo l'andamento dato in fig. 1, ciò che, per quanto ci risulta, è per la prima volta messo in evidenza.

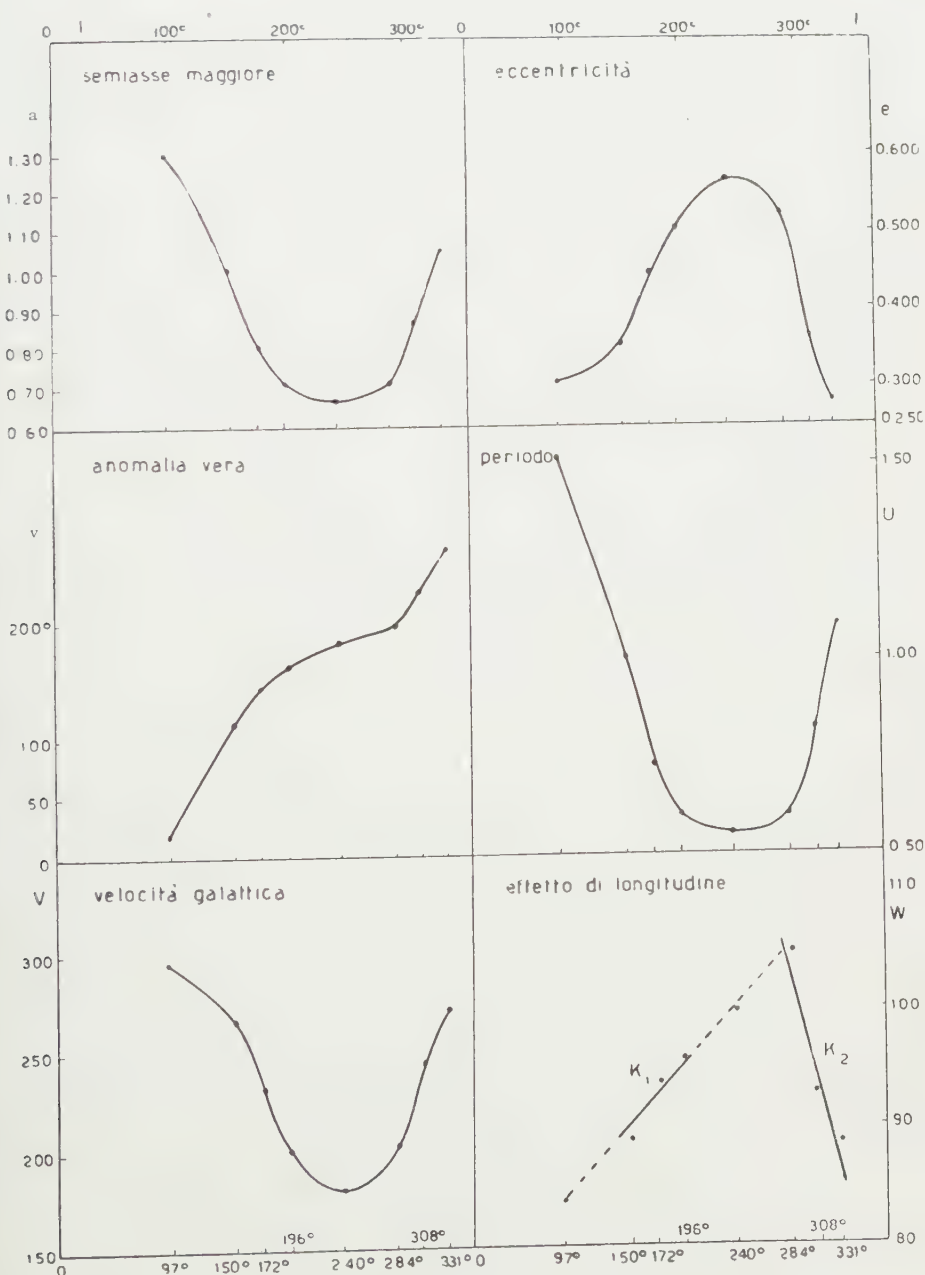


Fig. 1.

In particolare possiamo dire che:

1° mentre la longitudine degli apici varia fra  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , l'anomalia cresce da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ;

2° alle stelle i cui apici sono compresi fra  $0^\circ$  e  $135^\circ$  di longitudine (sottogruppo *a*) della Tabella II) competono i massimi valori per il semiasse maggiore, per il periodo e per la velocità galattica, mentre l'eccentricità si avvicina al valore minimo riscontrato per il complesso di stelle veloci considerato.

3° alle stelle i cui apici sono compresi tra  $210^\circ$  e  $270^\circ$  di longitudine (sottogruppo *c*) della Tabella II) corrispondono invece i minimi valori per il semiasse, periodo e velocità galattica, mentre l'eccentricità acquista il valore massimo.

Si deve però osservare che in questo gruppo ( $210^\circ \leq l \leq 270^\circ$ ) si trova un materiale più eterogeneo che non negli altri gruppi considerati nella Tabella II, specialmente per quanto riguarda la velocità galattica che varia in un intervallo compreso tra 60 e 275 km/sec.

È nostro proposito estendere questa ricerca alle stelle appartenenti alla corrente del Toro e alla corrente dell'Orsa Maggiore nonché alle stelle non di corrente.

Questi lavori verranno pubblicati per esteso sulle «Memorie della S.A.I.» e nelle «Osservazioni e Memorie di Arcetri».

**Geofisica.** — *Studio di un movimento sismico del basso Tirreno, originante alla profondità di 265 km.* Nota di ANTONINO GIRLANDA, presentata (\*) dal Corrisp. P. CALOI.

PREMESSA. — Gli studi microsismici condotti sul terremoto delle isole Lipari del 13 aprile 1938, sebbene siano concordi nell'attribuire all'epicentro una profondità di 300 km, valore eccezionale e fino allora insospettato nella zona del Mediterraneo centro-occidentale (1), hanno condotto a risultati discordanti in relazione alla velocità di propagazione delle onde sismiche in corrispondenza del basso Tirreno. Le determinazioni delle coordinate spazio-temporali eseguite dai vari Centri sismologici e da diversi autori, conducono a risultati assai discordanti. Le determinazioni del B. C. I. S., della J. S. A., di Pasadena e, in modo particolare, una seconda determinazione di Demetrescu, condotta sui dati di 45 stazioni, portano a conclusioni che contrastano nettamente con i dati forniti dalle stazioni più vicine all'epicentro. Secondo gli ultimi risultati di Demetrescu, tali stazioni avrebbero registrato l'onda P con un anticipo eccezionale, anticipo che risulterebbe di 12<sup>s</sup> per Trenta e Pompei, di 11<sup>s</sup> per Taranto e Bari, di 9<sup>s</sup> per Napoli.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Geofisica - Osservatorio di Messina.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) P. CALOI, *Attività sismica in Italia nel decennio 1930-1940*, «Le Monnier», Firenze 1942.



Analoghe osservazioni sono state fatte in uno studio dedicato ad un altro terremoto del basso Tirreno <sup>(2)</sup> avvenuto il 16 marzo 1941 ( $\lambda = 12^{\circ} 07' 23''$  E,  $\varphi = 38^{\circ} 26' 19''$  N,  $h = 85$  km), nel quale è stato messo in evidenza un anticipo nei tempi di arrivo delle onde di dilatazione e di distorsione nelle stazioni più vicine all'epicentro, tale da non potersi attribuire ad eventuali errori d'osservazione.

Tali risultati fanno naturalmente sospettare l'esistenza nella zona, che d'altra parte si presenta notevolmente anomala sia dal punto di vista geologico che geodetico, di una grande anomalia nella velocità di propagazione delle onde sismiche che troverebbe la sua giustificazione, in parte nella natura vulcanica della zona <sup>(2,3)</sup>, in parte nella sottigliezza dello strato superficiale del « granito », che, in tale zona, sembra pressoché mancante <sup>(4,5)</sup>.

La scarshezza di dati sufficientemente attendibili, dovuta al difetto di stazioni efficienti vicine ad una zona che si presenta di così vivo interesse anche dal punto di vista sismico, ha finora indotto ad attribuire ai risultati sopra accennati un carattere non definitivo. È pertanto giustificato lo scopo della presente ricerca dedicata ad un altro terremoto profondo avvenuto al largo delle isole Lipari il 26 dicembre 1952, epoca in cui erano già in efficienza le stazioni sismiche di Messina e di Reggio Calabria.

COORDINATE IPOCENTRALI E TEMPO ORIGINE. — Per una prima determinazione della longitudine e della latitudine mi sono servito di un metodo di Galitzin che non richiede la conoscenza preliminare della profondità ipocentrale e della relativa dromocrona. Tale metodo è stato adoperato con buon successo da vari ricercatori e, per la prima volta in Italia, da Caloi e Giorgi <sup>(6)</sup>, in un lavoro dedicato alla revisione delle coordinate ipocentrali del già citato terremoto delle isole Lipari del 13 aprile 1938, i quali hanno dato al metodo gli sviluppi analitici necessari per le applicazioni pratiche.

Tra il materiale d'osservazione, gentilmente fornito da una trentina di Osservatori, ho potuto scegliere i dati di nove stazioni soddisfacenti alle condizioni volute per l'applicabilità del metodo. Al fine di evitare eventuali influenze, sulla localizzazione dell'epicentro, derivanti dalle supposte anomalie locali, ho utilizzato soltanto dati di stazioni con distanza epicentrale non inferiore a mille km. Tali dati sono riportati nella tabella I. Le distanze provvisorie sono state calcolate adoperando coordinate geocentriche ed assu-

(2) D. DI FILIPPO, *Studio microsismico del terremoto del basso Tirreno del 16 marzo 1941*, « Boll. Soc. Sismol. It. », vol. XXXIX, nn. 3-4 (1941).

(3) P. CALOI, *Struttura geologico-sismica dell'Europa centro-meridionale, dell'Italia e del Mediterraneo centro-occidentale, quale risulta da recenti ricerche compiute in Italia*, « Annali di Geofisica », vol. V, n. 4 (1952).

(4) C. FESTA e P. E. VALLE, *Una valutazione dello spessore dello « strato del granito » nel Mediterraneo centro-occidentale*, « Annali di Geofisica », vol. I, n. 4 (1948).

(5) P. E. VALLE, *Sulla struttura della crosta terrestre nel Mediterraneo centro-occidentale e nell'Adriatico*, « Annali di Geofisica », vol. V, n. 3 (1951).

(6) P. CALOI e M. GIORGI, *Studio del terremoto delle isole Lipari del 13 aprile 1938*, « Annali di Geofisica », vol. V, n. 1 (1951).

mendo come epicentro provvisorio quello indicato dal B. C. I. S., che ha per coordinate

$$\lambda_e = + 15^\circ 30',$$

$$\varphi_e = + 40^\circ 00' \text{ (latitudine geografica),}$$

$$\Phi_e = + 39^\circ 48',59 \text{ (latitudine geocentrica).}$$

TABELLA I.

STAZIONI	$\lambda$	$\Phi$ geocentrica	$T_p$ (23 <sup>h</sup> +)	$\Delta^\circ$ provvisoria	$\alpha_e$
Stuttgart . . . . .	+ 9° 11',6	+ 48° 34',7	58 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> ,5	9° 51',50	334° 51',9
Besançon . . . . .	+ 5 59,3	+ 47 03,4	14,5	9 59,73	319 33,7
Algeri . . . . .	+ 3 03	+ 36 34,9	18,2	10 17,57	255 40,2
Strasbourg . . . . .	+ 7 45,9	+ 48 23,6	19,4	10 12,68	329 43,8
Köbenhavn . . . . .	+ 12 27	+ 55 30,2	59 25,8	15 49,42	353 39,3
Helwan . . . . .	+ 31 20	+ 29 41,0	32,5	16 26,58	123 08,0
Tamanrasset . . . . .	+ 5 31,4	+ 22 39,2	60 00,7	19 07,90	209 11,9
Rathfarnham . . . . .	— 6 16,9	+ 53 06,8	09,5	19 54,42	319 08,7
Uppsala . . . . .	+ 17 37,6	+ 59 41,6	08,7	19 55,51	3 09,0

L'applicazione del metodo mi ha condotto ai seguenti valori, per le incognite con relativi errori medi:

$$x = 1,1573558 \pm 0,9807 \cdot 10^{-3},$$

$$y = 0,3172744 \pm 1,4299 \cdot 10^{-3},$$

dai quali ho dedotto i seguenti valori per le coordinate dell'epicentro:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_e = 15^\circ 26',130 \pm 05',723, \\ \Phi_e = 39^\circ 48',411 \pm 02',040. \end{cases}$$

Con l'ausilio dei grafici di Brunner <sup>(7)</sup> ho dedotto, per la profondità ipocentrale, il valore grossolanamente approssimato, di 290 km, assai vicino al valore

$$h = 0,04 R + 33 \text{ km.}$$

I tempi di registrazione delle P rilevati dai sismogrammi delle stazioni utilizzate in precedenza concordano notevolmente con i corrispondenti tempi

(7) S. J. BRUNNER and J. B. MACELWANE, *The Brunner focal depth-time distance chart*. New York 1945.

dedotti dalla dromocrona di Jeffreys e Bullen relativa alla suddetta profondità, qualora si assuma come tempo origine

$$t_0 = 23^h 55^m 56^s,9.$$

Assumendo i valori fin qui ottenuti come provvisori, ho calcolato le correzioni  $\delta\lambda_0$ ,  $\delta\Phi_0$ ,  $\delta h$ ,  $\delta t_0$  necessarie per ottenere dei valori più corretti, servendomi del metodo di Caloi<sup>(8)</sup>, ripetutamente adoperato in altre circostanze con ottimi risultati. Con i dati delle stesse stazioni elencate nella tabella I ho determinato gli elementi necessari per la deduzione del sistema delle 9 equazioni di condizione a cui il metodo conduce (Tabella II). Dal corrispondente sistema normale ho ottenuto i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}\delta\lambda_0 &= + 6',669, & m_{\delta\lambda_0} &= \pm 4',072, \\ \delta\Phi_0 &= - 2',132 & m_{\delta\Phi_0} &= \pm 1',957, \\ \delta h &= - 0,34525 \cdot 10^{-2} \text{ R}, & m_{\delta h} &= \pm 0,15871 \cdot 10^{-2} \text{ R}, \\ \delta t_0 &= - 1^s,3 & m_{\delta t_0} &= \pm 0^s,6.\end{aligned}$$

TABELLA II.

STAZIONI	$\Delta_i^0$	$f(\langle\lambda_0\rangle, \langle\Phi_0\rangle, \langle h\rangle)$ ( $h = 0,04 \text{ R} + 33 \text{ km}$ )	$T_i - f(\langle\lambda_0\rangle, \langle\Phi_0\rangle, \langle h\rangle)$	$\frac{\partial f}{\partial \Delta}$	$\frac{\partial f}{\partial h}$	$(t_0) - (T_i - f(\langle\lambda_0\rangle, \langle\Phi_0\rangle, \langle h\rangle))$
			(55 <sup>m</sup> +)			
Stuttgart . . . . .	9° ,840	2 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> ,016	56 <sup>s</sup> ,484	+ 12,400	- 0,136	+ 0 <sup>s</sup> ,440
Besançon . . . . .	9 ,966	2 18 ,573	55 ,927	+ 12,400	- 0,186	+ 0 ,997
Algeri . . . . .	10 ,244	2 22 ,027	56 ,173	+ 12,400	- 0,298	+ 0 ,751
Strasbourg . . . . .	10 ,189	2 21 ,345	58 ,055	+ 12,400	- 0,276	- 1 ,131
Köbenhavn . . . . .	15 ,821	3 29 ,298	56 ,502	+ 12,707	- 3,593	+ 0 ,422
Helwan . . . . .	16 ,483	3 36 ,419	56 ,081	+ 10,455	- 3,797	+ 0 ,843
Tamanrasset . . . . .	19 ,102	4 03 ,308	57 ,392	+ 9,989	- 4,211	- 0 ,468
Rathfarnham . . . . .	19 ,877	4 10 ,981	58 ,519	+ 9,812	- 4,288	- 1 ,595
Uppsala . . . . .	19 ,931	4 11 ,515	57 ,185	+ 9,807	- 4,293	- 0 ,261
		$(t_0) = 55^m 56^s,924$				

(8) P. CALOI e F. PERONACI, *Il terremoto del Turkestan del 2 novembre 1946*, « Annali di Geofisica », vol. I, n. 2 (1948).

Come controllo ho ottenuto

$$[\nu] = 4,031934 \quad , \quad [11.4] = 4,031933 ,$$

col consueto significato dei simboli. L'entità delle correzioni e dei corrispondenti errori medi è tale che una ulteriore approssimazione avrebbe un significato puramente formale. Per le coordinate spazio-temporali si possono pertanto assumere i seguenti valori come definitivi:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = + 15^{\circ} 32',778 \pm 4',072, \\ \Phi_0 = + 39^{\circ} 46',279 \pm 1',957 \text{ (latitudine geocentrica)}, \\ h = 264,6 \text{ km} \pm 10,1 \text{ km}, \\ t_0 = 23^{\text{h}} 55^{\text{m}} 55^{\text{s}},6 \pm 0^{\text{s}},6. \end{array} \right.$$

TEMPI DI TRAGITTO DELLE ONDE P ED S. - La tabella III contiene, oltre che i valori delle distanze epicentrali definitive, calcolate adoperando coordinate geocentriche (colonna 1), i tempi di tragitto osservati delle P (colonna 3) e delle S (colonna 7). Tali tempi sono messi a confronto con gli analoghi tempi dedotti interpolando i valori riportati nelle tabelle di Jeffreys e Bullen <sup>(9)</sup>. Si può notare:

1° le stazioni di Messina e Reggio Calabria, le più vicine all'epicentro, per le onde P non hanno dato luogo a scarti, tra tempi osservati e calcolati, che non siano contenibili nei limiti degli errori sperimentali;

2° le stazioni situate nei quadranti S-E e S-W rispetto all'epicentro (Athene, Algeri, Helwan, Tamanrasset), hanno registrato le onde P nei tempi previsti dalla dromocrona di Jeffreys e Bullen; si nota un ritardo di 3<sup>s</sup> circa soltanto nella stazione di Tunisi, che, per altro non ha fornito una registrazione chiaramente interpretabile;

3° analoga concordanza si nota per le stazioni situate nei quadranti N-E e N-W, escluse le stazioni italiane che hanno dato luogo a scarti sistematicamente positivi compresi tra 1<sup>s</sup> e 3<sup>s</sup>,4. Quest'ultima circostanza può essere messa in relazione con la maggiore potenza delle stratificazioni superficiali in corrispondenza dell'Italia centrale e settentrionale, quale risulta dalle ricerche eseguite in questi ultimi anni da Autori italiani <sup>(10,11,12)</sup>;

4° considerazioni analoghe possono essere fatte per le onde S, sebbene entro limiti di incertezza lievemente più vasti dipendenti dal fatto che tale tipo d'onda, sebbene abbia dato luogo a nitide registrazioni nelle stazioni di Messina, Reggio Calabria, Roma, Firenze, Prato, Trieste, non è risultata di facile interpretazione e, in alcuni sismogrammi, non è stato possibile identificarla.

(9) H. JEFFREYS and K. E. BULLEN, *Seismological tables*, « British Ass. for the advancement of Science », London 1940.

(10) P. CALOI, *Sulla velocità di propagazione delle onde P e sullo spessore dello strato del granito nell'Europa centrale*, « La Ricerca Scientifica », vol. XI, n. 11 (1940).

(11) P. CALOI, *Caratteristiche sismiche dell'Appennino tosko-romagnolo*, « La Ricerca Scientifica », vol. XI, n. 4 (1940).

(12) D. DI FILIPPO e L. MARCELLI, *La struttura della crosta terrestre in corrispondenza dell'Italia centrale*, « Annali di Geofisica », vol. V, n. 4 (1952).

TABELLA III.

N.	STAZIONI	$\Delta^{\circ}$ (1)	P			S				
			T (2)	$t$ (osservati) (3)	$t$ (calcolati) (Jeffreys) (4)	O—C (5)	T (6)	$t$ (osservati) (7)	$t$ (calcolati) (Jeffreys) (8)	O—C (9)
1	Messina . . . . .	1° 7,622	56 <sup>m</sup> 37 <sup>s</sup> , 6	00 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup> , 0	00 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup> , 2	— 0 <sup>s</sup> , 2	57 <sup>m</sup> 09 <sup>s</sup> , 5	01 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> , 9	01 <sup>m</sup> 14 <sup>s</sup> , 8	— 0 <sup>s</sup> , 9
2	Reggio Calabria . . .	1° 8,550	39, 3	43, 7	42, 9	+ 0, 8	13, 3	16, 1	17, 7	+ 1, 6
3	Roma . . . . .	3° 0,071	51, 3	55, 7	53, 9	+ 1, 8	33, 7	38, 1	35, 8	+ 2, 3
4	Firenze . . . . .	4° 9,793	57 14, 2	01 18, 6	01 16, 6	+ 2, 0	58 14, 1	02 18, 5	02 16, 4	+ 2, 1
5	Prato . . . . .	5° 1,348	15, 8	20, 2	18, 5	+ 1, 7	15, 4	19, 8	19, 8	0, 0
6	Tunisi . . . . .	5° 2,932	18, 8	23, 2	20, 4	+ 2, 8	21, 8	26, 2	23, 3	+ 2, 9
7	Bologna . . . . .	5° 5,011	22, 0	26, 4	23, 0	+ 3, 4	?	—	27, 9	—
8	Trieste . . . . .	5° 8,299	24, 3	28, 7	27, 0	+ 1, 7	58 31, 4	35, 8	35, 1	+ 0, 7
9	Beograd . . . . .	6° 0,648	28, 1	32, 5	29, 9	+ 2, 6	?	—	40, 3	—
10	Athene . . . . .	6° 6,690	33, 4	37, 8	37, 4	+ 0, 4	50, 7	55, 1	53, 8	+ 1, 3
11	Salò . . . . .	6° 7,440	35, 0	39, 4	38, 3	+ 1, 1	52, 0	56, 4	55, 4	+ 1, 0
12	Pavia . . . . .	7° 0,237	38, 5	42, 9	41, 9	+ 1, 0	?	—	03 01, 7	—
13	Budapest . . . . .	7° 9,457	?	—	53, 4	—	?	—	22, 4	—
14	Chur . . . . .	8° 1,551	52, 6	57, 0	56, 1	+ 0, 9	59 22, 6	03 27, 0	27, 1	— 0, 1
15	Zürich . . . . .	8° 9,576	58 01, 4	02 05, 8	02 06, 2	— 0, 4	41, 5	45, 9	45, 2	+ 0, 7
16	Neuchâtel . . . . .	9° 3,993	05, 9	10, 3	11, 7	— 1, 4	51, 0	55, 4	55, 2	+ 0, 2
17	Stuttgar . . . . .	9° 9,983	13, 5	17, 9	18, 1	— 0, 2	60 02, 5	04 06, 9	04 06, 7	+ 0, 2
18	Besançon . . . . .	10° 0,479	14, 5	18, 9	19, 8	— 0, 9	?	—	09, 9	—
19	Strasbourg . . . . .	10° 2,627	19, 4	23, 8	22, 5	+ 1, 3	09, 9	14, 3	14, 9	— 0, 6
20	Algeri Univ. . . . .	10° 3,181	18, 2	22, 6	23, 2	— 0, 6	?	—	16, 0	—
21	Köbenhavn . . . . .	15° 8,660	59 25, 8	03 30, 2	03 30, 8	— 0, 6	?	—	06 19, 1	—
22	Helwan . . . . .	16° 3,919	32, 5	36, 9	36, 7	+ 0, 2	62 25, 4	06, 29, 8	30, 0	— 0, 2
23	Tamanrasset . . . . .	19° 11,24	60 00, 7	04 05, 1	04 04, 9	+ 0, 2	63 20, 0	07 24, 4	07 22, 7	+ 1, 7
24	Uppsala . . . . .	19° 9,616	08, 7	13, 1	13, 4	— 0, 3	36, 0	40, 4	38, 2	+ 2, 2
25	Rathfarnham . . . . .	19° 9,955	09, 5	13, 9	13, 4	+ 0, 5	?	—	38, 2	—



DROMOCRONE E VELOCITÀ APPARENTI DELLE ONDE SPAZIALI. - Gli inizi osservati in un sufficiente numero di sismogrammi mi hanno permesso di approssimare, in modo assai soddisfacente, la dromocrona delle onde P con la seguente parabola del terzo ordine:

$$(3) \quad t_p = 25,155519 + 9,297264 \Delta + 0,312066 \Delta^2 + 0,010250 \Delta^3,$$

nella quale  $\Delta$  è la distanza epicentrale espressa in gradi e  $t_p$  il tempo di tragitto espresso in secondi. I coefficienti della (3) sono stati calcolati in adattamento ai tempi di tragitto osservati nelle stazioni di Messina, Reggio Calabria, Roma, Prato, Athene, Chur, Zürich, Neuchâtel, Stuttgart, Besançon, Strasbourg, Algeri, Köbenhavn, Tamanrasset, Uppsala, Rathfarnham: pertanto la (3) può ritenersi valida per valori di  $\Delta$  compresi nell'intervallo ( $1^\circ, 5-20^\circ$ ). La tabella IV contiene le differenze tra i tempi di tragitto osservati in tutte le stazioni che hanno dato luogo a inizi rilevabili senza ambiguità ed i corrispondenti tempi di tragitto calcolati mediante la (3).

Dalla (3) si può dedurre l'espressione della velocità apparente delle onde P in funzione della variabile  $\Delta$ :

$$(4) \quad \bar{V}_P = \frac{\pi R}{180} (9,297264 + 0,624133 \Delta + 0,030749 \Delta^2)^{-1},$$

essendo  $\Delta$  espressa in gradi e  $\bar{V}_P$  in km/sec<sup>-1</sup>. La (4) presenta un minimo in corrispondenza al valore

$$\Delta_c = 10^\circ,149.$$

Tale valore, per cui la (3) presenta un flesso, corrisponde, nell'ipotesi di un modello sferico a strati omogenei, alla distanza epicentrale alla quale emergono tutti i raggi sismici appartenenti alla famiglia di traiettorie simmetriche rispetto alla retta che passa per il centro della sfera e l'ipocentro. Dalla relazione

$$(5) \quad \frac{r_m}{V_P(r_m)} = \left( \frac{dt_p}{d\Delta} \right)_{\Delta = \Delta_c}$$

nella quale  $r_m$  è la distanza dal centro della Terra del punto di massima profondità raggiunto dalle suddette traiettorie e  $V_P(r_m)$  la velocità vera delle P in tale punto, essendo nel caso in esame

$$r_m = R - h = 6103 \text{ km},$$

segue, sempre nell'ipotesi del modello ideale:

$$V_P(r_m) = 8,55 \text{ km/sec}^{-1},$$

valore sufficientemente vicino ai valori attribuiti da Jeffreys (8,47 km/sec<sup>-1</sup>) e da Gutenberg (8,43 km/sec<sup>-1</sup>) alla velocità delle onde P alla profondità considerata.

TABELLA IV.

N.	STAZIONI	$\Delta^\circ$	$\delta t_P$	$\delta t_S$
1	Messina . . . . .	1°,762	— 0,5	— 0,1
2	Reggio Calabria . . . . .	1,855	+ 0,3	+ 0,4
3	Roma . . . . .	3,007	0,0	+ 0,1
4	Firenze . . . . .	4,979	+ 0,7	+ 0,4
5	Prato . . . . .	5,135	+ 0,5	— 1,5
6	Tunisi . . . . .	5,293	+ 1,6	+ 1,5
7	Bologna . . . . .	5,501	+ 2,4	—
8	Trieste . . . . .	5,830	+ 0,8	— 0,4
9	Becgrad . . . . .	6,065	+ 1,8	—
10	Athene . . . . .	6,669	— 0,2	+ 0,7
11	Salò . . . . .	6,744	+ 0,5	+ 0,4
12	Pavia . . . . .	7,024	+ 0,6	—
13	Chur . . . . .	8,155	+ 0,8	+ 0,7
14	Zürich . . . . .	8,958	— 0,3	— 0,3
15	Neuchâtel . . . . .	9,399	— 1,3	+ 0,6
16	Stuttgart . . . . .	9,908	0,0	+ 0,4
17	Besançon . . . . .	10,048	— 0,8	—
18	Strasbourg . . . . .	10,263	+ 1,4	+ 0,2
19	Algeri . . . . .	10,318	— 0,4	—
20	Köbenhavn . . . . .	15,866	— 0,1	—
21	Helwan . . . . .	16,392	+ 0,6	— 0,4
22	Tamanrasset . . . . .	19,112	— 0,2	— 0,1
23	Uppsala . . . . .	19,962	— 0,5	— 0,2
24	Rathfarnham . . . . .	19,960	+ 0,3	—

Con i dati delle stesse stazioni utilizzate in precedenza, escluse le stazioni di Besançon, Algeri e Köbenhavn, nelle quali non ho potuto identificare le S, ho dedotto la seguente equazione per la dromocrona più probabile delle onde S:

$$(6) \quad t_s = 42,795252 + 16,823675 \Delta + 0,5507298 \Delta^2 - 0,01733112 \Delta^3,$$

sufficientemente valida per valori di  $\Delta$  compresi nell'intervallo ( $1^\circ, 5-20^\circ$ ). La stessa tabella IV contiene le differenze tra i tempi di tragitto osservati e i corrispondenti tempi calcolati mediante la (6). Nel campo di validità precisato la velocità apparente delle onde S è data da:

$$(7) \quad \bar{V}_s = \frac{\pi R}{180} (16,823675 + 1,1014596 \Delta - 0,05199369 \Delta^2)^{-1}.$$

**DROMOCRONE E VELOCITA' APPARENTI  
DELLE ONDE "P" ed "S" (Terremoto del golfo  
di Policastro del 26 dicembre 1952)**

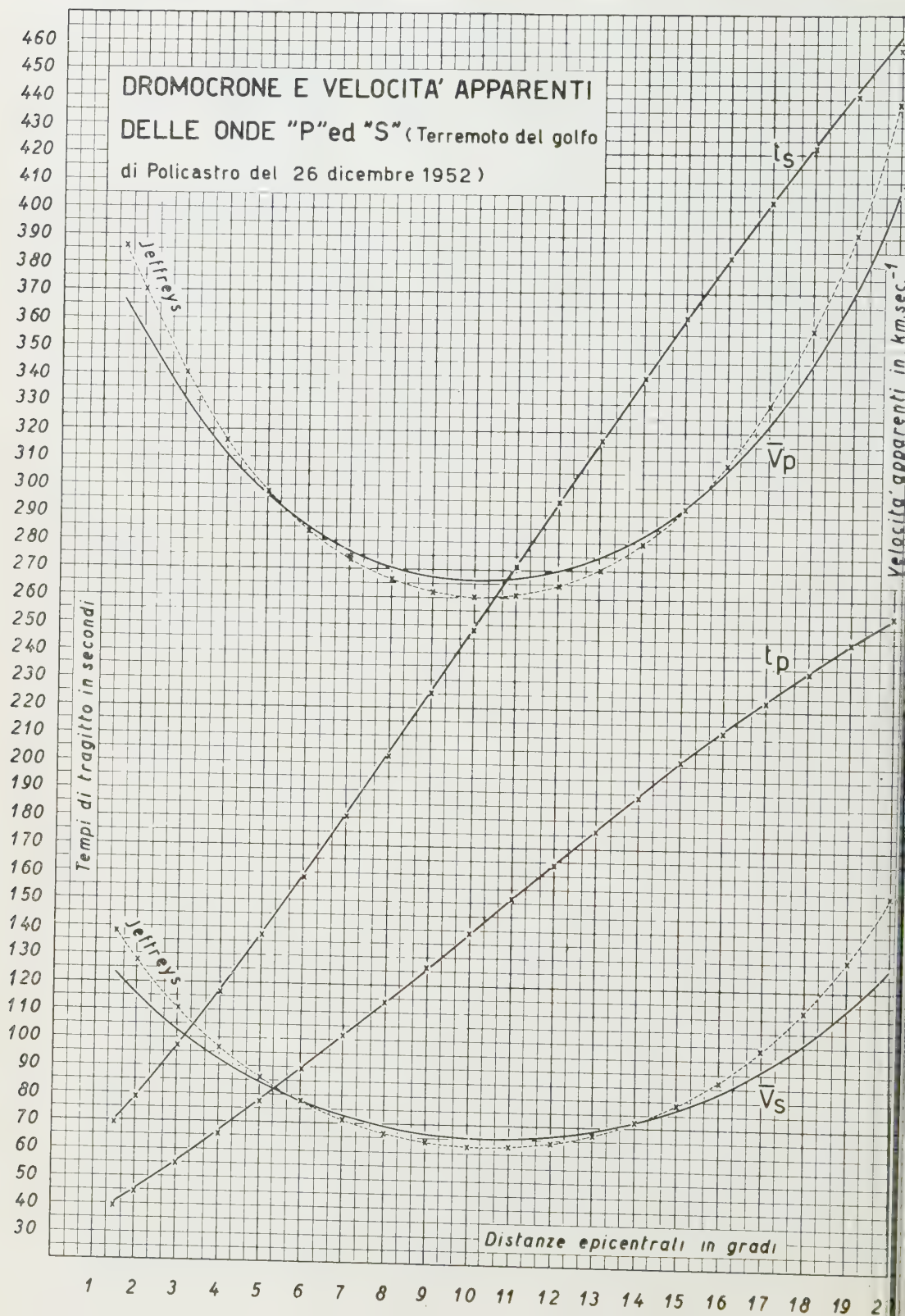


Fig. 1.

Il minimo per la (7) ed il flesso per la (6) si hanno in corrispondenza al valore,

$$\Delta_1 = 10^{\circ}, 592,$$

sensibilmente superiore all'analogo valore dedotto per le onde P. Questo risultato è da collegarsi col fatto che il gradiente della velocità delle onde S, considerata come funzione della profondità, è sensibilmente inferiore al corrispondente gradiente della velocità delle onde P.

Per la velocità delle onde S alla profondità ipocentrale, utilizzando la (7) e la relazione analoga alla (5), si ottiene il valore:

$$V_s(r_m) = 4,71 \text{ km/sec}^{-1},$$

sensibilmente vicino a quello deducibile dai valori calcolati da Jeffreys per le diverse profondità.

La figura 1 contiene le curve rappresentate rispettivamente dalla (3), (4), (5), (6) e le analoghe curve rappresentate dalle corrispondenti relazioni ottenute operando, con lo stesso criterio di approssimazione, sui tempi di tragitto dedotti dalle tabelle di Jeffreys e Bullen.

**Fisica matematica.** — *Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria.* Nota di FRANCO DE SIMONI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. In quest'ultimo decennio ad opera di diversi Autori e principalmente di A. Einstein <sup>(1)</sup> sono stati proposti varî sistemi di equazioni che generalizzano quelle gravitazionali della Relatività generale e contengono sia queste sia le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico. Il punto di partenza di tutte queste teorie è un tensore fondamentale,  $g_{ik}$ , non simmetrico né emisimmetrico, e una connessione  $\Gamma_{ik}^l$ , anch'essa non godente di nessuna simmetria rispetto ad  $i$  e  $k$ , e definita dal tensore fondamentale. Fin dalle prime formulazioni di dette equazioni furono messe in evidenza alcune loro deficienze: l'integrazione del caso statico a simmetria sferica <sup>(2)</sup> non porta alla soluzione di Schwarzschild dell'analogo caso della Relatività generale; non è possibile dedurre, né in prima né in seconda approssimazione, le equazioni

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) A. EINSTEIN-E. G. STRAUS, « Ann. Math. Princeton », 47, pp. 731-741 (1946); A. EINSTEIN, « Can. Journ. », II, pp. 120-128 (1950); *Il significato della relatività*, Einaudi Ed., pp. 141-156 (1950); *The meaning of Relativity*, 4<sup>a</sup> ed. Princeton Un. Press, pp. 133-165 (1953); E. SCHRÖDINGER, « Proc. Roy. Irish Ac. », LI, A 213 (1948).

(2) A. PAPAPETROU, « Proc. Roy. Irish Ac. », LII, A 6, pp. 69-89 (1948); M. WYMAN, « Can. Journ. Math. », II, 4, pp. 427-439 (1950); W. W. BONNOR, « Proc. Roy. Soc. », A 209, pp. 353-368 (1951) e A 210, pp. 427-434 (1952); F. DE SIMONI, questi « Rend. », ser. 8<sup>a</sup>, XVI, pp. 348-355 (1954).

lorentziane del moto di una carica elettrica e le forze coulombiane<sup>(3)</sup>. Alcuni Autori<sup>(4)</sup> hanno proposto altri sistemi di equazioni del campo unitario per ovviare ad alcune di queste mancanze, pur sacrificando la semplicità. Ma, come il Finzi<sup>(5)</sup> ha messo in evidenza per le ultime equazioni di campo proposte da Einstein, nella formulazione di tutti questi sistemi si parte sempre da qualche condizione, posta arbitrariamente *a priori*, il che non è spontaneo ed inoltre involge l'interpretazione delle equazioni del campo elettromagnetico. In questa Nota metterò in evidenza che, pur modificando l'azione hamiltoniana, da cui si deducono con principio variazionale le predette equazioni, si possono ottenere vari sistemi con caratteri sostanzialmente diversi: soltanto variando in modo opportuno la parte emisimmetrica del tensore fondamentale si ottengono le equazioni che contengono come casi particolari tutti i sistemi finora proposti.

2. Facendo uso del simbolismo usato da Einstein, sia  $R_{ik}$  il tensore della curvatura contratta, definito dalla connessione  $\Gamma_{ik}^l$ , la quale si decompone in un campo di spostamento simmetrico  $\Gamma_{ik}^l$  e nel tensore di torsione  $\Gamma_{ik}^l$ , che per contrazione rispetto a  $k$  ed  $l$  dà il vettore di torsione (di Einstein)  $\Gamma_{is}^s = \Gamma_i$ ;  $w = \sqrt{-|g_{ik}|}$  è la densità scalare, mediante la quale si ottengono le densità tensoriali, fra le quali quella fondamentale  $g_{ik} = wg_{ik}$ .

Consideriamo la densità hamiltoniana  $\mathfrak{H}$  definita dalla relazione

$$(1) \quad \mathfrak{H} = g^{ik} R_{ik}^{**} + \lambda \mathfrak{h},$$

in cui

$$(2) \quad R_{ik}^{**} = R_{ik}^{*} - \left( \frac{1}{w} w_{;i} \right)_{;k}^{+}, \quad R_{ik}^{*} = R_{ik} + \Gamma_{i;k}^{+},$$

essendo il punto e virgola la derivata tensoriale, con la polarizzazione indicata,  $\lambda$  una costante universale,  $\mathfrak{h}$  una funzione del solo tensore fondamentale e non dei coefficienti di connessione, tale inoltre che la sua variazione rispetto alla densità tensoriale fondamentale sia

$$(3) \quad \delta \mathfrak{h} = \Lambda_{ik} \delta g^{ik},$$

in cui il tensore doppio  $\Lambda_{ik}$ , non necessariamente simmetrico né emisimmetrico, è però hermitiano nel senso di Einstein. Considerando l'azione corrispondente

$$(4) \quad S = \int_{\tau} \mathfrak{H} d\tau,$$

(3) L. INFELD, « Acta Phys. Polonica », 10, pp. 284-294 (1950); J. CALLAWAY, « Phys. Rev. », 92 (1953); W. W. BONNOR, « Proc. Roy. Soc. », A 226, pp. 366-377 (1954); sono anche di particolare interesse i lavori di V. HLAVATÝ, « Rend. Sem. Torino », 13 (1953-54); « Nieuw Arch. voor Wisk. », II, 3, pp. 103-114 (1954).

(4) B. KURŞUNOĞLU, « Phys. Rev. », 88, pp. 1369-1379 (1952); W. W. BONNOR, loco cit., nota (3).

(5) B. FINZI, questi « Rend. », ser. 8ª, vol. XIV, pp. 581-588 (1953).



dove  $\tau$  è una regione generica dello spazio-tempo, non contenente materia, e di cui  $\omega$  è il contorno, per una variazione di  $g^{ik}$  e dei  $\Gamma_{ik}^l$  essa subisce la variazione <sup>(6)</sup>

$$(5) \quad \delta S = \int_{\tau} [w g^{+-}_{;l} \delta \Gamma_{ik}^l + (R_{ik}^{**} + \lambda \Lambda_{ik}) \delta g^{ik} + (g^{+-}_{;i};_k) \delta (\log w)] d\tau,$$

che desideriamo risulti nulla per variazioni arbitrarie dei  $\delta g^{ik}$  e  $\delta \Gamma_{ik}^l$ , ma identicamente nulle sul contorno  $\omega$ . Spezzando  $\delta S$  in una parte dipendente dalla variazione dei soli coefficienti di connessione ed in una relativa alla sola variazione della densità tensoriale fondamentale, perché la prima si annulli, qualunque siano i  $\delta \Gamma_{ik}^l$ , deve risultare:

$$(6) \quad g^{+-}_{;l} = 0$$

e quindi anche  $g_{i;k;l} = 0$ ,  $g^{+-}_{;l} = 0$  e  $w_{;l} = 0$ . Dalla (5) perciò, per una generica variazione  $\delta g^{ik}$  si ha:

$$(7) \quad \int_{\tau} (R_{ik}^{*} + \lambda \Lambda_{ik}) \delta g^{ik} d\tau = 0,$$

dove si è posto  $R_{ik}^{*}$ , invece di  $R_{ik}^{**}$ , per le (6). Affinché la (7) sia soddisfatta per una scelta arbitraria della parte simmetrica  $\delta g^{ik}$  dobbiamo porre:

$$(8) \quad R_{ik}^{*} + \lambda \Lambda_{ik} = 0,$$

in cui  $R_{ik}^{*}$  e  $\Lambda_{ik}$  sono le parti simmetriche dei tensori  $R_{ik}^{*}$  e  $\Lambda_{ik}$ , cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ik}^{*} = \frac{1}{2} (R_{ik}^{*} + R_{ki}^{*}) = R_{ik} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i,k} + \Gamma_{k,i}) - \Gamma_s \Gamma_{ik}^s, \\ \Lambda_{ik} = \frac{1}{2} (\Lambda_{ik} + \Lambda_{ki}). \end{array} \right.$$

Pertanto la variazione dell'azione  $S$  è nulla per una scelta arbitraria dei  $\delta \Gamma_{ik}^l$  e dei  $\delta g^{ik}$  se sono soddisfatte le 64 equazioni (6), lineari nei coefficienti di connessione, e le 10 equazioni (8) ed inoltre

$$(9) \quad \int_{\tau} (R_{\underset{\vee}{ik}}^{*} + \lambda \Lambda_{\underset{\vee}{ik}}) \delta g^{\underset{\vee}{ik}} d\tau = 0,$$

nella quale:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\underset{\vee}{ik}}^{*} = R_{\underset{\vee}{ik}} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) - \Gamma_s \Gamma_{\underset{\vee}{ik}}^s, \\ \Lambda_{\underset{\vee}{ik}} = \frac{1}{2} (\Lambda_{ik} - \Lambda_{ki}). \end{array} \right.$$

(6) Cfr. A. EINSTEIN, *The meaning of Relativity*, pp. 143-146.

Sulla natura delle variazioni  $\delta g_{ik}^{\vee}$  si può fare varie ipotesi, seguendo le idee del Finzi <sup>(5)</sup>, cioè:

- I) che esse siano arbitrarie,
- II) che siano solenoidali,
- III) che siano la somma di una variazione solenoidale e di una irrotazionale, come è proprietà caratteristica dei tensori emisimmetrici <sup>(7)</sup>,
- IV) che i  $\delta g_{ik}^{\vee}$  siano la somma di una variazione solenoidale e di una ottenuta eseguendo un cambiamento infinitesimo arbitrario del riferimento spazio-temporale,

ove, naturalmente, si rispettino sempre i valori sul contorno  $\omega$  della regione degli elementi arbitrari di tali variazioni.

3. Nel caso I) da (9) seguono subito le equazioni:

$$(11) \quad R_{ik}^* + \lambda \Lambda_{ik}^{\vee} = 0,$$

le quali associate alle (6) e (8) danno un primo sistema di equazioni del campo unitario. Di queste la (6) o la seguente ad essa equivalente:

$$(6') \quad g_{ik;l} = 0,$$

è hermitiana rispetto ad  $i$  e  $k$ , mentre le (8) e (11), che possono riassumersi nell'unica equazione

$$R_{ik} + \lambda \Lambda_{ik} = 0,$$

non è in generale tale. Infatti la parte anti-hermitiana risulta <sup>(8)</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} (R_{ik}^* + \tilde{R}_{ik}^*) &= \frac{1}{2} (R_{ik} + \tilde{R}_{ik}) + \frac{1}{2} (\Gamma_{+i;k} + \tilde{\Gamma}_{+i;k}) = \\ &= -\frac{1}{2} (\Gamma_{+i;k} + \Gamma_{-k;i}) + \frac{1}{2} (\Gamma_{+i;k} - \Gamma_{-i;k}) = \\ &= -\frac{1}{2} (\Gamma_{-i;k} + \Gamma_{-k;i}), \end{aligned} \right.$$

la quale si annulla soltanto se il vettore di torsione è nullo. Qualora si voglia accettare con Einstein che tutte le condizioni per il campo devono restare immutate se si sostituiscono simultaneamente le  $g_{ik}$  e le  $\Gamma_{ik}^l$  con le loro trasposte,  $\tilde{g}_{ik}$  e le  $\tilde{\Gamma}_{ik}^l$ , allora è necessario porre le ulteriori condizioni:

$$(12) \quad \Gamma_i = 0,$$

che equivalgono alle equazioni

$$(12') \quad g_{ik}^{\vee, s} = 0,$$

(7) B. FINZI, questi « Rend. », ser. 8<sup>a</sup>, XII, p. 378 (1952).

(8) Si ricordi che per ipotesi (n. 2) si è supposto che il tensore  $\Lambda_{ik}$  sia hermitiano.

le quali consentono di interpretare il tensore doppio emisimmetrico

$${}^*g^{rs} = \epsilon^{isik} g_{ik},$$

coniugato del fondamentale, come il tensore elettromagnetico, perché il suo rotore completo (neutro, polarizzato o con derivate ordinarie<sup>(9)</sup>) è nullo, come è richiesto dalla prima equazione di Maxwell nello spazio-tempo, e la sua divergenza neutra si può eguagliare al vettore distribuzione elettrica, come vuole la seconda equazione, perché in tal modo risulta verificata la legge di conservazione, dato che la divergenza di tale vettore è nulla risultando la divergenza seconda neutra di un tensore emisimmetrico.

È immediato constatare che il sistema così trovato:

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} g_{i k ; l} &= 0, \\ R_{ik} + \lambda \Lambda_{ik} &= 0, \\ g^{\quad is}_{\quad , s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{oppure} \quad \Gamma_i = 0,$$

si riduce alle equazioni del campo unitario di Einstein del 1950<sup>(10)</sup>, purché si ponga  $\lambda = 0$  e, ripetiamo, si ottiene annullando la variazione dell'azione  $S$  per una variazione arbitraria dei  $\Gamma_{ik}^l$  e dei  $g^{ik}$  e imponendo la condizione di hermitianità.

4. Se si suppone che i  $\delta g^{\quad ik}_{\quad \vee}$  siano solenoidali, si potranno sempre porre nella forma

$$(13) \quad \delta g^{\quad ik}_{\quad \vee} = \eta^{ikrs} \delta \psi_{r, s},$$

in cui  $\eta^{ikrs}$  è la densità tensoriale di Levi-Civita, corrispondente al tensore di Ricci dello spazio-tempo,  $\epsilon^{ikrs}$ , e  $\delta \psi_r$  è un vettore arbitrario e infinitesimo. Sostituendo la (13) in (9), si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} (R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik}) \eta^{ikrs} \delta \psi_{r, s} d\tau = \\ &= \int_{\tau} [(R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik}) \eta^{ikrs} \delta \psi_{r, s}]_{, s} d\tau - \int_{\tau} \eta^{ikrs} (R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik})_{, s} \delta \psi_r d\tau = \\ &= - \int_{\omega} (R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik}) \eta^{ikrs} \delta \psi_r n_s d\omega - \int_{\tau} \eta^{ikrs} (R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik})_{, s} \delta \psi_r d\tau, \end{aligned}$$

in cui  $n_s$  è il versore normale al contorno  $\omega$ , rivolto verso  $\tau$ . Essendo  $\delta \psi_r = 0$  su  $\omega$  si ottiene:

$$(14) \quad - \int_{\tau} \eta^{ikrs} (R^*_{\quad \vee ik} + \lambda \Lambda_{\quad \vee ik})_{, s} \delta \psi_r d\tau = 0,$$

(9) M. PASTORI, questi « Rend. », ser. 8<sup>a</sup>, XII, pp. 302-307 (1952).

(10) A. EINSTEIN, loco terzo citato nota (1).

la quale è verificata per una scelta arbitraria di  $\delta\psi_r$  in  $\tau$  se

$$(15) \quad \text{rot} (R_{ik}^* + \lambda \Lambda_{ik}) = 0.$$

In conseguenza quindi dell'ipotesi II) si ottiene il sistema

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ik;l} = 0, \\ R_{ik} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i,k} + \Gamma_{k,i}) - \Gamma_s \Gamma_{ik}^s + \lambda \Lambda_{ik} = 0, \\ \text{rot} \left[ R_{ik} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) - \Gamma_s \Gamma_{ik}^s + \lambda \Lambda_{ik} \right] = 0, \end{array} \right.$$

nelle quali ancora figura il vettore di torsione. Si può naturalmente ripetere per le (II) le considerazioni di hermitianità del numero precedente e quindi aggiungere la terza delle (I), con la conseguente interpretazione di  $g_{rs}^*$  come tensore elettromagnetico.

5. Nell'ipotesi III), i  $\delta g_{ik}^{\vee}$  si possono esprimere con un antipoteniale  $\delta\psi_r$  e con un potenziale  $\delta(w\varphi_i)$ , entrambi arbitrari in  $\tau$ , ma nulli sul contorno  $\omega$ . Posto

$$(16) \quad f_{ik} = R_{ik}^* + \lambda \Lambda_{ik},$$

la (9) diventa:

$$\int_{\tau} f_{ik} \eta^{ikrs} \delta\psi_{r,s} d\tau + \int_{\tau} f^{ik} \{ [\delta(w\varphi_k)]_{,i} - [\delta(w\varphi_i)]_{,k} \} d\tau = 0,$$

che, con una integrazione per parti e per i valori al contorno, si riduce a:

$$- \int_{\tau} \eta^{ikrs} f_{ik,s} \delta\psi_r d\tau - 2 \int_{\tau} f^{ik}_{,k} \delta(w\varphi_i) d\tau = 0,$$

la quale è soddisfatta per una scelta arbitraria dei  $\delta\psi_r$  e  $\delta(w\varphi_i)$  in  $\tau$  se

$$(17) \quad \text{rot} f_{ik} = 0, \quad \text{div} f^{ik} = 0.$$

Le (17) consentono di assumere  $f_{ik}$  come il tensore elettromagnetico del campo unitario neutro, come nella teoria di Hattori<sup>(11)</sup>, però, in analogia a quanto è stato proposto dal Finzi<sup>(12)</sup>, si può più convenientemente interpretare

$$(18) \quad F_{ik} = f_{ik} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) = R_{ik}^* + \lambda \Lambda_{ik} - \Gamma_s \Gamma_{ik}^s$$

come il tensore elettromagnetico del campo unitario generale. Infatti, per la prima delle (17) si ha

$$(19) \quad \text{rot} F_{ik} = \text{rot} f_{ik} = 0,$$

(11) K. HATTORI, « Phys. Zeitschr. », 19, pp. 538-549 (1928).

(12) Comunicazione fatta al Congr. I. M. U., Amsterdam (1954).

inoltre la divergenza di  $F_{ik}$  non è identicamente nulla e si può uguagliare al vettore distribuzione elettrica

$$(20) \quad j_i = \operatorname{div} F_{ik} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}),$$

perché risulta

$$\operatorname{div} j_i = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{div} (\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}) \equiv 0,$$

concordemente col principio di conservazione. Quindi, riepilogando, nella ipotesi III) le equazioni del campo unitario sono

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ik;l} = 0, \\ R_{ik} + \frac{1}{2}(\Gamma_{i,k} + \Gamma_{k,i}) - \Gamma_s \Gamma_{ik}^s + \lambda \Lambda_{ik} = 0, \\ \operatorname{rot} f_{ik} = 0, \quad \operatorname{div} f^{ik} = 0, \end{array} \right.$$

essendo  $F_{ik}$ , espresso da (18), il tensore elettromagnetico del campo.

6. Considerando infine l'ipotesi IV), supponiamo che i  $\delta g^{ik}$  siano la somma di una variazione solenoidale dipendente da un vettore  $\delta\psi_r$  arbitrario e di una variazione ottenuta con un cambiamento infinitesimo del riferimento cronotopico, dipendente da un vettore infinitesimo arbitrario  $\delta x^i$ , cioè:

$$(21) \quad \delta g^{ik} = \eta^{ikrs} \delta\psi_{r,s} + g^{sk} \delta x^i_{,s} + g^{is} \delta x^k_{,s} + g^{ik} \delta x^s_{,s} - g^{ik}_{,s} \delta x^s.$$

Perché  $\delta S = 0$  per una scelta arbitraria dei  $\delta\psi_r$  in  $\tau$  e nulli su  $\omega$ , basta sostituire nella (9) la (21), dopo aver posto  $\delta x^i = 0$ , e con il ragionamento del n. 4 si ottengono ancora le (15). Quindi per un  $\delta x^i$  generico, facendo ancora uso della (16), la (9) diventa:

$$(22) \quad \int_{\tau} \{ g^{sk} [f_{ki,s} + f_{is,k} + f_{sk,i}] + 2 f_{ik} g^{kt}_{,t} \} \delta x^i d\tau = 0.$$

L'elemento in parentesi quadre si riduce a  $\operatorname{rot} f_{ik}$ , che, per le (15), è nullo, quindi la (22) è soddisfatta da una scelta arbitraria dei  $\delta x^i$  in  $\tau$  se

$$f_{ik} g^{kt}_{,t} = 0,$$

le quali, essendo in generale non identicamente nullo il determinante emisimmetrico del 4° ordine  $\|f_{ik}\|$ , danno le quattro equazioni:

$$(23) \quad g^{kt}_{,t} = 0,$$

che, come si è già ricordato, equivalgono all'annullarsi del vettore di torsione. Pertanto dalle (2) per le (23), risulta  $R_{ik}^* \equiv R_{ik}$  e le equazioni del campo unitario risultano:

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ik;l} = 0, \quad g^{is}_{,s} = 0, \\ R_{ik} + \lambda \Lambda_{ik} = 0, \\ \operatorname{rot} (R_{ik} + \lambda \Lambda_{ik}) = 0, \end{array} \right.$$



e il tensore elettromagnetico, per le considerazioni del n. 3, è il coniugato del tensore fondamentale (o della sua parte emisimmetrica).

7. Le (IV) contengono come casi particolari tutte le equazioni del campo unitario finora proposte. Infatti, ove si ponga nella (1)  $\mathfrak{h} \equiv 0$  si ottengono le equazioni di Einstein-Straus (1946-1950); se invece è

$$(24) \quad \mathfrak{h} = -2w = -2\sqrt{-\|g_{ik}\|} = -2\sqrt{-\|g^{ik}\|}$$

si ottengono le equazioni unitarie di Schrödinger; dando ad  $\mathfrak{h}$  il valore

$$(25) \quad \mathfrak{h} = 2(\sqrt{-\|g^{ik}\|} - \sqrt{-\|g_{ik}\|})$$

le (IV) diventano le equazioni di Kurşunoğlu, mentre, infine, se

$$(26) \quad \mathfrak{h} = -wg^{\vee ik}g_{ik} = -g^{ik}g_{ik}$$

si ottengono le equazioni proposte dal Bonnor.

**Fisica matematica.** — *Multipoli e onde di Schelkunoff dissimmetriche.* Nota di ITALO FERRARI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. In una Nota precedente <sup>(1)</sup>, abbiamo determinato alcune relazioni fra i campi elettromagnetici di multipoli sinoidali di pulsazione  $\omega$  e le onde di Schelkunoff di medesima pulsazione. Ci siamo però limitati a considerare onde di Schelkunoff simmetriche, più precisamente, quelle rappresentate da un campo elettromagnetico simmetrico rispetto ad una retta opportuna.

Ma il Schelkunoff ha introdotto <sup>(2)</sup> anche onde che potremo chiamare dissimmetriche. Riferiti infatti i punti P dello spazio ad un sistema di coordinate polari  $r, \theta, \varphi$  con polo in O e detti  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  tre vettori unitari tangenti alle linee su cui varia (crescendo), rispettivamente, solo  $r, \theta, \varphi$ , il campo magnetico  $\mathbf{H}_n$  <sup>(3)</sup> di una di quelle onde ha l'espressione:

$$(1) \quad \mathbf{H}_n = \frac{rg_n}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{b} - rg_n \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{c}$$

ove  $g_n(r)$  è una funzione di  $r$ , di cui ora non è necessario scrivere la forma esplicita, esposta, del resto, in M. S. (formula (2)). Si ha poi:

$$(2) \quad T(\theta, \varphi) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_{n+1}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} (M \cos m\varphi + N \sin m\varphi)$$

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) I. FERRARI, *Multipoli e onde di Schelkunoff*, questi « Rendiconti », 8, XVII, pp. 32-37 (1954). In seguito detta Nota verrà indicata con M.S.

(2) S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves* (Van Nostrand, New York). Cap. X, § 10.

(3) Ovviamente  $n$  è un numero intero, il cui minimo valore è zero e sarà chiamato ordine dell'onda.

ove  $P_{n+1}(\cos \theta)$  è il polinomio di Legendre di ordine  $n+1$ ;  $m$  un numero intero positivo inferiore o al più uguale ad  $n+1$ , ma diverso da zero, altrimenti le onde sarebbero simmetriche; infine  $M$  e  $N$  sono due costanti.

*In questa Nota, limitandoci però al caso  $m=1$  (ci riserviamo di studiare, in altro lavoro, il caso generale), dimostreremo che, per qualunque valore di  $n$ , le onde di Schelkunoff, di cui ora abbiamo scritto l'espressione del campo magnetico, si possono ottenere mediante una combinazione di multipoli posti in  $O$  e opportunamente orientati.*

Per semplicità di esposizione supporremo, fino ad avvertenza in contrario,  $N=0$ ; del resto l'estensione al caso generale  $M \neq 0$ ,  $N \neq 0$ , è, come vedremo, assai facile. Avremo così, in un generico punto dello spazio:

$$(3) \quad \mathbf{H}_n = -\frac{rg_n}{\sin \theta} P'_{n+1}(\cos \theta) M \sin \varphi \mathbf{b} - rg_n \frac{dP'_{n+1}(\cos \theta)}{d\theta} M \cos \varphi \mathbf{c}$$

dove  $P'_{n+1}(\cos \theta)$  è la derivata di  $P_{n+1}(\cos \theta)$  rispetto a  $\theta$ .

2. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $Oxyz$ , l'asse  $z$  coincidente con l'asse polare, il semipiano  $xz$  coincidente col semipiano polare;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  siano, al solito, i versori paralleli agli assi coordinati. Si abbia un dipolo di momento  $\mathfrak{M}$ , posto in  $O$  e parallelo all'asse  $x$ , percorso da corrente sinoidale, di pulsazione  $\omega$  come quella dell'onda di Schelkunoff. Il campo magnetico di questo dipolo vale:

$$(4) \quad \mathbf{H}_x = F(r) (P - O) \wedge \mathbf{i}$$

ove

$$(5) \quad F(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{j\omega \mathfrak{M}}{4\pi r} \right) \exp \left( -\frac{j\omega r}{c} \right) \right]$$

e  $c$  è la velocità di propagazione.

Derivando la (4)  $p$  volte rispetto a  $z$ , applicando la formula di Leibnitz e tenendo presente che è

$$\frac{\partial}{\partial z} (P - O) \wedge \mathbf{i} = \frac{\partial}{\partial z} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

otteniamo l'espressione

$$(6) \quad \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial z^p} = \frac{\partial^p F}{\partial z^p} (P - O) \wedge \mathbf{i} + p \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} \mathbf{j}.$$

Essa rappresenta il campo magnetico di un multipolo di ordine  $p$  parallelo all'asse  $x$ .

Consideriamo anche il campo magnetico di un multipolo di ordine  $p-1$  parallelo all'asse delle  $z$ : per la formula (4) di M.S. (con  $n=p-1$ ) vale

$$\frac{\partial^{p-1} \mathbf{H}_z}{\partial z^{p-1}} = \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} (P - O) \wedge \mathbf{k}.$$

Derivando rispetto ad  $x$  si ha il campo magnetico di un altro multipolo di ordine  $p$ , cioè

$$(7) \quad \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial x \partial z^{p-1}} = \frac{\partial^p F}{\partial x \partial z^{p-1}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k} - \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} \mathbf{j}.$$

Sommando alla (6) la (7) moltiplicata per  $p$ , si ottiene un campo magnetico

$$(8) \quad \mathbf{H}_p^i = \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial z^p} + p \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial x \partial z^{p-1}} = \frac{\partial^p F}{\partial z^p} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} + p \frac{\partial^p F}{\partial x \partial z^{p-1}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k}.$$

Poiché  $(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i}$  e  $(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k}$  sono vettori normali a  $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ , anche  $\mathbf{H}_p^i$  è normale a  $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ , cioè identificando con  $\mathbf{P} - \mathbf{O}$  la direzione di propagazione il campo è trasversale come  $\mathbf{H}_n$ . Si ha così il campo magnetico di due particolari multipoli di ordine  $p$  che costituiranno, per definizione, « un gruppo » di multipoli di ordine  $p$ .

3. Vediamo ora di modificare, in modo opportuno, l'espressione di  $\mathbf{H}_p^i$ . Poiché, come è noto, vale la formula

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

eseguendo il gradiente di ambo i membri di tale relazione, e tenendo presente che

$$\text{grad } x = \mathbf{i}, \quad \text{grad } r = \mathbf{a}, \quad r \text{ grad } \theta = \mathbf{b}, \quad r \sin \theta \text{ grad } \varphi = \mathbf{c},$$

si ha

$$\mathbf{i} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{a} + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{b} - \sin \varphi \mathbf{c}.$$

Allora, ricordando, fra l'altro, che i tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  si suppongono orientati in modo da formare un triedro trirettangolo destro, si ha

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} = r \mathbf{a} \wedge \mathbf{i} = r \sin \varphi \mathbf{b} + r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k} = -r \sin \theta \mathbf{c}.$$

La (8) pertanto diventa

$$(9) \quad \mathbf{H}_p^i = \frac{\partial^p F}{\partial z^p} r \sin \varphi \mathbf{b} + \left( \frac{\partial^p F}{\partial z^p} r \cos \theta \cos \varphi - p \frac{\partial^p F}{\partial x \partial z^{p-1}} r \sin \theta \right) \mathbf{c}.$$

Dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} \right) \frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^{p-1} F}{\partial z^{p-1}} \right) \sin \theta \cos \varphi$$

si ha che la componente lungo  $\mathbf{c}$  di  $\mathbf{H}_p^i$  si potrà scrivere nella forma  $u_3 \cos \varphi$  con  $u_3$ , come risulta dalla (6) di M.S., funzione solo di  $r$  e  $\theta$ . Detta provvi-

soriamente  $u_2 \sin \varphi$ , ( $u_2$  indipendente da  $\varphi$ ) la componente di  $\mathbf{H}_p^i$  lungo  $\mathbf{b}$ , poich  la divergenza del campo magnetico   nulla, si ha

$$\frac{\partial (u_2 \sin \theta \sin \varphi)}{\partial \theta} = - \frac{\partial (u_3 \cos \varphi)}{\partial \varphi},$$

da cui

$$u_3 = \frac{\partial (u_2 \sin \theta)}{\partial \theta}.$$

La (9) dunque diventa

$$(10) \quad \mathbf{H}_p^i = r \frac{\partial^p F}{\partial z^p} \sin \varphi \mathbf{b} + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^p F}{\partial z^p} \sin \theta \right) \cos \varphi \mathbf{c}$$

e questa   la formula cercata per il campo magnetico del « gruppo » di multipoli.

4. Cerchiamo ora di verificare se   possibile esprimere, su una superficie sferica di raggio  $r$ ,  $\mathbf{H}_n$  come combinazione lineare delle  $\mathbf{H}_p^i$ .

Introdotte  $n + 1$  costanti, che indicheremo con  $a_p$ , poniamo

$$(11) \quad \mathbf{H}_n = \sum_p^n a_p \mathbf{H}_p^i.$$

La (11) equivale alle due equazioni scalari

$$(12) \quad -M \frac{r g_n}{\sin \theta} P'_{n+1}(\cos \theta) = \sum_p^n a_p r \frac{\partial^p F}{\partial z^p},$$

$$(12') \quad -M r g_n \frac{dP'_{n+1}(\cos \theta)}{d\theta} = \sum_p^n a_p r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^p F}{\partial z^p} \sin \theta \right),$$

in cui per  la (12')   conseguenza della (12). Baster  perci  scegliere le  $a_p$  in modo da soddisfare solo quest'ultima equazione. Ora in M.S. si sono scritte le equazioni

$$P'_{n+1}(\cos \theta) = - \sum_s^n \alpha_{n,s} \cos^s \theta \sin \theta, \quad \frac{\partial^p F}{\partial z^p} = \sum_s^p A_{p,s}(r) \cos^s \theta,$$

dove  $\alpha_{n,s}$  e  $A_{p,s}(r)$  sono opportune costanti o funzioni di  $r$ .

Pertanto la (12) diventa:

$$M g_n \sum_s^n \alpha_{n,s} \cos^s \theta = \sum_p^n a_p \sum_s^p A_{p,s} \cos^s \theta$$

e, per il principio d'identit :

$$(13) \quad M g_n \alpha_{n,s} = \sum_p^n a_p A_{p,s} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n).$$

La (13) costituisce un sistema di  $n + 1$  equazioni lineari nelle  $n + 1$  incognite  $a_p$ . Ricordando che    $\alpha_{n,s} \equiv A_{p,s} \equiv 0$  quando solo  $n + s$  e  $p + s$  sono numeri dispari, il sistema in esame si scinde in due: uno omogeneo ed uno non omogeneo, i cui determinanti sono entrambi non nulli perch  sono dati dai prodotti delle  $A_{s,s}$  che sono diverse da zero. Allora se, per fissare le

idee,  $n$  è pari, il sistema non omogeneo contiene solo le  $a_p$  con  $p$  pari ed è risolubile in un sol modo, quello omogeneo contiene solo le  $a_p$ , con  $p$  dispari, che risultano nulle.

Poiché risultati analoghi valgono per  $n$  dispari, concluderemo affermando che il sistema (13) determina in modo unico le  $a_p$ , le quali, ragionando come in M.S. (n. 4), risultano indipendenti da  $r$ . Resta con ciò provata la validità della (11) in ogni punto dello spazio; anzi questa relazione vale anche sostituendo al campo magnetico il campo elettrico rispettivamente dell'onda di Schelkunoff e dei multipoli, come si verifica subito, in base alla prima equazione di Maxwell. *Resta così provato che il campo elettromagnetico dell'onda di Schelkunoff di ordine  $n$  è una combinazione lineare del campo di  $n$  gruppi di multipoli di ordine inferiore ad  $n$ , pari o dispari, a seconda che tale è  $n$ .*

5. Nel caso  $M = 0$ ,  $N \neq 0$  basta porre, in luogo di  $\varphi$ ,  $\varphi + (\pi/2)$  per ricondurci al caso già trattato. Ciò equivale a porre il piano polare sul piano  $yz$ . È ovvio perciò che ora il campo dell'onda di Schelkunoff sarà la somma dei campi di multipoli identici ai precedenti salvo lo scambio della  $x$  con la  $y$ . Più in generale, se  $M \neq 0$ ,  $N \neq 0$  il campo dell'onda di Schelkunoff sarà la somma dei campi di tutti i multipoli considerati in entrambi i casi.

Le conclusioni del numero precedente sono perciò, con ovvie modifiche, valide in generale.

Si noti che se  $n = 0$ , si ha  $p = 0$ , cioè il campo della prima onda di Schelkunoff equivale al campo di due dipoli posti in  $O$  e paralleli rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ . Per  $n = 1$ , si ha  $p = 1$ , cioè la seconda onda di Schelkunoff equivale ad un gruppo di quadripoli.

6. Vediamo di determinare esplicitamente l'espressione dei parametri  $a_p$ . A tale scopo constatiamo che, nella (13),  $g_n$  vale  $\exp\left(-\frac{j\omega r}{c}\right)$  moltiplicato per un polinomio in  $r^{-1}$  il cui termine di grado minimo è  $r^{-2}$  con coefficiente 1; invece a secondo membro della stessa equazione le  $A_{p,s}$  sono il prodotto dello stesso esponenziale per un polinomio in  $r^{-1}$  con grado superiore a 2 se  $p > s$ , uguale a 2 se  $p = s$ . In questo caso il coefficiente del termine in  $r^{-2}$ , per il n. 5 di M.S., vale  $\frac{j\omega \mathfrak{M}}{4\pi} \left(-\frac{j\omega}{c}\right)^{s+1}$ . Si ha così da (13), per il principio d'identità:

$$a_s = \frac{\alpha_{n,s} 4\pi M}{j\omega \mathfrak{M}} \left(-\frac{c}{j\omega}\right)^{s+1} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Nel caso  $M = 0$  e  $N \neq 0$  i parametri  $a_s$  contengono la costante  $N$  in luogo di  $M$ .

Notiamo infine che sarebbe facile provare come il campo di un gruppo di multipoli di ordine  $n$  si possa esprimere mediante una combinazione di onde dissimmetriche di Schelkunoff di ordine inferiore o uguale ad  $n$ , con coefficienti coincidenti (a meno delle costanti  $M$  ed  $N$ ) con quelli che esprimono i multipoli simmetrici in funzione delle onde simmetriche di Schelkunoff.



**Fisica teorica.** — *Sull'elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme* <sup>(\*)</sup>. Nota di ANGELO LOINGER, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. P. CALDIROLA.

1. Della equazione relativistica di moto dell'elettrone puntiforme interagente col campo elettromagnetico — indicata sovente nella letteratura col nome di equazione di Dirac-Lorentz — sono state date varie giustificazioni. Limitandoci alle più significative, ricorderemo qui le seguenti quattro: *a*) la giustificazione di Wentzel (1933) <sup>(1)</sup> la quale prende lo spunto dal noto lavoro di Dirac, Fock e Podolsky e si basa essenzialmente su quel procedimento puramente formale di eliminazione delle infinità, che fu più tardi designato col nome di «  $\lambda$ -limiting process »; *b*) la giustificazione di Dirac (1938) <sup>(2)</sup>, profonda ed elegante, fondata principalmente sul teorema di conservazione dell'energia-quantità di moto del campo e. m. e su una opportuna « sottrazione di infiniti », che presenta una qualche somiglianza con il metodo sottrattivo formulato da Dirac agli inizi della teoria del positone; in un lavoro successivo (1939) <sup>(3)</sup> Dirac trascrisse la teoria in una forma hamiltoniana covariante, servendosi del «  $\lambda$ -limiting process »; (osserviamo esplicitamente che, *se si ammette come fisicamente ben fondata la deduzione esposta in* <sup>(2)</sup>, il carattere puramente formale del «  $\lambda$ -process » non presta il fianco ad alcuna obiezione; ma passando alla teoria quantistica si ottiene viceversa una teoria abbastanza gratuita, dalla quale non c'è da aspettarsi la eliminazione di tutte le divergenze; effettivamente, come tutti sanno, l'elettrodinamica quantistica basata sul «  $\lambda$ -process » si dimostrò, negli anni che seguirono, del tutto errata); *c*) la giustificazione di Infeld e Wallace (1940) <sup>(4)</sup>, che prende le mosse da un metodo generale, dovuto ad Einstein, Infeld e Hoffmann <sup>(5)</sup>, atto a fornire le equazioni di moto nella teoria della Relatività; *d*) e infine la giustificazione di Wheeler e Feynman (1945) <sup>(6)</sup>, la quale si differenzia radicalmente dalle precedenti, essendo fondata su una teoria di azione a distanza (la « absorber theory »), anziché su una teoria di campo.

Nella presente Nota esporremo un'ulteriore assai semplice giustificazione, la quale ci sembra particolarmente intuitiva; faremo inoltre qualche

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pavia.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) G. WENTZEL, « Z. f. Physik », 86, 479, (1933).

(2) P.A.M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », A 167, 148 (1938).

(3) P.A.M. DIRAC, « Ann. Inst. Poincaré », 9, 13 (1939); ved. anche *The Principles of Quantum Mechanics*, 3rd edition (Oxford, 1947), p. 289 e sgg.

(4) L. INFELD e P. R. WALLACE, « Phys. Rev. », 57, 797 (1940).

(5) A. EINSTEIN, L. INFELD e B. HOFFMANN, « Ann. Math. », 39, 65 (1938).

(6) J. A. WHEELER e R. P. FEYNMAN, « Rev. Modern Phys. », 17, 157 (1945); ved. inoltre R. P. FEYNMAN, « Phys. Rev. », 74, 939 (1948) (la parte introduttiva della « formulazione matematica »).

breve considerazione sulla questione, più volte dibattuta, delle « runaway solutions » <sup>(7)</sup>.

La giustificazione dell'equazione di Dirac-Lorentz che forma l'oggetto di questa Nota ha tratto origine dalla convinzione (formatasi in seguito agli sviluppi assunti dall'elettrodinamica quantistica dal 1946-7 in poi) che le infinità caratteristiche della teoria classica dell'elettrone puntiforme si possano ragionevolmente eliminare semplicemente precisando il loro significato fisico; o, per dire la cosa più drasticamente, che tali infinità - con una locuzione adoperata da Frenkel <sup>(8)</sup> molti anni or sono a proposito delle difficoltà della teoria dell'elettrone esteso di Lorentz - costituiscano, in un certo senso, un « rein scholastisches Problem ».

2. Facciamo uso di una notazione relativistica simile a quella adoperata da Dirac nel suo libro (3<sup>a</sup> ediz., § 74); e precisamente: si scelgono unità di lunghezza e di intervallo temporale tali che la velocità della luce risulti uguale all'unità; un punto dello spaziotempo è individuato dalle sue tre coordinate cartesiane  $x_1, x_2, x_3$  e dal suo tempo  $t = x_0$ ; poniamo, con notazione vettoriale,  $\mathbf{x} \equiv x_\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ); definiamo il tensore fondamentale al modo seguente:  $g_{00} = 1$ ;  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ;  $g_{\mu\nu} = 0$  ( $\mu \neq \nu$ ); indichiamo con  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$  il prodotto scalare di due tetravettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ;  $z_\mu$  rappresentino le coordinate di un punto sulla linea d'universo dell'elettrone; esse saranno funzioni del tempo proprio  $s$ , definito al modo solito da  $ds^2 = (d\mathbf{z}, d\mathbf{z})$ ;  $dz_0/ds > 0$ ; con  $v_\mu = \dot{z}_\mu$  ( $\equiv dz_\mu/ds$ ) intenderemo la tetravelocità e, finalmente, con  $\square$  l'operatore  $\partial^2/\partial x_0^2 - \nabla^2$ .

3. Tramite i potenziali e. m.  $A_\mu(\mathbf{x})$ , supposti obbedienti al « gauge » di Lorentz, le equazioni di moto del sistema campo elettromagnetico + elettrone puntiforme (di carica  $e$ ) si scrivono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square A_\mu = 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} v_\mu(s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(s)) ds; \\ \partial A_\mu / \partial x_\mu = 0; \\ F_{\mu\nu} = (\partial A_\nu / \partial x^\mu) - (\partial A_\mu / \partial x^\nu); \end{array} \right.$$

$$(2) \quad m_0 \dot{v}_\mu(s) = ev^\nu(s) [F_{\mu\nu}(\mathbf{z}(s)) + F_{\mu\nu, \text{ext}}(\mathbf{z}(s))];$$

ove  $m_0$  rappresenta la massa *meccanica* di quiete dell'elettrone (ossia quella massa che l'elettrone avrebbe se si potesse disaccoppiarlo dal campo e. m.) e  $F_{\mu\nu, \text{ext}}$  è un eventuale campo esterno al sistema, e pertanto indipendente dal moto dell'elettrone.

(7) Osservazioni interessanti su tale questione si possono trovare nei seguenti lavori: M. MARKOV, « J. Phys. USSR », 10, 159 (1946); H. A. KRAMERS, « Rep. Solvay Conference », 1948 (Bruxelles 1950), p. 241; N. G. VAN KAMPEN, « Dan. Mat. Fys. Medd. », 26, no. 15 (1951); G. MORPURGO, « Nuovo Cimento », 9, 808 (1952).

(8) J. FRENKEL, « Z. f. Physik », 32, 518 (1925).

Ovviamente la (2) ha un significato puramente formale. Il nostro problema è di ricavare un'equazione di moto per l'elettrone, nella quale, invece della fittizia  $m_0$ , figurì la massa *sperimentale* di quiete  $m$ .

La soluzione generale delle equazioni di Maxwell (1) si può esprimere comodamente mediante una delle due seguenti uguaglianze:

$$A_\mu = \begin{cases} A'_\mu + A_{\mu, \text{ret}}; \\ A''_\mu + A_{\mu, \text{adv}}; \end{cases}$$

ove  $A'_\mu$ ,  $A''_\mu$  sono tali che:  $\square A'_\mu = \square A''_\mu = 0$ ;  $\partial A'_\mu / \partial x_\mu = \partial A''_\mu / \partial x_\mu = 0$ ; e  $A_{\mu, \text{ret}}$ ,  $A_{\mu, \text{adv}}$  sono i potenziali (ritardati e anticipati) di Liénard e Wiechert. Gli  $A'_\mu$  (risp.  $A''_\mu$ ) sono determinati dalle condizioni supplementari del particolare problema in istudio; ora, in pratica, interessa studiare il moto di un elettrone nello spazio libero sotto l'azione di un campo esterno; in seguito all'interazione con tale campo l'elettrone emetterà della radiazione, la quale sarà costituita di onde divergenti dalla carica; avremo così  $A_\mu = A_{\mu, \text{ret}}$  e quindi  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu, \text{ret}}$ .

Dobbiamo ora valutare la forza che il campo  $F_{\mu\nu, \text{ret}}$  generato dal moto dell'elettrone esercita sull'elettrone stesso. A questo scopo cominciamo con lo scrivere l'espressione di  $F_{\mu\nu, \text{ret}}$  in un punto  $\xi$  assai prossimo ad un generico punto  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(s)$  della linea di universo della particella; sia  $\xi = \mathbf{z}(s) + \gamma$ ; senza ledere la generalità possiamo evidentemente supporre  $(\gamma, \mathbf{v}(s)) = 0$ ; il valore di  $F_{\mu\nu, \text{ret}}$  in  $\xi$  (ved. appendice del lavoro cit. in <sup>(2)</sup>) è uguale, a meno di termini che vanno a zero con  $\gamma$ , a:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu, \text{ret}}(\mathbf{z}(s) + \gamma) = & e [1 - (\gamma, \dot{\mathbf{v}}(s))]^{-1/2} \{ \varepsilon^{-3} [\gamma_\mu v_\nu(s) - \gamma_\nu v_\mu(s)] - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} [\dot{v}_\mu(s) v_\nu(s) - \dot{v}_\nu(s) v_\mu(s)] [1 + (\gamma, \dot{\mathbf{v}}(s))] + \\ & + \frac{1}{8} \varepsilon^{-1} \dot{\mathbf{v}}^2(s) [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] + \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} [\ddot{v}_\mu(s) \gamma_\nu - \ddot{v}_\nu(s) \gamma_\mu] + \\ & + \frac{2}{3} [\ddot{v}_\mu(s) v_\nu(s) - \ddot{v}_\nu(s) v_\mu(s)] \}; \end{aligned}$$

ove  $\varepsilon (> 0)$  è tale che  $\gamma^2 \equiv -\varepsilon^2$  ( $\gamma$  è un tetravettore di tipo spaziale). Moltiplichiamo  $F_{\mu\nu, \text{ret}}(\mathbf{z}(s) + \gamma)$  per  $ev^\nu(s)$  e consideriamo il limite per  $\gamma \rightarrow 0$ ; avremo:

$$\begin{aligned} ev^\nu(s) F_{\mu\nu, \text{ret}}(\mathbf{z}(s)) = & \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ \underbrace{e^2 \varepsilon^{-3} \gamma_\mu}_{\text{[I]}} - \underbrace{(e^2/2) \varepsilon^{-1} \dot{v}_\mu(s)}_{\text{[II]}} + \right. \\ & \left. + \underbrace{(3/8) e^2 \varepsilon^{-1} \dot{\mathbf{v}}^2(s) \gamma_\mu}_{\text{[III]}} + \underbrace{(2/3) e^2 [\ddot{v}_\mu(s) + \dot{\mathbf{v}}^2(s) v_\mu(s)]}_{\text{[IV]}} \right]. \end{aligned}$$

È ora immediato constatare che il campo, chiamiamolo  $\mathfrak{F}_{\mu\nu, \text{ret}}(\xi)$ , generato nel punto  $\xi$  prossimo a  $\mathbf{z}(s)$  da un elettrone il quale si muova di moto rettilineo e uniforme con tetravelocità uguale al valore  $\mathbf{v}(s)$  della tetravelocità dell'elettrone in istudio all'istante  $s$  del tempo proprio di quest'ultimo e che si trovi in tale istante nella posizione  $\mathbf{z}(s)$ , è tale che:

$$ev^\nu(s) \mathfrak{F}_{\mu\nu, \text{ret}}(\mathbf{z}(s)) = e^2 \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\varepsilon^{-3} \gamma_\mu);$$

questa espressione coincide col termine [I] della formula precedentemente scritta, il quale pertanto non è altro che il trasformato di Lorentz della « self-force » coulombiana statica; questo ci consente di affermare senz'altro che il termine [I] non contribuisce alla *effettiva* « self-force » agente sull'elettrone (è infatti evidente che un elettrone puntiforme in quiete, o in moto rettilineo e uniforme, non esercita alcuna azione su se stesso).

Passiamo ora al termine [II]; esso è un termine di tipo « inerziale », data la sua proporzionalità alla tetraaccelerazione  $\dot{v}_\mu(s)$ : possiamo pertanto (rinormalizzazione della massa) unirlo al primo membro della formula (2) e scrivere:

$$\left(m_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\varepsilon}\right) \dot{v}_\mu(s) \equiv m \dot{v}_\mu(s),$$

essendo  $m$  la massa sperimentale <sup>(9)</sup>.

E consideriamo il termine [III]: esso rimane finito per  $\gamma \rightarrow 0$ , ma non può contribuire alla effettiva « self-force », rappresentando, come il termine [I], una azione, creata dalla carica, « simmetrica » rispetto alla carica stessa (per un  $\gamma' = -\gamma$ , [III] muterebbe di segno).

Il termine [IV] rappresenta infine la ben nota « damping-force » relativistica.

In definitiva, avremo la seguente equazione di moto dell'elettrone puntiforme:

$$(3) \quad m \dot{v}_\mu(s) = (2/3) e^2 [\ddot{v}_\mu(s) + \dot{v}^2(s) v_\mu(s)] + e v^\nu(s) F_{\mu\nu, \text{ext}}(z(s)),$$

che non è altro che la solita *equazione di Dirac-Lorentz*.

4. Come è noto la (3), accanto a soluzioni fisicamente accettabili, possiede anche le cosiddette « runaway solutions »; in qualche caso anzi si ha solo la « runaway solution ».

Non vogliamo qui riprendere la questione di tali soluzioni anomale, che è stata già discussa a sufficienza. Ci limiteremo a ricordare, a questo riguardo, una notevole proprietà posseduta dall'equazione di Dirac-Lorentz: come si può mostrare facilmente <sup>(10)</sup>, le « runaway solutions » vengono automaticamente scartate se si risolve la (3) col metodo perturbativo, trattando come piccolo il termine di « damping-force »; più precisamente le soluzioni fisiche sono tutte e sole quelle ottenibili col metodo perturbativo; se, per un certo problema, il metodo perturbativo non converge, ciò vuol dire che quel problema non ammette soluzioni fisiche, e viceversa.

(9) Vogliamo far rilevare che questo è un punto piuttosto delicato, in relazione alla nota circostanza che l'energia e la quantità di moto del campo generato da un elettrone non costituiscono un tetraettore; si osservi, in particolare, che il coefficiente di  $\dot{v}_\mu$ , cioè l'invariante  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (e^2/2\varepsilon)$ , uguaglia esattamente la massa dell'energia del campo coulombiano della particella.

In tali questioni la « many particle theory » di « seconda » quantizzazione (la quale costituisce, dal punto di vista matematico, una teoria di campo) ha portato, come è noto, un certo chiarimento.

(10) H. J. BHABHA, « Phys. Rev. », 70, 759 (1946); ved. anche A. LOINGER, « Nuovo Cimento », 6, 360 (1949).

Grazie al principio di corrispondenza, si sarebbe tentati di concludere che *una situazione di questo genere deve avere delle conseguenze nell'elettrodinamica quantistica*; ed effettivamente, una prima indicazione in questo senso si può desumere dal lavoro di Morpurgo citato in <sup>(7)</sup>.

5. L'elettrone dell'elettrodinamica quantistica « standard », che a tutto oggi è lo strumento migliore di cui si disponga, è essenzialmente un elettrone puntiforme; è questa la ragione che ci ha indotto a riprendere in esame la teoria classica dell'elettrone puntiforme, da un punto di vista il più possibile somigliante a quello dell'odierna elettrodinamica quantistica.

Luttavia nemmeno il procedimento seguito in questa nota fornisce delle indicazioni sostanziali atte a superare la difficoltà delle « r. s. », che, in linea di principio, è una grave difficoltà. Parrebbe proprio di dover concludere che il modello adoperato comporta necessariamente delle incongruenze. D'altro canto, nessuna delle numerose alternative finora formulate (elettrodinamica non lineare di Born ed Infeld, teorie non locali dei vari tipi) è del tutto convincente; inoltre queste teorie, una volta quantizzate (nei casi in cui la quantizzazione si è potuta eseguire), non si sono mostrate superiori all'ordinaria elettrodinamica e, oltre a tutto, han dato luogo a formalismi difficilmente maneggevoli.

È chiaro che le difficoltà, sia della teoria classica che di quella quantistica, sono di natura assai riposta e a tutt'oggi non si vede alcun ragionevole modo di scioglierle.

Ringrazio cordialmente il prof. P. Caldirola per il suo costante interessamento e incitamento.

**Citogenetica vegetale.** — *Struttura molecolare e azione citogenetica e citofisiologica di sostanze del gruppo delle cumarine* <sup>(\*)</sup>  
Nota di ELDA QUERCIOI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. CHIARUGI.

A seguito dei dati preliminari sull'azione citologica della cumarina e delle cumarine sostituite, comunicati in una precedente Nota <sup>(1)</sup>, alla quale rimando per la tecnica e il teste biologico usato nella sperimentazione, riferisco su alcune ulteriori osservazioni che riguardano una parte delle mie ricerche che mi sembrano particolarmente interessanti per il problema dei rapporti fra struttura molecolare dei composti sperimentati e la loro azione biologica. I molteplici effetti citologici e fisiologici provocati dalle sostanze del gruppo delle

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze. Pubblicazione n. 172 del Centro di studio per la Citogenetica Vegetale del C.N.R., Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) E. QUERCIOI, *Sull'azione citologica di cumarine sostituite in rapporto alla loro struttura chimica*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat., ser. 8<sup>a</sup>, vol. 16, fasc. 5, 645-649 (1954).



cumarine, - noti per le ricerche di Östergren<sup>(2)</sup> e mie<sup>(3)</sup>, e poi per quelle di D'Amato e Avanzi<sup>(4)</sup> - che si possono classificare come effetti di: mito-inibizione, di agglutinazione cromosomica (stickiness), di c-mitosi, di azione mutagena, e ai quali si è aggiunto recentemente anche l'effetto rizogeno (D'Amato)<sup>(5)</sup>, dipendono dalla presenza nella molecola: dell'anello lattonico, del sistema dei doppi legami attivati dal gruppo carbossilico, di eventuali radicali sostituenti presenti nei derivati.

Le sostanze a cui si riferisce la mia sperimentazione sono: la cumarina, 4-metil-cumarina, 5-metil-cumarina, 6-metil-cumarina, 7-metil-cumarina, 6-cloro-cumarina, 3-acetil-cumarina, 7-metossi-cumarina, 7-ossi-cumarina o umbelliferone, 7-8-diossiccumarina o dafnetina, 6-7-diossi-cumarina o esculetina,  $\beta$ -metil-dafnetina,  $\alpha$ - $\beta$ -difetil-umbelliferone,  $\alpha$ - $\beta$ -difetil-dafnetina,  $\alpha$ -fenil- $\beta$ -metil-5-ossiccumarina,  $\alpha$ -fenil- $\beta$ -metossi-cumarina,  $\alpha$ -3-4-metilen-diossi fenil-cumarina, che mi sono stati forniti dai professori Guido Bargellini e Angelo Mangini, e dal dott. Fabbrini, che vivamente ringrazio.

È risultato che tutti questi composti posseggono alcune proprietà biologiche fondamentali in comune. La presenza dei due effetti - la inibizione pre-profascica e la agglutinazione cromosomica (stickiness) - riscontrata costantemente, anche se con valore diverso, in tutti i derivati cumarinici sperimentati, può trovare spiegazione nella presenza di quell'anello lattonico che caratterizza la formula delle cumarine. La presenza di questo legame non è esclusiva delle cumarine, d'altra parte però neppure i due effetti su esposti possono considerarsi singolari o specifici. A conferma di questa interpretazione ricordo che anche Brodersen e Kjaer<sup>(6)</sup> riguardo all'attività antibatterica e Audus e Quastel<sup>(7)</sup> riguardo a quella fitocida hanno sottolineato che molte fra le sostanze naturali aventi effetti mitoinibitori hanno una struttura molecolare caratterizzata da un'anello lattonico.

Per quanto riguarda l'attività mutagena, le cumarine hanno - a mio modo di vedere - la caratteristica di attaccare i nuclei quiescenti prima dell'autoriproduzione cromatidica (fase « pre-split ») con conseguente realizzazione di aberrazioni cromosomiche in numero molto superiore a quelle cromatidiali. Questa interpretazione è sostenuta anche da D'Amato e Avanzi per i sei composti cumarinici da essi studiati, mentre, al contrario, Östergren e Wakonig, usando cumarina e colchicina combinate, sostengono che la cumarina attaccherebbe preferibilmente le cellule in divisione (cromosomi mitotici).

(2) G. ÖSTERGREN, *Chromosome bridges and breaks by coumarin*, « Botaniska Notiser », 4, 376-380 (1948) e T. WAKONIG, *A sensitive period at the chromosome breaking activity of coumarin*, « Atti IX Congr. Intern. di Genetica, Bellagio 1953 », in « Caryologia », vol. suppl. al vol. VI, Firenze (1955).

(3) E. QUERCIOLO, loc. cit.

(4) F. D'AMATO e M. G. AVANZI, *The chromosome breaking effect of coumarin derivatives in the Allium test*, « Caryologia », VI, 134-150 (1955).

(5) F. D'AMATO, *Osservazioni cito-istologiche sull'attività antimitotica e rizogena della cumarina e di cinque suoi derivati*, « Caryologia », VI, 160-179 (1955).

(6) R. BRODERSEN e A. KJAER, « Acta pharm. et toxicol. », 2, 109 (1946).

(7) L. F. AUDUS e J. H. QUASTEL, « Nature », 159-320 (1949).

Finora le proprietà delle cumarine di attaccare il nucleo in fase «pre-split» si è dedotta dal fatto che i frammenti comparsi dopo i trattamenti durante la ripresa in acqua sono generalmente doppi alla metafase e all'anafase. Ora questo problema mi sembra definitivamente chiarito da osservazioni sulla frammentazione dei cromosomi in profasi, che sono di particolare importanza al riguardo: infatti con la 6- e la 5-metil-cumarina e con la 7-ossicumarina ho potuto notare profasi ancora fortemente spiralizzate e nuclei, che si possono considerare appena al primo inizio della profasi, i cui cromosomi sono completamente frammentati, direi polverizzati (fig. 1 e 2). Si tratta talvolta di profasi, tra i cui fila-

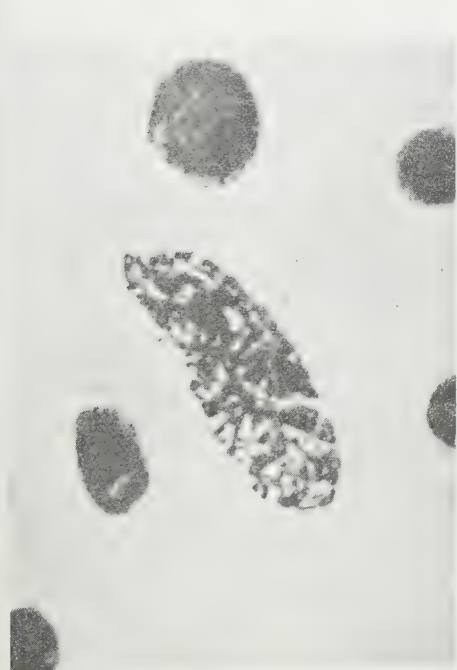


Fig. 1.

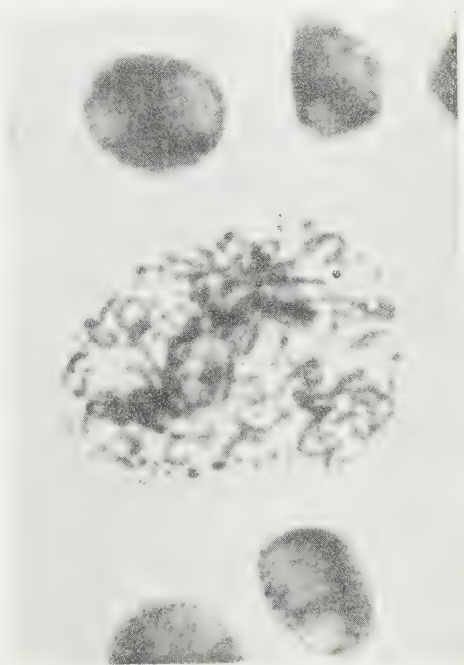


Fig. 2.

menti si rendono evidenti anche alcuni «rings», il che fa pensare che ci sia stato anche il tempo per una restituzione fra le estremità di rottura dei cromosomi.

La presenza di tale intensa frammentazione alle profasi si può – a mio parere – interpretare come una conseguenza dell'azione diretta delle cumarine sui nuclei quiescenti, anche per il fatto che profasi frammentate non si trovano *mai* durante ore di esposizione, ma *sempre* durante la successiva ripresa in acqua.

Ugualmente persuasivi per l'interpretazione del meccanismo di azione dei composti cumarinici in fase «pre-split» sono i fenomeni che si riscontrano nella ripresa in acqua dopo trattamento con la 7-metil-cumarina. Infatti anafasi o metafasi fortemente polverizzate del tutto caratteristiche (fig. 3 e 4) non potrebbero ottenersi dopo 6-7 giorni dal trasferimento in acqua se durante il

trattamento non fossero stati attaccati i nuclei intercinetici, e non semplicemente mitotici, come dicono Öestergren e Wakonig; d'altra parte questi autori hanno sperimentato esclusivamente con la cumarina, che fra l'altro mi risulta la meno attiva dei composti da me adoperati. Più esattamente, questa attitudine alla rottura cromosomica nei nuclei quiescenti è stata ritrovata nei derivati cumarinici che sono anche tipicamente mutageni, sia per il comportamento sia per l'intensità di effetti: non si nota, ad esempio nella 6-cloro-cumarina, nell'esculetina, nella dafnetina, ed altre. Pertanto l'attitudine alla rottura cromosomica di tipo «pre-split» è legata evidentemente a quella particolare

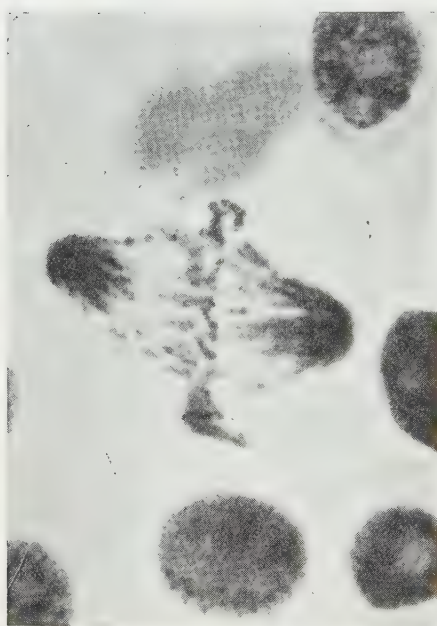


Fig. 3.

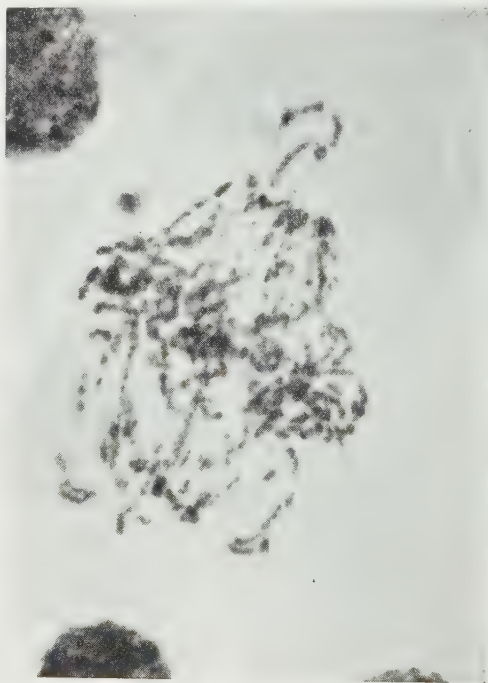


Fig. 4.

configurazione chimica presente nella molecola delle cumarine e responsabile anche dell'attività mutagena del composto, essendo questi due fenomeni decisamente connessi.

Per quanto riguarda l'effetto rizogeno provocato in analoga misura, sia per intensità (numero percentuale delle radici laterali neoformate) sia per la scala delle diluizioni, da tutta la serie di composti da me sperimentati, si può affermare, in base alla loro formula di struttura, che di esso è responsabile un gruppo chimico costituente essenziale della loro molecola. Infatti questa attitudine è provocata non soltanto dalla cumarina avente la configurazione stereochimica più semplice, ma da tutti i derivati aventi gli atomi di idrogeno sostituiti da radicali diversissimi ed in posizione differente. Anche composti come i fenil-sostituiti, la cui formula è appesantita da radicali di vario tipo,

mostrano un effetto rizogeno comune a quello di altre cumarine apparentemente meno complesse. Pertanto i radicali sostituenti, pur avendo una reattività del tutto propria, inerente alla loro configurazione, non sono sufficienti a neutralizzare o ad inibire le proprietà fondamentali della molecola cumarinica. È quindi stabilito che l'effetto rizogeno è una proprietà insita nella struttura fondamentale del composto e del tutto indipendente da ogni sostituzione.

Nei riguardi dell'attività mutagena, ritengo che anch'essa sia una caratteristica inerente alla struttura fondamentale dei composti, per la ragione che anche la cumarina, avente la configurazione più semplice, è dotata di capacità mutative. Ma, contrariamente a quanto avviene per le altre proprietà cumariniche, la mutabilità può essere esaltata o inibita a seconda della natura dei radicali sostituenti.

Infatti, come già comunicai <sup>(8)</sup>, l'aggiunta di un radicale metilico, indipendentemente dalla sua posizione nella molecola, accentua le capacità mutagene della cumarina, a causa di un probabile aumento di elettronegatività dell'atomo di Carbonio al quale è unito <sup>(9)</sup>. Del tutto tipico a questo proposito è il comportamento della  $\beta$ -metil-dafnetina, mutagena, rispetto alla dafnetina (7-8-diossi-cumarina) non mutagena. In questo caso infatti il metile non accentua, ma addirittura *rivela* le capacità mutagene della 7-8-diossi-cumarina. Si può pensare che la presenza del radicale metilico nella  $\beta$ -metil-dafnetina neutralizzi l'azione inibitrice (rispetto alla mutabilità) dell'ossidrile, probabilmente di quello in posizione 8.

Anche per l'esculetina (6-7-diossi-cumarina), la cui attività mutagena è scarsissima o quasi assente, si può dedurre che la presenza di due ossidrili, indipendentemente dalla loro posizione attorno al nucleo benzenico, inibisce le capacità mutagene della cumarina; basta che il nucleo benzenico sia alleggerito da uno degli ossidrili, perché di nuovo possano estrinsecarsi le capacità mutative della molecola cumarinica: infatti l'umbelliferone (7-ossi-cumarina) si è mostrato altamente mutageno. Penso, come scrivevo sopra, che l'ossidrile inibitore delle molecole della 7-8-diossi-cumarina e della 6-7-diossi-cumarina sia molto probabilmente quello in posizione 8 o 6 rispettivamente, considerando che l'umbelliferone, cioè il composto attivo, è una 7-ossicumarina: in ogni modo questa ipotesi ha ancora bisogno di conferma perché può darsi che l'inibizione dell'attività mutagena sia indipendente dalla posizione occupata dai due ossidrili contigui nel nucleo benzenico, mentre invece è ormai chiaro che essa dipende dalla loro duplicità o meno, essendo sempre scarsamente attivi i composti biossidrilati, e attivi quelli monoossidrilati.

In quanto all'influenza dei radicali metilici, di cui già dissi nella precedente Nota <sup>(10)</sup>, posso affermare che il radicale metilico aggiunto nella molecola della

(8) E. QUERCIOLI, op. cit.

(9) G. GIACOMETTI, *Una teoria della reattività chimica applicata alla reazione di apertura dell'anello di cumarine-metilate*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., ser. 8<sup>a</sup>, vol. XVII, 379-384 (1954).

(10) E. QUERCIOLI, loc. cit.



7-ossi-cumarina (cioè il 4-metil-umbelliferone) non sembra esaltare molto la capacità mutagena del composto, o almeno la sua influenza non si rende apprezzabile, dato appunto il fatto che l'umbelliferone per la presenza dell'ossidril in posizione 7 è già molto attivo di suo.

L'introduzione di un atomo di cloro che, come già dissi, quasi annulla la attività mutagena, anche perché ne diminuisce la solubilità, così come ne abbassa le capacità inibitorie della germinazione dei semi <sup>(12)</sup>, permette invece all'effetto rizogeno di estrinsecarsi con particolare intensità e completezza.

La presenza di radicali fenilici *inibisce* completamente l'attività mutagena di due cumarine: questo si può dedurre non tanto dall'attività mutagena della difenil-dafnetina rispetto alla dafnetina, anch'essa priva di capacità mutagene, quanto piuttosto dell'inattività del difenil-umbelliferone rispetto all'attività mutagena della 7-ossi-cumarina.

Un parallelismo fra l'attività antibatterica e quella antimitotica si delinea sui reperti di Del Pianto <sup>(12)</sup>, che ha notato una discreta attività antibatterica da parte dei derivati cumarinici tio-sostituiti e fenil-sostituiti, e di Murti e Seshadri <sup>(13)</sup>, che hanno osservato un aumento di tossicità per i pesci delle 3- e delle 4-fenil-sostituite.

La funzionalità biologica dei radicali sostituenti può essere definita per ora soltanto per alcuni di essi ( $-CH_3$ ;  $-Cl$ ; doppio  $-OH$ ); ma anche per quelli la cui funzionalità non può ancora esser definita si può tuttavia affermare con sicurezza che di per se stessi non conferiscono un potere mutageno al composto cumarinico, ma possono con la loro presenza permetterne, solo l'estrinsecazione o meno. Non soltanto il potere mutageno, ma anche tutte le altre principali caratteristiche dei composti cumarinici - effetto rizogeno, potere mitoinibitore, effetto tossico (stickiness) - dipendono unicamente dalla loro struttura fondamentale. Quanto al problema, da quale delle due funzioni attive presenti nella molecola (anello lattonico e doppio legame attivato dal gruppo carbossilico) dipenda la esplicazione delle attività biologiche dei composti cumarinici, sono dell'opinione che essa molto probabilmente sia causata dalla loro contemporanea presenza.

(11) A. M. MAYER e M. EVENARI, *The relation between the Structure of Coumarin and its Derivatives, and their Activity as Germinations Inhibitors*, « Journ. Experim. Botany », 3 246-252 (1952).

(12) E. DEL PIANTO, *Attività antibatterica di alcune cumarine naturali e sintetiche*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat., ser. 8<sup>a</sup>, vol. VI, 714-720 (1949).

(13) V. V. S. MURTI e T. R. SESHADRI, « Proc. Indian Acad. Sci. », 25, 333 (1947).



**Fisiologia vegetale.** — *Azione dell'acido indolacetico sugli equilibri glucidici di coleoptili d'Avena* (\*). Nota di PAOLA PROFUMO, presentata (\*\*) dal Corrisp. E. REMOTTI.

In precedenti<sup>(1)</sup> ricerche avevamo studiato l'azione dell'acido indolacetico sul processo d'amilogenesi a livello delle cellule stomatiche di Iris, rilevando un effetto di stimolazione che, d'altra parte, aveva un significativo contrasto nella<sup>(2)</sup> inibizione provocata dall'acido transcinnamico, nota antiauxina.

La cellula stomatica presenta però caratteristiche fisiologiche ed anatomiche troppo particolari, perché i dati da essa offerti possano essere generalizzati; e, d'altra parte, nei risultati ottenuti su di essa, è praticamente impossibile discriminare quanto, della variazione terminale del tenore in amido, dipenda da modificazione dell'amilogenesi, e quanto invece da diverso assorbimento di zuccheri (glucosio-1-fosfato) dall'esterno. Era quindi necessario riprendere le osservazioni su un tessuto dotato di una minore specificità di facies funzionale e nel quale, d'altro lato, fosse sperimentalmente possibile disgiungere le due eventualità sopra prospettate.

Abbiamo cominciato le nuove esperienze sul coleoptile d'Avena, tanto più che la sua ben nota sensibilità agli ormoni auxinici, ai fini della crescita, rendeva di particolare interesse studiarne anche la reazione glucidica.

In questo primo gruppo di osservazioni abbiamo seguito:

a) la reazione dei coleoptili all'I.A.A., quale è espressa dal tenore dei glucidi propri del tessuto;

b) la reazione dei coleoptili allo stesso ormone, di fronte alla possibilità di assorbimento glucidico, da una soluzione zuccherina, in cui si trovino immersi.

Il test era fornito dalla concentrazione di riduttori e di polisaccaridi acido-solubili (in prevalenza amido) nelle sezioni trattate, in confronto dei controlli.

Ci limitiamo, per il momento, a riportare i risultati sin qui ottenuti, desunti da numerose serie di esperienze convergenti, riservandocene una più estesa discussione, in riferimento ai dati bibliografici, nel lavoro definitivo.

I semi di *Avena sativa* Victory venivano messi a germinare al buio, a temperatura e umidità costanti, su carta bibula imbibita di acqua distillata; quando i coleoptili erano alti 25-30 mm, se ne prelevavano, a 5-7 mm dall'apice, sezioni di 10 mm, dalle quali, con aghi particolarmente adatti per evitare lesioni, si toglieva il tratto fogliare incluso. Nella prima delle due serie di ricerche tali sezioni erano mantenute, per intervalli da 20 a 24 ore, in soluzione di I.A.A. Nella seconda si partiva da una soluzione base di sac-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico Hanbury, Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) E. MARRÈ e P. PROFUMO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », II, 230 (1951).

(2) P. PROFUMO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », I5, 135 (1953).

carosio 2 ‰, cui si aggiungeva l'acido indolacetico nelle stesse concentrazioni della serie precedente.

In queste preliminari esperienze ci siamo limitati ad una sola concentrazione di I.A.A., usando quella ( $10^{-6}$  M) che dal complesso dei dati bibliografici, e dalle nostre indagini, ci era apparsa tra le più adeguate per rimanere nei limiti di un'azione efficace e non tossica. KCl 0,01 M ed  $\text{MnSO}_4$  100 mg/L venivano aggiunti alle soluzioni, allo scopo di favorire le condizioni di crescita del tessuto. Com'è ovvio, si disponeva di controlli in soluzione salina semplice e, per quel che riguarda il secondo gruppo, anche in soluzione salina e saccarosio. Il materiale veniva tenuto al buio a temperatura di  $25^{\circ}$ - $27^{\circ}$  (cfr. tabelle). Nella preoccupazione, naturalmente, che le condizioni respiratorie dei coleoptili fossero identiche in ogni caso, in tutte le esperienze si usava un ugual numero di segmenti per ugual volume di soluzione, e ci si assicurava che le sezioni affiorassero tutte ugualmente alla superficie del liquido.

Al termine dell'esperimento i segmenti di coleoptile erano lavati, misurati, pesati; su di essi si procedeva poi alla determinazione del tenore glucidico. A questo scopo, ripetuti trattamenti successivi con alcool bollente, seguiti ciascuno da centrifugazione, estraevano dal tessuto i glucidi solubili; mentre l'amido del centrifugato residuo veniva sottoposto ad idrolisi con HCl, onde permetterne il dosaggio sotto forma di monosi. Le due titolazioni erano condotte secondo il metodo Nelson-Somogyi, previa precipitazione, nel caso dei glucidi solubili, con idrato di bario e solfato di zinco.

Riportiamo nelle tabelle I e II alcuni dei risultati, con l'avvertenza che ogni valore, sia di allungamento, sia di peso, è riferito ad un segmento di coleoptile. I dati di crescita sono espressi in ‰ della lunghezza iniziale.

RISULTATI E DISCUSSIONE. - Dalle tabelle emergono alcune relazioni sensibilmente uniformi:

1° Al trattamento con sola soluzione auxinica, per la concentrazione usata, corrisponde, nei coleoptili, una diminuzione di riduttori ed un aumento di amido.

2° Il soggiorno dei coleoptili in soluzioni zuccherine semplici si accompagna invariabilmente ad un aumento di riduttori e di polisaccaridi acidolubili nell'interno delle cellule.

3° La presenza simultanea, nel mezzo, di auxina e di zuccheri, eleva il tenore sia dei riduttori sia dell'amido (a meno che una crescita eccessiva non impedisca l'aumento dei primi).

Nelle condizioni di età dei nostri coleoptili e di livello a cui sono state prelevate le sezioni, in tutte le serie di osservazioni si è manifestata, in modo evidente, un'ulteriore distensione dei tessuti. Tale crescita ha, naturalmente, i suoi valori più bassi per i controlli in acqua o in saccarosio; quest'ultimo stimolando in modo sensibile e costante, ma tuttavia limitato, l'allungamento.

Valori invece spiccatamente più alti si ottengono per applicazione di I.A.A., quadruplicandosi in media i dati dei controlli; mentre un'ulteriore

intensificazione è indotta dalla contemporanea presenza di auxina e saccarosio. Il comportamento di crescita è essenzialmente in armonia con quanto è stato già osservato da vari Autori precedentemente. Così l'azione stimolante del saccarosio solo risulta anche da esperienze di Schneider <sup>(3)</sup> ed altri: Thimann <sup>(4)</sup> la attribuirebbe all'importanza dello zucchero come pietra da costruzione per la membrana; ma è tuttavia possibile vi concorra anche la stimolazione respiratoria che sappiamo (Schumacher) <sup>(5)</sup> esercitata dallo zucchero stesso sui tessuti vegetali. Non occorre neppure soffermarci sugli effetti del trattamento auxinico in assenza o in presenza di saccarosio (Schneider, Bonner <sup>(6) (7)</sup>, Boroughs <sup>(8)</sup> e molti altri): abbiamo riportato i dati relativi alla crescita soprattutto come termini di riferimento per le variazioni glucidiche.

Per quanto concerne queste ultime, passiamo ad esaminare singolarmente i diversi risultati.

I. L'aumento dei polisaccaridi, per trattamento con I.A.A., viene ad allinearsi con i dati da noi osservati a proposito degli stomi, col vantaggio, sul nuovo materiale, di essere indipendente dalle difficoltà, sopra prospettate, dell'assorbimento. Così ci sembra di poter considerare questo nostro reperto come una conferma della stimolazione esplicata dall'auxina sul processo di amilogenesi.

Conferma tanto più valida, a nostro avviso, in quanto i coleoptili sono in fase di attiva distensione e, come abbiamo visto, tuttora pienamente sensibili all'azione dell'ormone.

Aggiungiamo che anche il saccarosio presenta un comportamento analogo ai polisaccaridi. L'estrema delicatezza di una determinazione enzimatica, quale appunto quella necessaria in questo caso, ci ha trattenuto dal riportare i dati sinora da noi raccolti in proposito; ma riteniamo tuttavia di poter affermare un parallelismo con quanto avviene per l'amido.

Di pari passo con l'aumento dei polisaccaridi assistiamo ad una diminuzione dei riduttori. Evidentemente questo fatto deve ritenersi, almeno in parte, conseguenza dell'intensificata amilogenesi, che dai riduttori ha tratto il proprio materiale da costruzione, cui dovremmo aggiungere l'aumento del saccarosio. Ma la concentrazione, nella cellula, di questi componenti, è soggetta a troppi fattori funzionalmente diversi, perché sia possibile limitare le cause delle sue oscillazioni a questa sola variabile, quando, nelle stesse condizioni assistiamo contemporaneamente ad un sensibile movimento di crescita, cui deve corrispondere almeno un'attiva elaborazione dei polisaccaridi della membrana. Anche la neoformazione di proteine protoplasmatiche, qual'è ormai dimostrata per i tessuti in via di distensione, implica consumo di riduttori. Dubbio è invece il concorso della respirazione nel caso

(3) C. L. SCHNEIDER, «Amer. Journ. of Bot.», 25, 259 (1938).

(4) V. THIMANN KENNETH, «Growth.», 15 (1951).

(5) SCHUMACHER, «Planta», 5 (1928).

(6) J. BONNER, «Journ. Gen. Physiol.», 17, 63 (1933).

(7) J. BONNER «Amer. Journ. of Botany», 36, 323 (1949).

(8) H. BOROUGHS and J. BONNER, «Arch. of Biochemistry and Biophysic», 26, 279 (1950).

del coleoptile d'Avena, in quanto non sembra (Christiansen, Kunz, Bonner, Thimann<sup>(9)</sup>; Berger, Smith, Avery<sup>(10)</sup>), nelle nostre condizioni d'esperienza, che in esso la sola aggiunta di auxina risvegli quell'incremento respiratorio che è invece osservato sia nei coleptili di *Zea mays* (French e Beevers<sup>(11)</sup>), sia nei fusticini di pisello (Christiansen, Kunz, Bonner, Thimann), ed in altri tessuti. Ci riserviamo di ritornare su questo problema con ulteriori ricerche.

TABELLA I.

*Allungamento, peso fresco, tenore glucidico, di segmenti di coleoptile d'Avena trattati con acido indolacetico (valori riferiti ad un segmento).*

Condizioni d'esperienza	Trattamento	Peso fresco mg.	Allungamento %	Riduttori γ	Amido γ
I (Soggiorno di 24 ore, alla temperatura di 27°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	9,34	18,3	206	
	I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	12	68,3	138	
II (Soggiorno di 24 ore, alla temperatura di 26°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	11,6	15	168	29
	I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	14,3	60	136	39
III (Soggiorno di 22 ore, alla temperatura di 25°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	12,4	18	125	32
	I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	20,3	72,5	102	48
IV (Soggiorno di 24 ore, alla temperatura di 26°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	12,6	16,8	125	
	I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	17,7	70	76	
V (Soggiorno di 20 ore, alla temperatura di 25°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	18,3	28	156	40
	I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	24,7	76	113,6	45

Complessivamente, queste prime esperienze mostrano come, per effetto della sola azione auxinica, indipendentemente quindi da ogni variazione dell'assorbimento, si sposti l'equilibrio interno tra i glucidi del tessuto a favore dell'amido e, probabilmente, dei disaccaridi, ed a spese dei monosi.

(9) G. S. CHRISTIANSEN, L. J. KUNZ, W. D. BONNER Jr., K. V. THIMANN, « Plant Physiol. », 24, 178 (1949).

(10) J. BERGER, SMITH and G.S. AVERY, « Amer. Journ. of Botany », 33, 601 (1946).

(11) FRENCH and BEEVERS, « Amer. Journ. of Botany », 40, 660 (1953).

TABELLA II.

*Allungamento, peso fresco, tenore glucidico, di segmenti di coleoptile d'Avena, trattati con saccarosio e acido indolacetico (valori riferiti ad un segmento).*

Condizioni d'esperienza	Trattamento	Peso fresco mg.	Allungamento ‰	Riduttori γ	Amido γ
VI (Soggiorno di 22 ore, alla temperatura di 25°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	12,4	18	125	32
	Saccarosio 2 ‰	14,6	25	232	58
	Saccarosio e I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	20	82,5	276	71
VII (Soggiorno di 24 ore, alla temperatura di 26°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	12,6	16,8	125	
	Saccarosio 2 ‰	14,7	31	258	
	Saccarosio e I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	21	90	290	
VIII (Soggiorno di 24 ore, alla temperatura di 25°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	11,6	19	143	
	Saccarosio 2 ‰	12	21	190	
	Saccarosio e I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	16,08	74	214	
IX (Soggiorno di 20 ore, alla temperatura di 25°C. Ph 6,5)	Controlli in H <sub>2</sub> O	18,3	28	156	40
	Saccarosio 2 ‰	21	38	258	55
	Saccarosio e I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	26,8	98	258	54
IX bis (Soggiorno di 24 ore, dello stesso materiale di cui la tabella precedente, alle medesime condizioni d'esperienza)	Controlli in H <sub>2</sub> O	19,8	35	156	50
	Saccarosio 2 ‰	21,4	39	312	58
	Saccarosio e I.A.A. $1,5 \cdot 10^{-6}$ M	36,9	112	236	84

II. Per quanto concerne la seconda serie delle nostre osservazioni, la semplice aggiunta del saccarosio aumenta fortemente la quantità delle diverse frazioni di glucidi del coleoptile: non solo promuove l'amilogenesi, in conformità di quanto sappiamo dal comportamento generale dei più diversi tessuti, ma eleva pure il tenore dei riduttori, forse attraverso l'intensificazione respiratoria, che, come abbiamo già accennato, esso determina.



Su questa condizione base indotta dal saccarosio, l'aggiunta di I.A.A. innesta, a sua volta, un ulteriore aumento dell'amilogenesi: ne resterebbe così confermato ed esteso il dato iniziale.

Nel nuovo quadro però, creato dalla contemporanea presenza di glucidi ed auxina, incide l'andamento della crescita, che ora diviene particolarmente intensa. Di fatto, nelle osservazioni di cui al n. IX, dove l'amido appare sensibilmente invariato nei confronti dei controlli, la crescita aveva raggiunto, già prima del termine consueto, un valore particolarmente elevato; e non è senza importanza il fatto che lo stesso materiale, nel procedere dello sviluppo, ci riconduca al quadro ordinario (n. IX bis).

A differenza delle esperienze del gruppo precedente, in media anche i riduttori aumentano quando l'intensificazione del movimento glucidico, apportata dal saccarosio, venga accresciuta dall'auxina. Tale aumento è tanto più interessante, in quanto viene a trovarsi in netto contrasto con la diminuzione che abbiamo visto verificarsi nelle sezioni trattate con semplice soluzione auxinica. Eppure sono, nelle nuove condizioni, nettamente intensificati i processi che abbiamo allora invocato come cause di un maggior consumo di zuccheri: i processi costruttivi della membrana, durante la crescita, che ha raggiunto ormai il suo culmine; il catabolismo respiratorio, che anche nel coleoptile d'Avena si intensifica quando al solo I.A.A. venga ad aggiungersi il saccarosio (Berger, Smith, Avery, Bonner).

Un tale modificato comportamento dei monosi - al quale, sempre con le riserve sovra esposte su questo punto, ci sembra, da alcune nostre determinazioni, di poter affiancare anche un'elevazione del tenore in saccarosio - ci suggerisce un intensificato passaggio di quest'ultimo dall'esterno, sotto la azione dell'I.A.A. Che ciò avvenga per il semplice fatto dell'aumento della superficie d'assorbimento nei coleptili più estesamente allungati, o non piuttosto per un'intensificata assunzione da parte della cellula, forse in relazione all'incremento respiratorio, ovvero anche per modificazioni della sua permeabilità, è questione che solo ulteriormente potremo affrontare.

Come sempre, anche qui il problema della concentrazione dei monosi è complicato dal fatto che su di essi giocano fattori antagonisti. Così nella tabella (n. IX bis), con un materiale dotato di crescita eccezionalmente rapida, gli zuccheri riducenti, anziché aumentare, diminuiscono, mentre tuttavia persiste l'incremento dell'amilogenesi.

Ci sembra di poter, comunque, sinora concludere, dalle nostre osservazioni e nell'ambito delle nostre condizioni d'esperienza, per *un'intensificazione della sintesi dell'amido, nonché per un incremento dell'assorbimento degli zuccheri, sotto l'azione dell'auxina*. A meglio definire questo reperto sono tuttora in corso ulteriori esperienze, soprattutto su tessuti in cui sia eliminato l'effetto della crescita e nei quali il movimento glucidico, con i relativi processi di amilogenesi e amilolisi, costituisca il momento funzionale dominante.

**Fisiologia.** — *Sul comportamento di animali alimentati con dieta deficiente in sostanze minerali.* Nota di VINCENZO FAMIANI e AMALIA AMICI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Corrisp. G. AMANTEA.

Ricerche eseguite in precedenza da uno di noi in collaborazione con Strada <sup>(1)</sup>, hanno permesso di mettere in evidenza, che si possono mantenere in vita ratti albinì per lunghi periodi — certamente fino oltre 400 giorni — alimentandoli con una dieta deficiente in sostanze minerali, ma per il resto qualitativamente completa. È risultato inoltre <sup>(2)</sup>, che nei ratti giovanissimi, con la stessa dieta, sono possibili fenomeni costruttivi di accrescimento, entro limiti relativamente molto rilevanti. Le condizioni generali degli animali così trattati, da parte un modico, comprensibile stato di anemia ipocronica, sono apparse buone.

Questi risultati contrastavano con quelli ottenuti in precedenza nelle poche classiche esperienze eseguite al riguardo da Forster <sup>(3)</sup>, Lunin <sup>(4)</sup>, Sanarelli <sup>(5)</sup>.

La profonda differenza, o addirittura il contrasto, tra i risultati ottenuti ed i precedenti poteva trovare forse la sua logica spiegazione nel fatto che all'epoca in cui le ricerche di Forster e di Lunin erano state eseguite, l'importanza delle vitamine era affatto ignorata e sicuramente ne erano deficienti o del tutto prive le diete adoperate dai due sperimentatori. Forster inoltre, alimentando i suoi animali con i residui demineralizzati della carne adoperata per la preparazione dell'estratto di Liebig, li esponeva agli effetti dannosi di una carenza molto più complessa che non quella soltanto minerale e vitaminica. Lunin invece si serviva di una dieta sintetica nella quale erano rappresentati — anche se non in proporzioni reciproche perfette — tutti i costituenti alimentari allora conosciuti, ad eccezione delle sostanze minerali, cioè glicidi, lipidi, protidi, ma solo questi.

Ora, bastava considerare tutto ciò che oggi si conosce circa l'essenziale ufficio delle vitamine nell'organismo animale per essere indotti logicamente a ritenere che, con tutta probabilità, appunto all'assenza o presenza di vitamine nella dieta era da riferire la notevole differenza tra i risultati di Forster e di Lunin e quelli ottenuti da Famiani e Strada. Tanto più che il contenuto in ceneri della dieta da questi ultimi due Autori offerta (1,2 %) era assai vicino a quello trovato dai due Autori tedeschi per le diete da loro utilizzate, ed in ogni caso assai lontano dalla quantità (4 %) delle miscele saline, che l'esperienza ha dimostrato necessario aggiungere agli altri costituenti di una dieta sintetica, quando si voglia garantire il perfetto benessere ed accrescimento degli animali.

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) V. FAMIANI e A. STRADA, «Quaderni della Nutrizione», 8, 16 (1942).

(2) V. FAMIANI e A. STRADA, «Fisiologia e Medicina», 13, 217 (1942).

(3) I. FORSTER, «Zeit. f. Biologie», 9, 297 (1873).

(4) N. LUNIN, «Zeit. physiol. Chem.», 5, 31 (1885).

(5) G. SANARELLI, «Riv. Ig. San. Pubbl.», 4, 701 (1893).

Sottoposta tale ipotesi, fatta per spiegare l'accennata divergenza di risultati, al vaglio sperimentale, essa ha trovato piena conferma, sì da permettere a Famiani di affermare e sostenere che la possibilità per i ratti albin, di resistere a lungo agli effetti di una alimentazione deficiente in sostanze minerali, è conseguenza diretta della presenza delle principali vitamine nella dieta, quando in questa anche gli altri costituenti indispensabili siano tutti e proporzionatamente rappresentati <sup>(6)</sup>.

In questa Nota <sup>(6)</sup> si faceva rilevare il vasto campo di studio che la nuova condizione sperimentale schiudeva, e che meritava, per la sua fondamentale importanza, di essere esplorato convenientemente. Infatti si imponeva, ad esempio, lo studio del contenuto minerale di animali allevati, o, se adulti, alimentati a lungo, con la suddetta dieta deficiente; del metabolismo, con particolare riguardo al ricambio minerale, alle proprietà chimiche e chimico-fisiche del sangue e delle urine.

Si faceva rilevare ancora come fosse necessario insistere nello studio delle modificazioni istologiche ed istochimiche non solo per ciò che riguardava le ossa, ma anche per ciò che concerneva gli altri organi; e si anticipava che, nelle prime ricerche eseguite in merito, oltre l'osso, anche altri organi e tessuti apparivano notevolmente danneggiati, e, in maniera particolare, il rene <sup>(7)</sup>.

Successivamente Famiani <sup>(8)</sup> studiava il comportamento del ricambio azotato e dell'eliminazione urinaria del Cl, S, Ca e P durante oltre due mesi di osservazione su animali alimentati con la stessa dieta deficiente in sostanze minerali. Risultava che il bilancio medio giornaliero dell'azoto, positivo durante l'alimentazione completa, appariva in *deficit* durante un primo periodo dell'alimentazione deficiente in minerali, per ritornare positivo entro un tempo relativamente breve. Rispetto a quella del periodo di alimentazione con dieta completa, l'eliminazione urinaria del Ca appariva diminuita durante l'alimentazione deficiente; aumentata invece quella del P, progressivamente decrescente quella del Cl. Sostanziali differenze non si osservavano, a parte un transitorio aumento in fase di bilancio azotato negativo, per quella dello zolfo.

Sperimentando su colom, in condizione di rialimentazione dopo digiuno, lo stesso Famiani <sup>(9)</sup> veniva alla conclusione che non vi è alcuna differenza riguardo al tempo necessario per il recupero del peso perduto fra gli animali rialimentati con dieta sintetica completa e quelli rialimentati con la stessa dieta sintetica, deficiente però in sali minerali, e che in complesso i processi ricostruttivi, nella rialimentazione dopo digiuno, non sono manifestamente influenzati dalla deficienza salina in una dieta per il resto completa, e che gli animali così alimentati, anche intercalando numerosi periodi di digiuno, possono mantenersi in vita per lunghissimo tempo.

(6) V. FAMIANI, « Fisiologia e Medicina », 13, 193 (1942).

(7) Le microfotografie relative alle indagini istologiche al riguardo, non venivano pubblicate perché si riteneva opportuno insistere ulteriormente, specie mancando i *testi* normali relativi ad animali della stessa età.

(8) V. FAMIANI, « Fisiologia e Medicina », 14, (1943).

(9) V. FAMIANI, « Riv. di Biologia », 41, 411 (1949).

In seguito, dell'argomento si occupavano Jasonni e Biavati<sup>(10)</sup>, Borgatti e Jasonni<sup>(11)</sup>. In una bella serie di ricerche, detti Autori non soltanto confermavano i risultati di Famiani e Strada e di Famiani, ma altresì li estendevano sperimentando con una dieta a minor contenuto in ceneri (0,80 ‰); studiavano più dettagliatamente le modificazioni dell'apparato scheletrico e del tessuto osseo, nonché di alcuni organi regolatori del metabolismo e della crescita; le modificazioni del ricambio idrico e di talune sezioni di quello minerale; precisavano le alterazioni della funzione renale, cortico-surrenale e tiroidea, confermando pure così, e meglio precisandolo, quanto anticipato da Famiani<sup>(6)</sup> e più sopra ricordato. Notavano come anche parziali avitaminosi, associate alla carenza minerale, permettessero una sopravvivenza superiore alla prevedibile, e mettevano in rilievo la capacità di adattamento dell'organismo al regime carenzato.

Le numerosissime osservazioni di ricercatori di tutto il mondo hanno ormai da gran tempo stabilito che, quando si alimentano animali sia giovani che adulti – i primi specialmente – con diete sintetiche ottenute mediante l'uso di sostanze pure (glucidi, lipidi, protidi, vitamine), è necessario aggiungere alle stesse una quota minerale, pari al 4 ‰ in peso della dieta. E sono stati escogitati e costituiti miscugli salini che portano il nome dell'Autore che li ha studiati, e che presentano l'uno o l'altro, pur essendo tutti basati sul concetto di apportare alla dieta la quota minerale la più completa ed equilibrata possibile, vantaggi e svantaggi che ne consigliano la diversa applicazione nei diversi casi sperimentali.

Il miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker, nelle numerose ricerche di Famiani, Zagami e collaboratori, si è sempre ed in ogni caso rilevato da ogni punto di vista soddisfacente, ed è stato pertanto sempre da loro adoperato, a preferenza di tutti gli altri, con risultati ottimi.

Ora, è ovvio che nelle diete adoperate in tutte le osservazioni di Famiani, precedentemente citate, non vi è stata aggiunta di detto miscuglio salino se non per i gruppi animali di controllo. Tuttavia l'incinerazione ripetutamente eseguita su campioni della dieta ha rivelato la costante presenza di ceneri, nella quantità dell'1 ‰ circa, che rappresentano, evidentemente, quella quota di minerali tanto intimamente legata alle sostanze pure adoperate da non poter essere asportata nei vari processi di purificazione, dialisi naturalmente esclusa.

Proprio questa piccola aliquota di minerali, fatalmente presente nelle sostanze pure, è la responsabile della possibilità del mantenimento in vita degli animali e dei fenomeni costruttivi di accrescimento in essi osservati, durante una alimentazione deficiente in sostanze naturali, ma per il resto qualitativamente completa. Perché è assurdo pensare a possibilità di vita in totale assenza di minerali. Nulla vieta però di ritenere che accanto ai bioelementi, diremo così, strutturali e pertanto intimamente compenetrati nella compagine

(10) D. JASONNI e F. BIAVATI, « Arch. Sc. Biologiche », 34, 526 (1950).

(11) G. BORGATTI e D. JASONNI, « Arch. Sc. Biologiche », 36, 319 (1952).



molecolare delle sostanze pure adoperate (P dei fosfoproteidi o dell'amido, Ca, ad esempio, della caseina, ecc.), altri bioelementi rimangono anch'essi profondamente legati alla compagine molecolare, anche se non a fini strutturali.

Ora, il primo quesito che si presenta alla mente di chi osservi la questione è ovviamente il seguente: è devoluta, l'accennata benefica influenza sul mantenimento in vita e sull'accrescimento di animali, all'insieme dei bioelementi presenti nelle sostanze pure abitualmente adoperate e non allontanabili da esse, o non piuttosto ad un gruppo o addirittura a qualcuno di essi, singolarmente considerato?

Il quesito però, se facile ad essere posto, non è di altrettanto facile soluzione. O quanto meno la risposta ad esso richiederebbe tutta una serie di ricerche che, già in partenza prevedibilmente assai numerosa, potrebbe rivelarsi suscettibile dei più svariati e assolutamente non prevedibili sviluppi collaterali richiedendo un notevolissimo impiego di tempo; lavoro forse anche di lustri.

Un tentativo di analisi, tuttavia, tendente ad orientare sufficientemente circa la reale importanza del totale, o di una porzione di esso, delle sostanze minerali non allontanabili con i metodi usuali di purificazione delle sostanze cosiddette pure che le contengono (e che rappresentavano l'1 % circa in ceneri della dieta adoperata da Famiani), poteva essere eseguito con facilità ed in tempo breve. Ed è quanto abbiamo fatto e qui riferiamo.

Partendo dal concetto che il miscuglio salino di Pappenheimer, McCann e Zucker, può considerarsi, *grosso modo*, costituito da due parti, l'una rappresentata dal lattato di calcio, cloruro di potassio, carbonato di sodio, carbonato di magnesio, e citrato di ferro presenti in quantità notevoli, l'altra costituita dal restante dei costituenti, tutti presenti in quantità infinitesima, sì da apparire dei veri e propri *microcostituenti*, abbiamo pensato di apportare anzitutto una modifica al miscuglio suddetto. Nel senso che ferma restando la quantità dei microcostituenti in esso rappresentati, sono stati da noi, nella nuova composizione, allontanati alcuni e ridotte in quantità minima le quantità degli altri rappresentanti la frazione diremo così *macrocostitutiva*. Lo specchietto seguente mostra comparativamente la composizione del miscuglio originale e di quello da noi modificato:

Miscuglio salino di Pappenheimer,  
McCann e Zucker:

KCl . . . . .	0,85
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> . . . . .	0,85
MgCO <sub>3</sub> . . . . .	0,286
Calcio lat. . . . .	2
Fe citrato . . . . .	0,10
KI . . . . .	0,0002
MnSO <sub>4</sub> . . . . .	0,00078
NaFl . . . . .	0,0024
KAl(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> . . . . .	0,00024
	<hr/>
	4,08952

Ca lattato . . . . .	0,35
Fe citrato . . . . .	0,10
MgCO <sub>3</sub> . . . . .	0,046
KI . . . . .	0,0002
MnSO <sub>4</sub> . . . . .	0,00078
NaFl . . . . .	0,0024
Kal(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> . . . . .	0,00024
	<hr/>
	0,49962

*Bioelementi rappresentati*

(K, Cl, Na, C, O, Mg, Ca, Fl, I, Mn, S, Fl, Al)

*Bioelementi rappresentati*

(K, Na, C, O, Mg, Ca, Fe, S, Mn, Fl, Al, I)



Gruppo	Numero e sesso dell'animale	Peso iniziale	Valori del peso corporeo in grammi dopo giorni					Aumento assoluto e percentuale di peso			
			10	20	30	40	50	60	dopo 30 giorni		dopo 60 giorni
									Aumento assoluto	Aumento percentuale	Aumento percentuale medio
I	1 ♂	37	44	49	51	67	68	68	14	39	84
	2 ♂	35	46	47	49	65	68	68	14	40	95
	3 ♀	36	43	55	58	61	66	69	22	61	82
	4 ♀	36	45	53	58	65	66	67	22	61	86
II	5 ♂	35	44	48	66	67	87	86	31	88	146
	6 ♂	36	44	50	66	75	85	86	30	82	138
	7 ♀	35	44	54	59	65	76	75	24	68	115
	8 ♀	35	46	54	57	65	73	75	22	63	115
III	9 ♂	35	52	75	91	87	114	116	56	160	233
	10 ♂	35	54	75	93	97	115	116	58	163	233
	11 ♀	36	36	68	84	84	85	88	48	134	145
	12 ♀	36	57	68	85	86	86	88	50	139	145
IV	13 ♂	37	50	62	73	86	96	98	36	98	164
	14 ♂	37	45	60	76	87	97	99	39	104	166
	15 ♀	35	44	54	65	76	84	87	30	86	150
	16 ♀	35	44	53	65	75	83	85	30	86	142
V	17 ♂	35	46	55	60	75	85	86	25	71	146
	18 ♂	35	45	55	61	73	83	84	26	72	138
	19 ♀	37	45	68	77	89	90	90	40	108	142
	20 ♀	37	46	66	78	87	88	89	41	109	140
VI	21 ♂	35	47	60	66	68	76	84	31	90	140
	22 ♂	35	47	61	65	69	76	85	30	89	144
	23 ♀	35	48	55	66	71	76	84	31	90	140
	24 ♀	35	47	56	66	72	75	84	31	90	140
VII	25 ♂	37	44	52	74	84	99	108	37	100	190
	26 ♂	37	43	53	75	84	98	106	38	101	184
	27 ♀	37	54	63	75	86	97	106	38	101	184
	28 ♀	38	55	67	78	88	98	106	37	99	180
									100.25		
									186		

Ciò premesso, ci siamo proposti di studiare, su ratti albinici giovanissimi, l'andamento dei fenomeni costruttivi di accrescimento, alimentandoli con dieta, ad eccezione dei costituenti minerali, sicuramente per il resto completa dal punto di vista qualitativo.

Però questa volta, anziché valerci di sostanze pure abbiamo preferito servirci di un alimento naturale, un semolino glutinato che in precedenti, numerose ricerche di Famiani aveva dimostrato di essere assolutamente adatto allo scopo. Poiché era nel nostro intendimento aggiungere al semolino soltanto assai piccole quantità del miscuglio salino da noi modificato, in confronto con quantità corrispondenti del miscuglio originale, abbiamo di que-

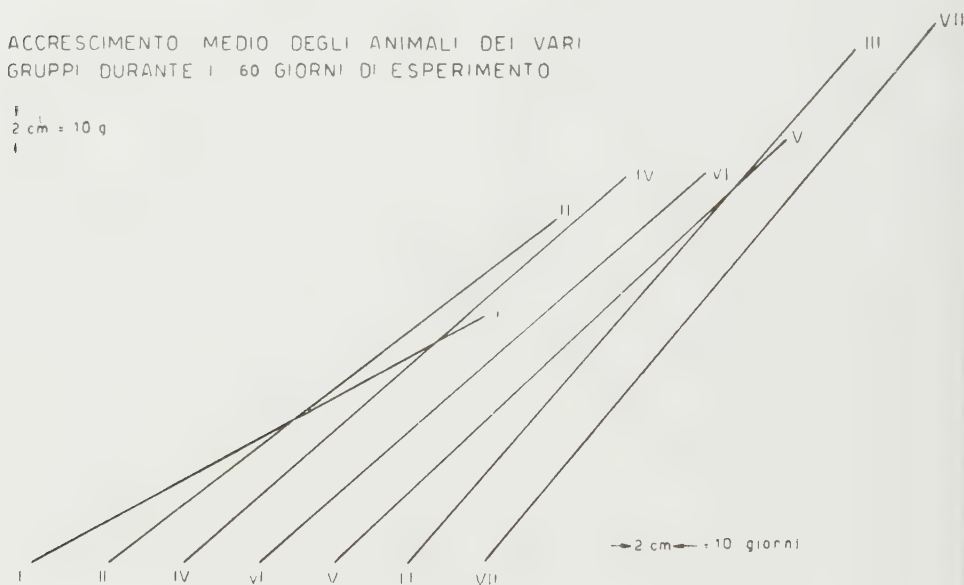


Fig. 1.

st'ultimo cimentato al vaglio dell'esperimento anche dosi scalari in diminuzione.

Ci siamo serviti a tale scopo di n. 28 ratti albinici di ambo i sessi, di età intorno ai 30 giorni e di peso oscillante fra i 30 e i 39 grammi, provenienti tutti dallo stesso allevamento e naturalmente, è ovvio dirlo, da madri della stessa età e tenute in condizioni di ambiente e di alimentazione assolutamente identiche. Divisi in 7 gruppi costituiti ognuno da 2 maschi e 2 femmine, detti animali furono posti in una gabbia a scomparti separati, e così esclusivamente alimentati:

Gruppo 1. - Solo semolino (contenuto in ceneri 0,70 %).

Gruppo 2. - Semolino + 4 % miscuglio salino di Pappenheimer McCann e Zucker.

Gruppo 3. - Semolino + 2 % di detto miscuglio.

Gruppo 4. - Semolino + 1 % di detto miscuglio.

Gruppo 5. — Semolino + 0,50 % di detto miscuglio.

Gruppo 6. — Semolino + 0,50 % del miscuglio da noi modificato e la cui composizione è stata in precedenza riportata.

Gruppo 7. — Controlli ad alimento misto ordinario.

Tutti gli animali avevano acqua distillata ed alimento a volontà; tanto l'uno che l'altro venivano rinnovati giornalmente.

L'unità tabella ed il grafico mostrano chiaramente il comportamento degli animali durante i 60 giorni di osservazione.

Dal loro esame risulta che per ciò che riguarda i fenomeni costruttivi di accrescimento, in tutti i casi gli animali alimentati con semolino più il 4 %, 2 % e 1 % di miscuglio salino completo non presentarono sostanziali differenze di comportamento rispetto agli animali di controllo ad alimento misto.

Più bassa, ma solo lievemente, apparve la curva di accrescimento degli animali trattati con semolino più 0,50 % di miscuglio salino completo o più 0,50 del miscuglio modificato. *Le curve però degli animali di questi due ultimi gruppi (V e VI, quelli cioè alimentati col semolino più 0,50 % di miscuglio completo e quelli alimentati con lo stesso semolino più 0,50 % di miscuglio modificato) sono apparse tra loro assolutamente identiche.*

In epoca affatto normale avvenne nelle femmine di tutti i gruppi la schiusura dell'ostio vaginale e nei maschi di tutti i gruppi la discesa dei testicoli nelle borse.

Così che, in conclusione, e limitatamente alla parte che più direttamente ci interessa per il momento, si può dire che nessuna differenza è stata possibile osservare negli animali in esperimento, quando ad una piccola quantità (0,50 %) di miscuglio salino completo, è stata sostituita una corrispondente quantità (0,50 %) di miscuglio salino modificato, nel quale in effetti solo la parte microcostitutiva era corrispondente a quella del primo.

Dal che si potrebbe dedurre che il ruolo più importante, nei riguardi della possibilità del mantenimento in vita e dell'accrescimento di giovani animali alimentati esclusivamente con dieta deficiente in sostanze minerali, è sostenuto dai microcostituenti della quota minerale residua nelle sostanze pure dai processi di trattamento purificativo.

Con ciò, è ovvio, nessuno intende togliere nulla alla importanza dei bielementi rappresentati nella parte macrocostitutiva.

Questa cui qui si accenna non vuole avere altro valore che quello di ipotesi di lavoro.

Ipotesi di lavoro la cui attendibilità ci riserviamo di commentare e discutere in altra Nota, insieme con l'analisi dettagliata di tutti i dati desumibili dalla tabella e dal grafico, quando saremo in possesso dei risultati che attendiamo da una serie parallela di ricerche, eseguite però con la dieta sintetica a base di sostanze pure, sempre in precedenza adoperata da uno di noi.

**Fisiologia.** — *Effetti della stricninizzazione del lobulus ansiformis sull'attività elettrica della corteccia cerebrale* (\*). Nota di RENZO CANESTRARI, PAOLO CREPAX e XENIA MACHNE, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Nel 1938 Walker<sup>(1)</sup> osservò che nel Gatto la stimolazione faradica del *lobulus ansiformis* del cervelletto determina un aumento della frequenza e dell'ampiezza delle onde elettriche del giro sigmoideo contralaterale; modificazioni analoghe, ma meno nette potevano registrarsi dalle circonvoluzioni parietali e temporali, mentre ogni effetto mancava nei lobi occipitali. Walker riferisce di aver effettuato in due casi la stricninizzazione della corteccia neocerebellare, senza osservare alcuna modificazione dell'elettrogramma corticale. Le osservazioni di Walker circa all'azione della stricnina non avevano carattere sistematico, il che probabilmente spiega come ad esse l'A. non dedichi alcun commento nella discussione dei risultati sperimentali. Il mancato effetto della stricnina poteva del resto dipendere da cause diverse che enumeriamo in breve.

1. Ricerche elettrofisiologiche di Dow<sup>(2)</sup>, eseguite nel medesimo anno e nel medesimo laboratorio, dimostravano come la stricnina applicata localmente eserciti un'azione deprimente sui neuroni cerebellari: i risultati negativi di Walker non potevano perciò sorprendere. È da ricordare tuttavia come il Rossi<sup>(3)</sup>, eseguendo la stricninizzazione del *neocerebellum*, avesse osservato effetti analoghi a quelli ottenuti mediante stimolazione elettrica.

2. Com'è noto, il metodo della neuronografia mediante stricninizzazione locale [Dusser de Barenne e Mc Culloch<sup>(4)</sup>] è stato largamente impiegato per la delimitazione dei prolungamenti neuronici nel sistema nervoso centrale. E l'interpretazione dei risultati ottenuti con tale metodo d'indagine, è stata in genere formulata presumendo [Frankenhaeuser<sup>(5)</sup>] che la scarica sincrona dei neuroni stricninizzati non si trasmetta ai neuroni con cui essi sono in connessione sinaptica; l'attività di questi ultimi non solo non assumerebbe mai i caratteri dello *spike* stricninico, ma nel più dei casi non sarebbe affatto

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) A. E. WALKER, « J. Neurophysiol. », I, 16 (1938).

(2) R. S. DOW, « J. Physiol. », XCIV, 67 (1938).

(3) G. ROSSI, « Arch. Fisiol. », X, 389 (1912).

(4) J. G. DUSSER DE BARENNE a. W. S. MC CULLOCH, « Amer. J. Physiol. », CXXVII, 620 (1939).

(5) B. FRANKENHAEUSER, « J. Neurophysiol. », XIV, 73 (1951).

modificata. Sebbene la validità di tale presupposto si possa ritenere verificata solo in particolari condizioni sperimentali, è chiaro che l'assenza degli effetti della stricninizzazione cerebellare a livello della corteccia cerebrale, potrebbe anche dipendere dal fatto che l'eccitazione prodotta dalla stricnina non si propaga attraverso le sinapsi ovvero ciò avviene in misura limitata.

3. Le ricerche intorno agli effetti della stricnina sui neuroni cerebellari, hanno dato evidenza a un fatto singolare: applicata localmente, la sostanza non modifica i caratteri dell'elettrogramma cerebellare derivato mediante macro-elettrodi [Kornmüller<sup>(6)</sup>, Dow<sup>(2)</sup>, Gualtierotti e Capraro<sup>(7)</sup>, Bremer e Bonnet<sup>(8)</sup>], ma aumenta la scarica unitaria registrata mediante microelettrodi [Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(9)</sup>] e modifica la risposta cerebellare a stimolazioni afferenti [Bremer e Bonnet<sup>(10)</sup>]. La comparsa duratura, nell'elettrogramma cerebellare, di onde lente (10-30 al sec) e di voltaggio elevato si osserva anche derivando mediante macroelettrodi, quando la stricnina venga introdotta per via generale [Gualtierotti e Capraro<sup>(7)</sup>; Markham, Browne, Johnson e Walker<sup>(11)</sup>, Ruf<sup>(12)</sup>, Marossero e Garrone<sup>(13)</sup>], ma le onde registrate in tali condizioni non sono che l'espressione dell'attività convulsiva propagata [Gualtierotti e Capraro<sup>(7)</sup>, Bremer e Bonnet<sup>(8)</sup>], rappresentando ciascuna di esse la risposta della corteccia cerebellare alle scariche originate dai centri spinali e bulbari che sono sede dell'attività convulsiva.

In sostanza, l'azione attivante della stricnina sui neuroni cortico-cerebellari è stata accertata solo ricorrendo a particolari procedimenti di derivazione. Resta a stabilire quali conseguenze funzionali possa avere in parti del cervello collegate anatomicamente col cervelletto, l'aumento della scarica unitaria registrabile mediante microelettrodi.

Gli esperimenti che abbiamo intrapresi a fine di chiarire tale questione, ci hanno dato agio d'indagare l'impiego della stimolazione stricninica della corteccia cerebellare come metodo di studio delle proiezioni cerebellifughe.

Nel Cane e nel Gatto abbiamo ricercato gli effetti della stricninizzazione locale del *lobulus ansiformis* sull'attività elettrica spontanea degli emisferi cerebrali (*gyrus centralis anterior*, *gyrus suprasplenialis*, *gyrus entolateralis*, *gyrus ectolateralis*, *gyrus ectosylvius*).

La derivazione dei potenziali elettrici corticali era effettuata col metodo bipolare mediante elettrodi avvitati alla teca cranica e la cui estremità giun-

(6) A. E. KORNMÜLLER, « Fortschr. Neur. », VII, 1 (1935).

(7) T. GUALTIEROTTI e V. CAPRARO, « Arch. Sci. biol. », XXVII, 247 (1941).

(8) F. BREMER et V. BONNET, « J. Physiologie », XLV, 53 (1953).

(9) M. BROOKHART, G. MORUZZI a R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1949).

(10) F. BREMER et V. BONNET, « Folia psychiat., neurol. neurochir. neerl. », LVI, 438 (1953).

(11) J. W. MARKHAM, K. M. BROWNE, H. C. JOHNSON a A. E. WALKER, « Res.

Publ. Ass. nerv. ment. Dis. », XXII, 282 (1952).

(12) H. RUF, « Nervenartz », XXX, 437 (1951).

(13) F. MAROSSERO a M. GARRONE, « EEG clin. Neurophysiol. », IV, 232 (1952).



geva a contatto con la superficie esterna della dura madre; per la registrazione dei potenziali medesimi ci siamo serviti di un elettroencefalografo Grass modello III B a otto penne scriventi.

I risultati ottenuti possono riassumersi come segue.

La stricninizzazione del *lobulus ansiformis* del cervelletto (applicazione di dischetti di carta bibula, del diametro di mm 5 imbevuti di una solu-

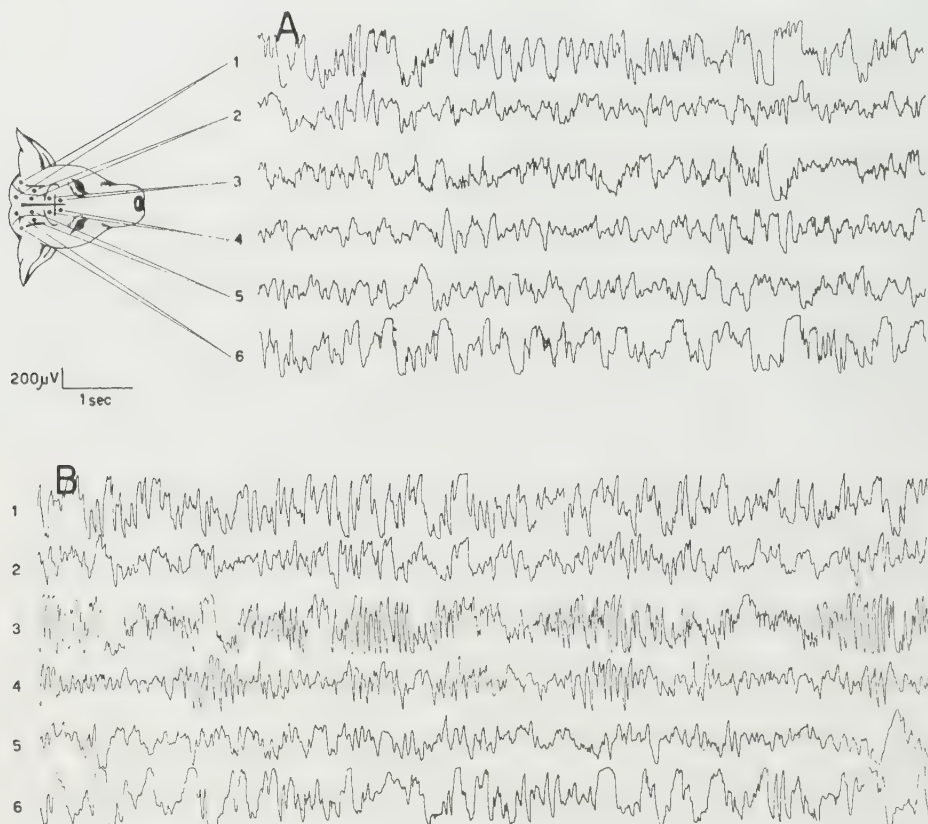


Fig. 1. Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Cane per effetto dell'applicazione di stricnina sul *lobulus ansiformis* di destra.

A: tracciato normale. B: 7 minuti dopo stricninizzazione, si nota un aumento dell'ampiezza dei potenziali elettrici derivabili dall'area corticale motrice sinistra, contralaterale rispetto all'emisfero cerebellare stricninizzato (derivazione 3); modificazioni analoghe, ma meno importanti, manifesta l'attività elettrica dell'area corticale motrice destra (derivazione 4), mentre l'elettrogramma della corteccia parietale (derivazioni 2 e 5) e occipitale (derivazioni 1 e 6) di entrambi gli emisferi non cambia aspetto.

zione all'1 % di nitrato di stricnina) provoca nel Cane costantemente un aumento notevole dell'ampiezza dei potenziali elettrici della corteccia cerebrale motrice contralaterale (fig. 1). Anche i potenziali dell'area motrice ipsilaterale spesso aumentano di ampiezza, ma in misura minore. È raro che un aumento leggero di ampiezza delle pulsazioni elettriche corticali si osservi nelle circonvoluzioni parieto-occipitali, mentre è sempre immutato il tracciato derivato dai lobi occipitali.

Nel Gatto si notano fatti analoghi a quelli osservati nel Cane, ma gli effetti della stricninizzazione cerebellare sull'attività elettrica corticale sono meno costanti e mancano ogniqualvolta si esperimenti su animali narcotizzati. L'influenza dannosa del cloralosio è stata da noi accertata anche per quelle dosi subnarcotiche (15–27 mg/kg), che in esperimenti di altro ordine risultano prive di ogni effetto depressivo sull'eccitabilità della corteccia cerebellare a stimoli elettrici [Moruzzi<sup>(14)</sup>]. In animali operati in leggiera narcosi eterica, l'applicazione di stricnina sul *lobulus ansiformis* produce invece i fenomeni descritti, quando si lasci trascorrere un tempo sufficiente tra intervento operatorio e inizio delle registrazioni. Perdite profuse di sangue nel corso della preparazione dell'animale ovvero alterazioni della circolazione venosa reflua dal cervelletto, conseguenti a lesioni dei seni venosi, diminuiscono la risposta dei neuroni cerebellari alla stricnina.

I fatti ora ricordati sono comprensibili: nelle Memorie dedicate all'analisi sperimentale delle funzioni cerebellari si fa spesso menzione dell'effetto deprimente che lo stato di narcosi [Rossi<sup>(3)</sup>, Ricci e Zanchetti<sup>(15)</sup>], l'abbassamento della pressione arteriosa [Dow<sup>(2)</sup>] e le alterazioni della circolazione venosa reflua [Hampson<sup>(16)</sup>] manifestano sull'eccitabilità della corteccia cerebellare. Sul fondamento di quanto abbiamo dianzi esposto, si deve però ammettere che i diversi fattori ora ricordati incidono più gravemente sulla eccitabilità chimica che su quella elettrica e che in ogni caso i loro effetti sono più rilevanti nel cervelletto di Gatto che in quello di Cane: per quanto concerne questa specie, per esempio, risultati assai buoni e costanti hanno gli esperimenti di stricninizzazione cerebellare eseguiti su animali narcotizzati sia con cloralosio (50 mg/kg per via intraperitoneale), sia con morfina (10 mg/kg per via sottocutanea) associata, durante le manovre chirurgiche, a inalazione di narcotici volatili.

Va richiamata l'attenzione sul fatto che la stricninizzazione della corteccia neocerebellare non produce effetti sovrapponibili a quelli che compaiono per l'applicazione di stimoli elettrici sugli stessi punti: la stimolazione elettrica provoca d'ordinario modificazioni dell'attività spontanea di una estesa zona corticale (aree motrici e corteccia parieto-temporale dei due lati), mentre gli effetti della stricninizzazione del *lobulus ansiformis* sono il più spesso circoscritti al giro sigmoideo contralaterale rispetto all'emisfero cerebellare stimolato. È possibile che la differenza ora rilevata sia soltanto di ordine quantitativo, quando una risposta localizzata si consideri l'effetto di una stimolazione relativamente poco intensa e una risposta diffusa all'opposto la conseguenza di una stimolazione più forte. Converrà tuttavia avere presente un'altra possibilità, in relazione a fatti e ipotesi recentemente messi in chiaro intorno alla mediazione degli impulsi nel sistema nervoso centrale.

(14) G. MORUZZI, « Arch. Fisiol. », XXXVIII, 36 (1938).

(15) G. F. RICCI e A. ZANCHETTI, « Arch. Fisiol. », LIII, 162 (1953).

(16) J. L. HAMPSON, « J. Neurophysiol. », XII, 37 (1949).

L'azione convulsivante della stricnina è stata riferita all'inibizione della scissione enzimatica di un mediatore diverso dall'acetilcolina, mediatore che Hellauer e Umrath<sup>(17, 18)</sup> hanno chiamato « dei neuroni sensitivi ». D'altra parte, esperimenti di diverso ordine [Feldberg e Vogt<sup>(19)</sup>, Umrath<sup>(20, 21)</sup>, Lembeck<sup>(22)</sup>, Kopera e Lazarini<sup>(23)</sup>, Florey<sup>(24)</sup>, Zetler e Schlosser<sup>(25)</sup>] sono venuti avvalorando il concetto che nel sistema nervoso centrale la formazione e la trasmissione degli impulsi non si attuino con meccanismo unico nei diversi neuroni, i quali andrebbero distinti in colinergici e non. Ora, se in via d'ipotesi ammettiamo che i neuroni della corteccia cerebellare non appartengano a un unico sistema<sup>(26)</sup>, i diversi effetti della stricninizzazione e della stimolazione elettrica potrebbero dipendere dal fatto che la stricnina attiverrebbe solo i neuroni suscettivi al mediatore dei neuroni sensitivi, mentre l'attivazione prodotta dallo stimolo elettrico si estenderebbe indiscriminatamente a tutti i neuroni. Tale interpretazione va vagliata con l'esperimento.

**Biologia.** — *Sviluppo dell'arto nei trapianti xenoplastici tra Anfibi Anuri e Urodeli.* — *Correlazioni fra arto e cinto* (\*). Nota di ALDO ROSSI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nel presente lavoro espongo i risultati preliminari che ho ottenuto da una serie di ricerche sul trapianto dell'abbozzo dell'arto tra Anfibi Anuri e Urodeli. Esse si ricollegano da una parte, a quelle eseguite dal Cotronei<sup>(1)</sup> e allievi dal 1929 in poi, sulla diversa compatibilità nei trapianti xenoplastici fra Anuri ed Urodeli e dall'altra, avendo io particolarmente di mira le correlazioni esistenti fra arto libero e cinto nei trapianti xenoplastici, a quelle che dal 1946 in poi ha eseguito nello stesso Istituto il Perri sul complesso

(17) H. F. HELLAUER u. K. UMRATH, « Pflüger's Arch. ges. Physiol. », CCXLIX, 619 (1948).

(18) H. F. HELLAUER u. K. UMRATH, « Zeit. Vitamin-, Hormon-, Fermentforschung », III, 249 (1949).

(19) W. FELDBERG a. M. VOGT, « J. Physiol. », CVII, 372 (1948).

(20) K. UMRATH, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », CCXIX, 148 (1953).

(21) K. UMRATH, « Pflüger's Arch. ges. Physiol. », CCLVIII, 230 (1953).

(22) F. LEMBECK, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », CCXIX, 197 (1953).

(23) H. KOPERA u. W. LAZARINI, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », CCXIX, 214 (1953).

(24) E. FLOREY, « Arch. internat. Physiol. », LXII, 33 (1954).

(25) G. ZETLER u. L. SCHLOSSER, « Pflüger's Arch. ges. Physiol. », CCLIX, 303 (1954).

(26) FELDBERG e VOGT<sup>(19)</sup> hanno dimostrato come la corteccia cerebellare possieda un'attività acetilcolinosintetica assai bassa in confronto ad altre regioni del S.N.C.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) G. COTRONEI e A. SPIRITO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, 10, 212 (1929).

« Induttore-Competenza » nell'induzione di arti soprannumerari negli Anfibi Anuri.

Dalle ricerche di molti Autori risulta che solamente la somatopleura del tronco ha capacità o « Competenza » a dare origine a degli arti e precisamente le zone degli arti normali e la parte compresa fra esse. Sperimentalmente la formazione degli arti soprannumerari, viene indotta trapiantando nella zona del tronco, con tale competenza, o un abbozzo di un arto (Induzione omogenetica), o altri abbozzi, come appunto si è ottenuto con il trapianto dell'otocisti (Balinsky <sup>(2)</sup> in Triton), dell'abbozzo olfattorio (Glick <sup>(3)</sup> in Amblystoma) e di alcuni altri (Induzione eterogenetica) oppure con abbozzi che vanno in citolisi ad esempio quelli per röntgenirradiazione.

La capacità arto-formativa della somatopleura, tanto negli Anuri che negli Urodeli, varia a seconda della zona in cui tale stimolo ha agito. Infatti Balinsky dal 1925 in poi, nelle sue ricerche sugli arti soprannumerari degli Urodeli mette in evidenza che la somatopleura anteriormente all'ottavo-nonno segmento dà sempre origine ad arti anteriori e prima dell'ottavo-settimo sempre arti posteriori (1933) <sup>(4)</sup>. Perri <sup>(5)</sup> negli Anuri trova che gli arti anteriori e posteriori, sempre vengono indotti rispettivamente nella metà anteriore e posteriore del tronco. La presenza di una zona intermedia è confermata dalla possibilità di indurre in essa tanto arti anteriori che posteriori. Perri negli Anuri, osserva che la lunghezza degli arti indotti va aumentando dalla zona dell'arto anteriore a quello posteriore e che il massimo della frequenza dell'induzione è nel terzo posteriore del tronco (1951) <sup>(6)</sup>. Gli arti indotti negli Urodeli non presentano differenze di lunghezza ed il massimo della frequenza dell'induzione è intorno al sesto segmento (Balinsky 1933) <sup>(7)</sup>.

Per ciò che dovrò dire in seguito, ricordo che secondo le ricerche di Detwiler (1918) <sup>(8)</sup> è tipicamente a mosaico il cinto anteriore degli embrioni di Urodeli e dagli studi più recenti di Balinsky (1929) <sup>(9)</sup>, vi è una distinzione fra il mesenchima dell'arto anteriore da quello che forma il suo cinto. Perri (1951) <sup>(10)</sup> osserva che negli Anuri, pur avendosi fatti sia di regolazione che di mosaico, è tuttavia essenzialmente regolativo il sistema arto libero-emicinto, sia per gli arti anteriori che per quelli posteriori.

Come sopra ho accennato, Perri da molti anni sta svolgendo le sue ricerche sul complesso « Induttore-Competenza », trapiantando sul tronco di vari Anfibi Anuri abbozzi embrionali röntgenirradiati con dosi letali. Il profes-

(2) B. I. BALINSKY, « Arch. Entw. mech. », 105, 718 (1925).

(3) B. GLICK, « Anat. Rec. », 48 (1931).

(4) B. I. BALINSKY, « Arch. Entw. mech. », 130, 704 (1933).

(5) T. PERRI, « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, 3, 41 (1951).

(6) T. PERRI, « Riv. Biol. » 44, 182 (1952).

(7) B. I. BALINSKY, « Arch. Entw. mech. », 130, 704 (1933).

(8) S. R. DETWILER, « J. Exp. Zool. », 25, 499 (1918).

(9) B. I. BALINSKY, « Arch. Entw. mech. », 116, 604 (1929).

(10) T. PERRI, « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, 3, 41 (1951).



sore Cotronei mi ha consigliato di applicare la metodica dei trapianti fra Anuri ed Urodeli per approfondire la conoscenza della meccanica causale degli arti, cominciando con lo studio delle correlazioni fra arto e cinto.

Necessariamente, come prima condizione perché si possano ottenere risultati è che sia sufficientemente duratura la combinazione fra questi due Anfibi usati. Cotronei che fin dal 1929 ha dato inizio alle ricerche sulla compatibilità, osserva che, trapianti di abbozzi embrionali di *Triton* su *Hyla arborea*, vanno in distruzione solo in un tempo molto avanzato della vita larvale dell'Anuro portatore (1931) <sup>(11)</sup>. Nello stesso Istituto, Nicolosi (1942) <sup>(12)</sup> studiando l'accrescimento della vescicola ottica nei trapianti xenoplastici, conferma che in detta combinazione si ha compatibilità di tipo larvale e la Parravano (1939) <sup>(13)</sup> trova che tale compatibilità si verifica anche trapiantando la vescicola ottica di *Triton taeniatus* sul fianco del *Discoglossus pictus*. Reverberi ed allievi (1953) <sup>(14)</sup> notano che tale compatibilità si estende fin'oltre la metamorfosi. Dal lavoro della Durante (1954) <sup>(15)</sup>, comparso in questi ultimi giorni, risulta che il trapianto dell'abbozzo dell'arto del *Triton* nella zona dell'arto del *Discoglossus pictus* si sviluppa e dopo il ventottesimo giorno dalla metamorfosi del portatore, inizia gradatamente ad involversi. Ho scelto come materiale di ricerca il *Triton cristatus* come donatore ed il *Discoglossus pictus* come portatore, ma nelle successive esperienze mi servirò anche dell'*Hyla arborea*.

Per indagare le correlazioni fra cinto ed arto libero, potevo eseguire il trapianto sia sul tronco che in sede cefalica. Ho preferito in un primo tempo il trapianto in quest'ultima sede perché meglio si presta all'esame delle proprietà insite nell'abbozzo stesso. È noto infatti che è stato suggerito in seguito alle ricerche sugli arti soprannumerari da induzione, che quando si trapianta un arto sul tronco, bisogna por mente se l'arto che si sviluppa rappresenta appunto lo sviluppo dell'abbozzo trapiantato oppure se trattasi di un arto indotto. Per ovviare questa difficoltà ben si presta il trapianto in sede cefalica perché non è mai risultato che essa possa concorrere alla formazione di un arto. Un'altra notevole differenza fra la sede cefalica e la sede del tronco è in rapporto con la notevole influenza che esercita la somatopleura su un arto trapiantato; basta pensare alle duplicazioni che si hanno negli arti (Urodeli) trapiantati sul tronco ove tale fenomeno si verifica nella metà dei casi, in confronto alle assolutamente eccezionali duplicazioni che si hanno negli arti in zona cefalica. Questo differente comportamento di sede si è dimostrato dipendere dalla somatopleura; infatti si hanno duplicazioni in sede cefalica, trapiantando in essa l'arto insieme ad un lembo di circostante ectomesoderma. Anche negli Anuri si hanno similmente duplicazioni, come risulta dalle espe-

(11) G. COTRONEI e A. SPIRITO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, 14, 149 (1931).

(12) G. NICOLOSI, « Arch. Zool. Ital. », 30, 207 (1942).

(13) M. T. PARRAVANO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, 29, 432 (1939).

(14) N. FARINELLA-FERRUZZA, « Riv. Biol. », 45, 523 (1953).

(15) M. DURANTE, « Riv. Biol. », 46, 533 (1954).



rienze del Braus (1905)<sup>(16)</sup> in *Bombinator*, di Perri (1953)<sup>(17)</sup> in *Bufo* e di altri in varie specie.

Ovviamente, questi trapianti in sede cefalica saranno da me estesi ulteriormente sul tronco per diretta comparazione fra queste due sedi, che si presenta molto utile per i problemi che io mi propongo di studiare. Allo stadio di bottone codale corto<sup>(18)</sup> ho trapiantato l'intero abbozzo dell'arto anteriore del *Triton cristatus* al posto della vescicola ottica primaria, previamente asportata, del *Discoglossus pictus*. I casi più interessanti li ho disegnati *in toto* ed alcuni di essi, di particolare importanza, li ho ricostruiti su cartoncino calibrato.

Dalle osservazioni *in toto* risulta che nei casi in cui ho ottenuto lo sviluppo di un arto, esso inizia il differenziamento dopo dieci-dodici giorni nel mese di aprile. In alcuni casi il trapianto non ha proseguito nello sviluppo, il che mi pare non debba attribuirsi a fenomeni di incompatibilità ma al fatto che trattasi di trapianti eterotopici nelle quali condizioni, come è stato visto da molti Autori, l'abbozzo dell'arto trapiantato a volte non si sviluppa. Con gradi di passaggio si giunge ai casi in cui sono ben riconoscibili le varie parti dell'arto trapiantato. L'autopodio tuttavia, è stato sempre anche nei casi migliori, di forma irregolare con un numero vario di dita per lo più corte e tozze. Qualche volta la vescicola ottica fu estirpata incompletamente e lo sviluppo di questa parte rimasta *in situ* ha disturbato notevolmente quello dell'abbozzo dell'arto trapiantato che si è sviluppato in modo assai atipico. La cute del *Discoglossus* portatore lentamente va a ricoprire tutto l'arto trapiantato preceduta da una migrazione di cromatofori. In un caso a metamorfosi iniziata del portatore, ho esaminato la sensibilità dell'arto trapiantato e ho potuto osservare che se si tocca la parte prossimale di questo ultimo, l'ospite reagisce immediatamente portando il suo arto anteriore destro sulla zona stimolata. Tale sensibilità si è estesa a tutta la lunghezza dell'arto e questo ritengo che è in rapporto con la progressiva sostituzione dell'epitelio dell'ospite sull'arto trapiantato. In quanto alla mobilità degli arti di *Triton* trapiantati non voglio pronunziarmi, dato lo stato delle osservazioni attuali in riferimento ai rapporti muscolari che si profilano di complessa natura. La circolazione sanguigna che agevolmente si osserva *in vivo*, è sempre abbondante e interessa anche l'estremità delle dita. In un caso, la rapida scomparsa dell'autopodio è stata preceduta da una più scarsa vascolarizzazione di tali zone.

Dall'esame istologico risulta che lo scheletro dell'arto trapiantato (cartilagineo) è tutto costituito da cellule del donatore. In due casi fissati cinquantacinque giorni dall'operazione non si denotano a carico di questo tessuto fenomeni degenerativi. In uno di essi ho osservato che la cartilagine di *Triton* si fonde con quella del cranio del *Discoglossus*. Dallo studio sullo sviluppo

(16) H. BRAUS, «Anat. Anz.», 26, 433 (1905).

(17) T. PERRI, «Arch. Zool. Ital.», 38, 1 (1953).

(18) Stadio 33-36 di Twitty e Bodenstein.

delle varie parti dell'abbozzo trapiantato, ho potuto accertare nella maggioranza dei casi positivi ottenuti, la presenza dell'emicinto. Ad esso si articola lo scheletro del relativo arto di cui in alcuni casi si possono morfologicamente riconoscere l'omero, il radio, l'ulna e i vari elementi dell'autopodio (vedi figg. 1-5). Nell'emicinto non sono riconoscibili con completa sicurezza le varie parti: ben conformata, in via generale, è la cavità glenoidea. Sempre mancante è la soprascapola. Limitatamente ai casi per ora osservati, si può fare una graduazione a riguardo del rapporto fra arto ed emicinto; si sono verificate infatti le seguenti condizioni: *a*) arto articolato nella cavità glenoidea di un emicinto sufficientemente ben conformato; *b*) arto articolato liberamente nella cavità glenoidea di un cinto incompleto, ma distinguibile da esso; *c*) arto non articolato liberamente nella cavità glenoidea con cinto incompleto, ma distinguibile da esso; *d*) infine cinto ridotto ad un rudimento, in parte fuso con la testa dell'omero del relativo arto. Questo irregolare sviluppo del cinto più da imputare alle particolari condizioni di trapianto xenoplastico, è quasi certamente da riferirsi al già ricordato fatto che esso negli Urodeli è risultato essenzialmente a mosaico. Inoltre non si è mai verificata la condizione di solo cinto in assenza del relativo arto libero. In una buona parte dei casi, come sopradetto, si nota l'articolazione fra la testa dell'omero con la cavità glenoidea, che è la miglior documentazione dell'avvenuto sviluppo del cinto (emicinto). La muscolatura dell'arto trapiantato è ben conformata e dalla grandezza dei nuclei delle cellule si riconosce essere di Urodelo; in un caso fissato quindici giorni dopo la metamorfosi, pur essendosi già riassorbito l'autopodio, non si notano a suo carico evidenti fenomeni degenerativi. La muscolatura dell'arto trapiantato non ha preso rapporti con lo scheletro del *Discoglossus* come pure la muscolatura dell'occhio non ha inserzioni sull'arto trapiantato. Su altre possibilità, come sopra accennato, non voglio dare alcuna risposta esplicativa.

A conclusione di questi dati analitici, riconfermo che veramente spiccata è la compatibilità larvale che si ha nel trapianto di *Triton* su *Discoglossus* (già osservata dalla Parravano e notevolmente estesa dalla scuola di Reverberi), ma soprattutto pongo in evidenza che, nelle condizioni di trapianto xenoplastico, al di fuori di ogni influenza della somatopleura si è avuto il differenziamento e lo sviluppo dell'arto e del relativo cinto (emicinto) del *Triton cristatus* trapiantato sul *Discoglossus pictus*. Tale arto trapiantato, qualunque sia stato il suo grado di sviluppo, nella maggioranza dei casi è in rapporto con un emicinto che è sicuramente appartenente al trapiantato, non solo per i dati desunti dall'esame istologico che permettono di distinguere i tessuti di Urodelo da quelli di Anuro, ma anche perché il mesenchima della testa, come sopra ho ampiamente detto, non ha alcuna capacità a costituire arti.



Figg. 1-3. - Esempi di articolazione tra omero (1) e cinto (2) (Ematossilina-Eosina).  
Figg. 4-5. - Esempi di ricostruzione dello scheletro dell'arto libero e del relativo cinto,  
(Ogni intervallo della scala in calce = 100  $\mu$ ).





**Biologia.** — *Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris ».* Nota <sup>(\*)</sup> di ENRICO URBANI e LIVIA DE CESARIS COROMALDI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio GIULIO COTRONEI.

INTRODUZIONE. — Le nostre precedenti osservazioni hanno dimostrato che gli enzimi proteolitici endocellulari hanno, durante lo sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi Anuri, un comportamento che permette di trarre delle considerazioni sulle loro funzioni nel metabolismo cellulare. Le due categorie di enzimi da noi studiate e cioè le dipeptidasi che idrolizzano composti a basso peso molecolare con pH optimum intorno a 7-8 e le proteinasi idrolizzanti composti a elevato peso molecolare con optimum di azione intorno a pH 5, sono già presenti nell'uovo in segmentazione e fino allo stadio di bottone caudale mostrano una diminuzione di attività che è bene apprezzabile per le dipeptidasi mentre è molto debole per le proteinasi. Dopo questo stadio ambedue gli enzimi aumentano, ma con diverso rapporto, fino alla fine del riassorbimento del tuorlo ed il passaggio alla vita larvale è accompagnato da una caduta dell'attività dipeptidasica e proteinasica.

Abbiamo già richiamato l'attenzione su questo fatto che riveste un particolare significato biochimico se inquadrato nei dati morfologici e funzionali caratteristici di questo stadio di sviluppo degli Anfibi. Infatti Cotronei (1922 <sup>(1)</sup>, 1930 <sup>(2)</sup>, 1932 <sup>(3)</sup>) ha dimostrato che è in questo momento che cambiano le attività metaboliche e le correlazioni umorali dell'individuo ed è con la fine del riassorbimento del tuorlo che, ultimato lo sviluppo embrionale, deve considerarsi iniziata la vita larvale.

È molto importante considerare nella sua giusta luce la fase di *fine del vitello* come il momento nel quale l'embrione ha terminato le sue riserve energetiche e plastiche e perciò se la giovane larva non è alimentata vengono ad arrestarsi i processi di sintesi. L'embrione di Anfibia come tutti quelli che posseggono una certa quantità di tuorlo possono essere considerati, nei riguardi del metabolismo di costruzione, dei « sistemi biologici chiusi » nei quali si ha la trasformazione di glucidi, lipidi e protidi vitellini in glucidi, lipidi e protidi protoplasmatici senza apporto di materiali organici dal mondo esterno.

Come è stato altrove sottolineato (Urbani 1954 <sup>(4)</sup>, 1955 <sup>(5)</sup>) gli enzimi proteolitici endocellulari probabilmente svolgono nel protoplasma un ruolo

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma con il contributo del C. N. R.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) G. COTRONEI, « Arch. Zool. Ital. », 10, 85, (1922).

(2) G. COTRONEI, « Mon. Zool. Ital. », 41, 9, (1930).

(3) G. COTRONEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 6, 15 (1932).

(4) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 556, (1954).

(5) E. URBANI, « Experientia » (in corso di stampa).



collegato in modo più o meno diretto con la sintesi delle proteine e lo studio di questi enzimi durante lo sviluppo embrionale può dare delle indicazioni sul loro significato nei fenomeni di morfogenesi e di accrescimento.

I nostri precedenti lavori hanno avuto come scopo l'analisi delle dipeptidasi in *Rana esculenta* (De Cesaris Coromaldi 1954<sup>(6)</sup>) e in *Bufo vulgaris* (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954<sup>(7)</sup>) e delle proteinasi in *Rana esculenta* (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954<sup>(8)</sup>). In questa Nota vengono esposti alcuni risultati da noi ottenuti con lo studio delle proteinasi in *Bufo vulgaris*.

L'analisi dell'attività enzimatica è stata unita allo studio del comportamento dell'azoto durante lo sviluppo embrionale e l'inizio della vita larvale ed a dosaggi dell'acido ribonucleico. Tutto questo tenendo presenti le ipotesi avanzate sui rapporti tra dipeptidasi o, in forma più generale, tra gli enzimi proteolitici e gli acidi nucleici e quanto è noto sulle relazioni tra acido ribonucleico e attività sintetiche della cellula.

**MATERIALE E METODI.** - Sono state utilizzate uova di *Bufo vulgaris* normalmente deposte e sviluppate alla temperatura del laboratorio (15° C — 18° C). I risultati qui esposti sono stati desunti dallo studio di tre lotti diversi.

**Proteinasi.** - L'attività proteinasica (substrato caseina, tampone pH 4,9) è stata determinata con il metodo di Holter e Løvtrup, (1949)<sup>(9)</sup> con le modifiche da noi adottate e già descritte per l'adattamento a materiale embriologico. Cinque embrioni sono stati omogenati in 130 µl di acqua distillata. Per gli stadi a più di duecento ore di sviluppo cinque embrioni o giovani larve sono stati omogenati in 260 µl di acqua distillata. L'omogenato è stato centrifugato a 2.500 giri per 3 minuti ed il supernatante usato per i dosaggi. Tempo di incubazione due ore a 38° C.

L'attività proteinasica, espressa in Estinzioni, riportata nei grafici si riferisce a 42 µl di omogenato ottenuto da cinque embrioni in 130 µl.

**Azoto totale.** - L'azoto totale (NT) è stato determinato per Nesslerizzazione diretta (Giardina 1954<sup>(10)</sup>). Prima di impiegare questo metodo l'abbiamo sottoposto ad accurato controllo onde vedere se i dati ottenuti concordassero con i dati teorici prevedibili dalla analisi di composti contenenti quantità note di azoto proteico (alanilglicina, tirosina) o non proteico (acidi nucleici) ed i risultati ottenuti sono stati molto soddisfacenti. In pratica si è proceduto nel modo seguente: tre embrioni ai vari stadi di sviluppo sono stati mineralizzati in 200 µl di H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> (diluito 1/1) alla temperatura di 300° C.

(6) L. DE CESARIS COROMALDI, «La Ricerca Scient.», 24, 319, (1954).

(7) E. URBANI e L. DE CESARIS COROMALDI, «La Ricerca Scient.», 24, 1275, (1954).

(8) E. URBANI e L. DE CESARIS COROMALDI, «La Ricerca Scient.», 24, 2364, (1954).

(9) H. HOLTER e S. LØVTRUP, «C. R. Laborat. Carlsberg», 27, 27, (1949).

(10) G. GIARDINA, «Experientia», 10, 215, (1954).

Sono state poi aggiunte tre gocce di peridrol e di nuovo portato il mineralizzato a 300°C per trenta minuti; questa operazione è stata ripetuta una seconda volta. Il mineralizzato è stato portato a 10 ml con acqua distillata e prelevato 1 ml al quale sono stati aggiunti 5 ml di acqua distillata ed 1 ml di reattivo di Nessler. Il colore sviluppato è stato fotometrato al colorimetro Manetti & Roberts in cuvetta di 1 cm di spessore a circa 420 m $\mu$ . Le Estinzioni ottenute sono state tradotte in *gamma* di azoto su curva di taratura costruita con quantità note di solfato di ammonio.

*Acido ribonucleico.* — La determinazione quantitativa dell'RNA è stata eseguita con il metodo di Ogur e Rosen (1950)<sup>(11)</sup> adattato da Steinert (1951)<sup>(12)</sup> a materiale embriologico e già usato nei nostri precedenti lavori. Cinque embrioni ai vari stadi di sviluppo sono stati fissati in alcool a 95°, delipidati all'etere, essiccati sotto vuoto. Con acido perclorico all'1% sono state estratte le basi libere e con acido perclorico al 10% per 24 ore a 0°C l'acido ribonucleico. L'assorbimento in luce ultravioletta è stato determinato con l'apparecchiatura descritta nei precedenti lavori (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954<sup>(7)</sup>, Urbani e Salvidio 1954<sup>(13)</sup>). I risultati che si ottengono con questo metodo sono nettamente riproducibili. Le quantità di RNA sono state calcolate su una curva di taratura costruita con quantità note di RNA Schwarz idrolizzato con acido perclorico al 10%.

**RISULTATI.** — Le proteinasi hanno in *Bufo vulgaris* un comportamento eguale a quello già da noi visto in *Rana esculenta*. In particolare si nota che l'attività enzimatica (fig. 1) diminuisce leggermente dalla segmentazione allo stadio di pieghe neurali saldate—bottone caudale e da questo stadio in poi aumenta con una notevole pendenza. Un po' prima della fine del vitello il ramo ascendente tende a flettere ed il passaggio dalla vita embrionale a quella larvale è caratterizzato come in *Rana esculenta* da una diminuzione della attività enzimatica. A questo proposito si può rilevare come la caduta, che si osserva in questo momento in *Rana esculenta* sia più brusca che non in *Bufo vulgaris*; a parte questa differenza di ordine quantitativo, che indubbiamente ha un significato il quale per il momento ci sfugge, forse legato a condizione di ordine zoologico o ecologico, l'andamento generale della curva nelle due specie è fortemente somigliante.

I dosaggi dell'azoto totale hanno dimostrato che questo diminuisce leggermente durante lo sviluppo embrionale: all'inizio dello sviluppo si hanno circa 150 *gamma* per embrione mentre alla fine del vitello si hanno circa 125 *gamma* per larva (fig. 2). Questi dati trovano corrispondenza con quanto visto da Gregg e Ballentine (1946)<sup>(14)</sup> nello sviluppo di *Rana pipiens* dove, con il

(11) M. OGUR e G. ROSEN, « Arch. Bioch. », 25, 262 (1950).

(12) M. STEINERT, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 33, 549 (1951).

(13) E. URBANI e E. SALVIDIO, « Haematologica », 38, 1, (1954).

(14) J. R. GREGG e R. BALLENTINE, « J. Exp. Zool. », 103, 143 (1946).

metodo di Kjeldahl, hanno determinato 162 *gamma* per uovo e con i risultati di Løvtrup (1953)<sup>(15)</sup> che in *Amblystoma mexicanum* ha determinato circa 200 *gamma* per uovo.

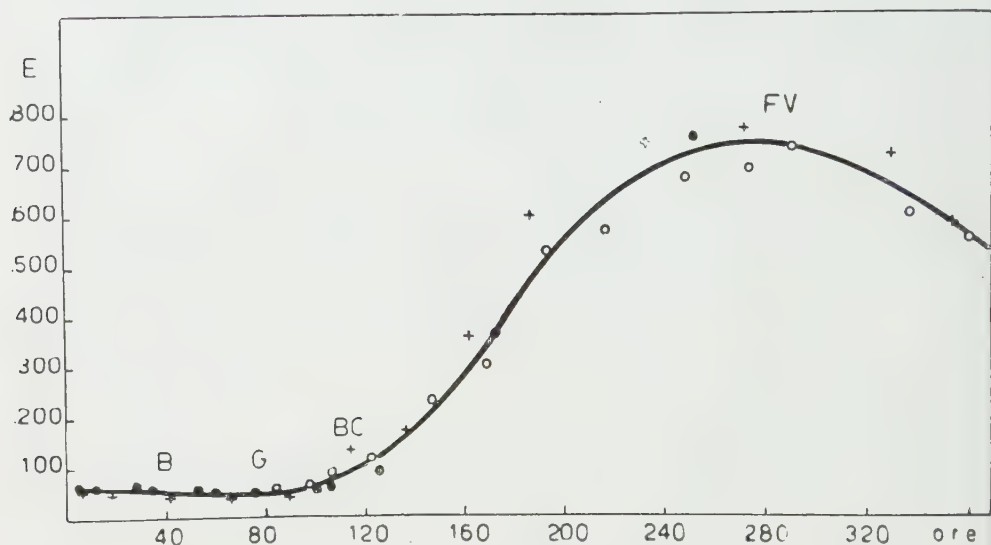


Fig. 1. - Attività proteinasica durante lo sviluppo embrionale e larvale di *Bufo vulgaris*.

In ascisse le ore di sviluppo, in ordinate l'attività enzimatica espressa in Estinzioni. I diversi simboli corrispondono a tre lotti studiati. B = blastula, G = gastrula, BC = bottone caudale, FV = stadio di fine del vitello.

Gregg e Ballentine hanno visto che in quattro dei sei lotti da loro esaminati si ha una leggera ma netta caduta dell'NT tra novantotto e centoventidue ore di sviluppo. Questo fatto non è chiaramente interpretabile e gli Autori lo attribuiscono alla rimozione della membrana perivitellina e alla perdita dell'azoto contenuto nel liquido perivitellino. Nel nostro caso, poiché

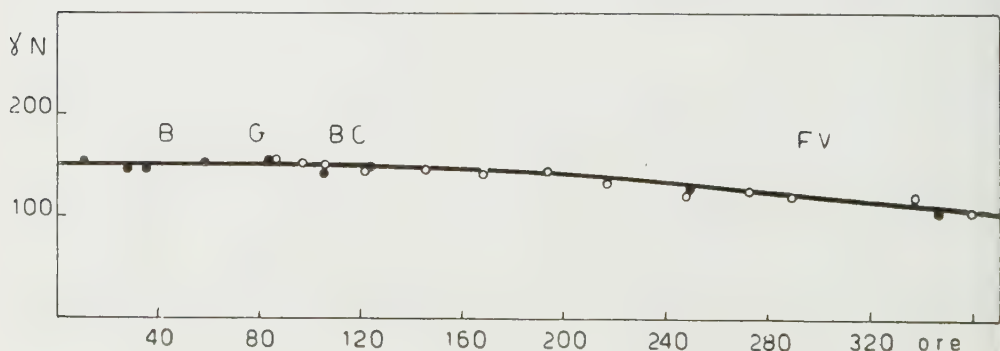


Fig. 2. Comportamento dell'azoto totale (NT).

In ascisse le ore di sviluppo, in ordinate i *gamma* di azoto per embrione. I diversi simboli corrispondono a due lotti studiati. B = blastula, G = gastrula, BC = bottone caudale, FV = stadio di fine del vitello.

(15) S. LØVTRUP, «C. R. Laborat. Carlsberg», 28, 372 (1953).

ci eravamo resi conto che la gelatina e le membrane dell'uovo contengono una certa quantità di azoto, ci siamo presi cura di pulire e sgusciare meccanicamente le uova nel modo più accurato e questo può spiegare perché né noi né Lovtrup abbiamo riscontrato il fenomeno illustrato da Gregg e Ballentine. Anche Lovtrup in *Amblystoma* ha visto che l'NT rimane a lungo quantitativamente costante e solo dopo quindici giorni di sviluppo dimi-

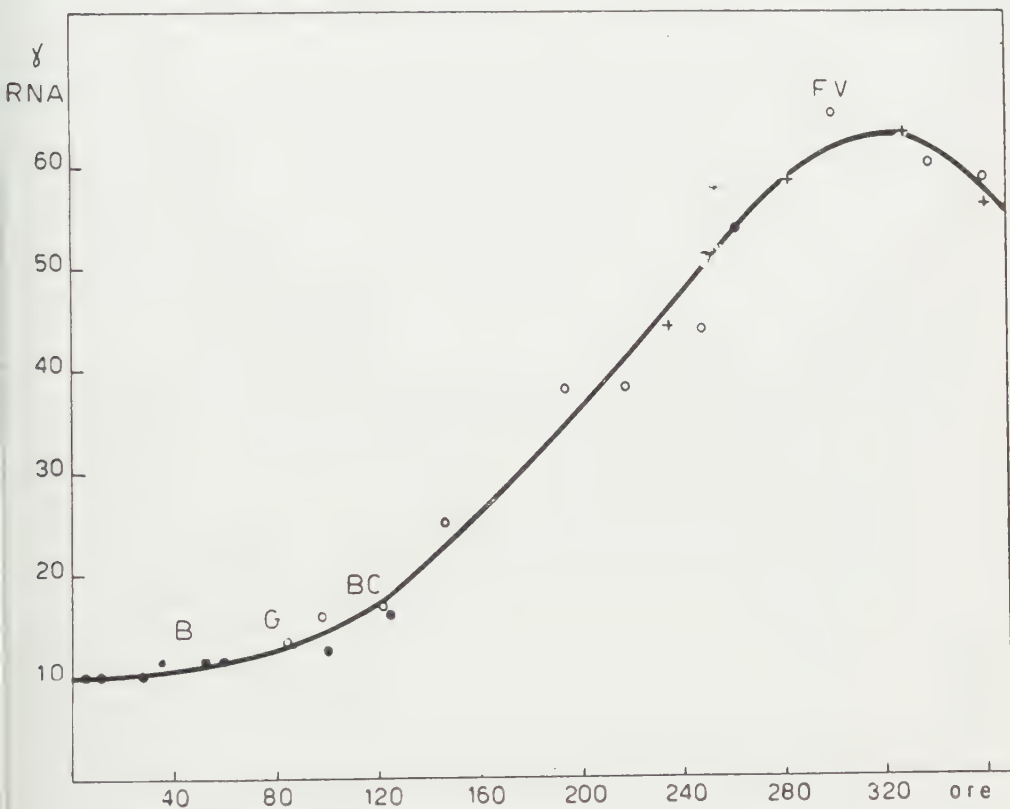


Fig. 3. - Comportamento dell'acido ribonucleico durante lo sviluppo embrionale e larvale di *Bufo vulgaris*.

In ascisse le ore di sviluppo, in ordinate il tenore in RNA espresso in *gamma* per embrione. I diversi simboli corrispondono a tre lotti studiati. B = blastula, G = gastrula, BC = bottone caudale, FV = stadio di fine del vitello.

nuisce in modo apprezzabile. Ma questo Autore non fa nessun riferimento allo stadio caratteristico della fine del vitello.

Lo studio dell'acido ribonucleico (fig. 3) mostra che questo composto è in aumento già nei primi stadi di sviluppo e cioè dalla blastula in poi. La sintesi di RNA, moderata fino allo stadio di bottone caudale, diviene in seguito molto più forte e si rallenta ed arresta con la fine del vitello.

Gli stadi corrispondenti alla fine del vitello erano già stati da noi studiati in *Bufo vulgaris* (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954)<sup>(7)</sup> e ne avevamo tratte considerazioni sul parallelismo di comportamento tra RNA e dipep-

tidasi, ma non avevamo dati sui primi stadi di sviluppo embrionale. L'esame della curva mostra che la quantità di RNA aumenta da circa 10 *gamma* a 60 *gamma* per poi tornare a diminuire se le giovani larve non vengono alimentate.

I nostri risultati sono in accordo con quelli di Steinert (1951)<sup>(12)</sup> che ha studiato il comportamento dell'RNA nello sviluppo embrionale di *Rana fusca* e di *Rana esculenta* arrestando però la sua analisi alla gastrulazione e sull'*Axolotl* fino allo stadio di bottone caudale.

CONCLUSIONI. - Dai risultati esposti nella presente Nota si possono trarre alcune conclusioni. Lo studio delle proteinasi ha indicato che questi enzimi hanno in *Bufo vulgaris* un deciso aumento di attività dallo stadio di pieghe neurali saldate-bottone caudale in poi e per essere più precisi tra 100 e 260 ore di sviluppo circa. Comportamento simile, si è già detto, abbiamo incontrato in *Rana esculenta*.

Il passaggio dalla vita embrionale alla vita larvale è caratterizzato da un rallentamento prima e da una caduta poi dell'attività proteinasica; questi enzimi, come le dipeptidasi, mostrano un preciso comportamento in questo periodo dello sviluppo e sono una spia enzimatica di quei cambiamenti metabolici ed umorali che Cotronei ha dimostrato si instaurano negli Anfibì alla fine del periodo embrionale. Le proteinasi hanno la più forte attività durante la morfogenesi e l'accrescimento embrionale.

Se si confrontano le curve di attività enzimatica e quella dell'azoto totale si vede come proprio nel periodo nel quale gli enzimi proteolitici sono in pieno funzionamento l'NT subisce una piccolissima diminuzione. Si è precedentemente richiamata l'attenzione sulle particolari condizioni di « sistema chiuso » che sussistono nello sviluppo embrionale degli Anfibì e si è portati a concludere che le proteinasi intervengano nella trasformazione delle proteine vitelline in proteine protoplasmatiche. Si può anche pensare che le proteinasi operino semplicemente la fluidificazione del vitello proteico ma questa ipotesi contrasta con il fatto da noi messo in evidenza precedentemente, e ripetutamente confermato, che le cellule vitelline sono quelle che, per unità di peso secco, di peso ridotto, di azoto, hanno il contenuto più basso in proteinasi, dipeptidasi, acido ribonucleico ed il minore consumo di ossigeno.

D'altra parte le belle ricerche di Løvtrup (1953)<sup>(15)</sup> dimostrano che l'embrione degli Urodeli trae le sue risorse energetiche dalla combustione degli zuccheri prima e dei lipidi poi e solamente più tardi (dopo 15-20 giorni di sviluppo) si ha la combustione delle proteine.

Le nostre osservazioni danno una ulteriore prova che gli enzimi proteolitici endocellulari (genericamente chiamati da alcuni autori *cathepsine*) non possono essere considerati soltanto come agenti autolitici destinati ad entrare in azione dopo la morte della cellula per la digestione del protoplasma, ma indubbiamente svolgono un ruolo nella costruzione delle proteine cellulari e, nel caso da noi studiato, nella trasformazione dei protidi vitellini nei protidi delle cellule in moltiplicazione, accrescimento e differenziazione.



Lo studio dell'acido ribonucleico, effettuato tenendo conto degli indubbi rapporti tra questo composto e la sintesi delle proteine, mostra che l'RNA ha, durante lo sviluppo embrionale e larvale, un andamento somigliante a quello degli enzimi proteolitici. Infatti il periodo di forte accrescimento dell'embrione è accompagnato da un continuo aumento del tenore in RNA. Nelle giovani larve che hanno esaurito il vitello cessano i poteri di sintesi, o per lo meno si riducono fortemente e se queste non sono alimentate anche l'RNA diminuisce.

In conclusione le presenti osservazioni confermano ed estendono i risultati da noi precedentemente ottenuti su materiale embriologico e tendono a dimostrare che gli enzimi proteolitici endocellulari esercitano una loro attività nel metabolismo protidico di costruzione dell'embrione in sviluppo.

**Genetica.** — *Eterozigosi e rapporto sessi in «Drosophila melanogaster»* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIORGIO MORPURGO, BENEDETTO NICOLETTI e ANGELA SOLIMA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. MONTALENTI.

È sorprendente il fatto che in un animale studiato così a fondo come la drosophila ancora si discuta su quale sia il vero rapporto sessi alla nascita; vogliamo qui intendere con la parola nascita l'uscita dell'insetto perfetto dalla pupa, senza discutere il problema ben più complesso del rapporto primario dei sessi. I dati dei vari autori sono spesso discordanti, e sono stati probabilmente influenzati da vari fattori, quali la composizione della pappa e l'intensità della selezione. L'Heritier (1936) <sup>(1)</sup> ha trovato, in media, su 100 nuovi individui, al momento dello spupamento, soltanto 46 ♂♂. I suoi dati provengono però da popolazioni in cui le condizioni selettive erano molto severe, ciò che ha molto probabilmente alterato il rapporto sessi.

Per una rivista completa sul rapporto sessi nei vari animali vedi Crew (1937) <sup>(2)</sup>.

Bonnier (1926) <sup>(3)</sup> ha esaminato su *D. melanogaster* oltre al rapporto sessi che ha trovato molto vicino ad 1 : 1, il tempo di sviluppo per i due sessi; il periodo di sviluppo delle ♀♀ era lievemente inferiore a quello dei ♂♂ e la differenza aumentava per un aumento di 5° nella temperatura di sviluppo. Anche Eloff (1940) <sup>(4)</sup> ha osservato un più precoce sviluppo per il sesso femminile. La differenza era più forte in un ceppo eterozigote per i geni *y w*.

Maynard Smith e Maynard Smith (1954) <sup>(5)</sup> hanno invece notato in *D. subobscura* un più precoce sviluppo dei ♂♂.

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Genetica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) PH. L'HERITIER, «C. R. Acad. Sci.», 202, 692, (1936).

(2) F. A. CREW, «Amer. Nat.», 71, 529 (1937).

(3) G. BONNIER, «Brit. J. Exp. Biol.», 4, 186-195, (1926).

(4) G. ELOFF, «Nature», 145, 463-464 (1940).

(5) MAYNARD SMITH e MAYNARD SMITH, «J. of Genetics», 52, 1, 152-165 (1954).

Nella presente ricerca abbiamo esaminato il rapporto sessi e il tempo

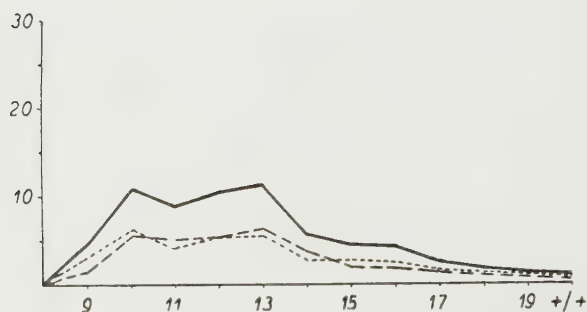
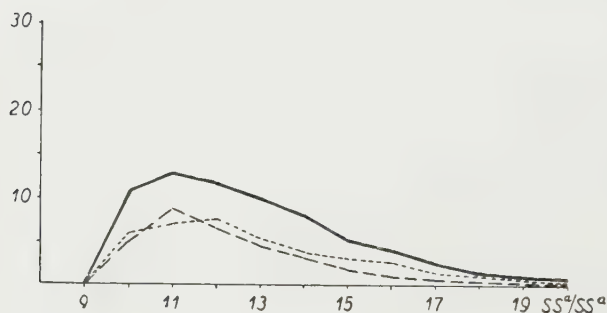
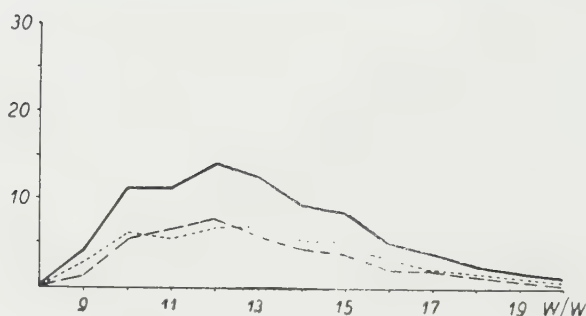
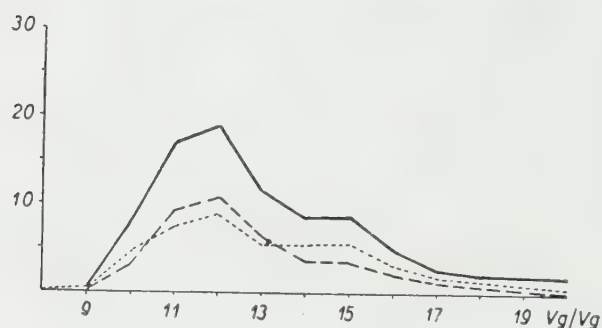


Fig. 1. - Grafico dello sfarfallamento giornaliero per i ceppi omozigoti.

Sulle ordinate il numero di mosche medio per barattolo; sulle ascisse il tempo in giorni.

Linea intera = totale degli individui; . . . . . = ♀♀; - - - - = ♂♂

di sviluppo per i due sessi, in condizione di mediocre selezione nei ceppi *Oregon-K*, *vg/vg*, *w/w*, *ss<sup>a</sup>/ss<sup>a</sup>*; contemporaneamente abbiamo esteso la nostra indagine agli ibridi fra i ceppi *vg*, *w*, e *ss<sup>a</sup>* col ceppo normale *Oregon*, e cioè *vg/+*, *w/+*, e *ss<sup>a</sup>/+*.

In tutti i casi il metodo usato è stato di porre il numero fisso di 150 uova in un vasetto con diametro interno di cm. 3, riempito con comune pappa al lievito, agar, mais. Il numero di uova messe a sviluppare è stato di 7000 per i ceppi *Oregon*, *w/w*, *w/+*, *vg/vg*, *vg/+*, mentre è stato di 1450 per il ceppo *ss<sup>a</sup>/ss<sup>a</sup>* e di 1650 per il ceppo *ss<sup>a</sup>/+*. Le cifre più basse per i due ceppi *ss<sup>a</sup>* sono dovute alla semisterilità delle ♀♀ *ss<sup>a</sup>*. Lo sviluppo è avvenuto in ogni caso in camera termostatica a 25°; le prime mosche sono sfarfallate al nono giorno dalla raccolta, e da allora abbiamo contato giornalmente le mosche schiuse fino al 22° giorno. Due barattoli *w/+* sono stati successivamente persi per accidente e quindi il numero reale di uova *w/+* scende a 6700.

In tabella I sono esposti i risultati finali

È evidente che si ha un quadro nettamente differente nella parte destra

rispetto alla parte sinistra della tabella. Mentre il rapporto sessi si avvicina molto al rapporto tipico di 1 : 1 in tutti i ceppi omozigoti (il  $\chi^2$  è debolmente significativo soltanto per il ceppo  $w/w$ ) è in tutti i casi significativamente diverso da 1 : 1 nei ceppi eterozigoti; in tutti i casi il vantaggio è a favore delle ♀♀. Il  $\chi^2$  calcolato sul totale dei ceppi omozigoti è 6,7; per un grado di libertà si ha la probabilità di  $P < 0,01$ . È quindi probabile che in queste condizioni di selezione il rapporto sessi si discosti lievemente da 1 : 1 anche nei ceppi omozigoti. Da i dati attuali risulterebbe un rapporto sessi di 0,95 : 1 per i quattro ceppi omozigoti e di 0,784 : 1 per i tre ibridi.

TABELLA I.

Totale					Totale				
Ceppo	nati	♂♂	♀♀	$\chi^2$	Ceppo	nati	♂♂	♀♀	$\chi^2$
<i>vg/vg</i> . . . .	3524	1728	1796	1,3	<i>vg/+</i> . . .	3582	1676	1906	14,7
<i>w/w</i> . . . . .	3350	1615	1735	4,28	<i>w/+</i> . . .	3332	1516	1816	27,1
<i>ss<sup>a</sup>/ss<sup>a</sup></i> . . . .	667	328	339	0,2	<i>ss<sup>a</sup>/+</i> . . .	1262	579	683	12,18
<i>Oregon-K</i> . . .	2805	1370	1435	1,4					
Totale . .	10346	5041	5305	6,7	Totale .	8176	3770	4806	49,6

Le figure 1 e 2 mostrano l'andamento delle nascite dal 9° al 21° giorno, rispettivamente per i ceppi omozigoti e per i ceppi eterozigoti.

Mentre in tutti e quattro i ceppi omozigoti le due curve che descrivono lo sfarfallamento giorno per giorno dei ♂♂ e delle ♀♀ sono quasi sovrapposte, nei tre ceppi eterozigoti in tutti i casi la curva delle ♀♀ sale più rapidamente di quella dei ♂♂ congiungendosi soltanto verso l'undicesimo giorno.

Nella tabella II viene esaminato il rapporto sessi in tutti i ceppi fino all'11° giorno e la significatività degli scarti osservati, e nella tabella III diamo invece il rapporto sessi e la eventuale significanza degli scarti per gli individui sputati dopo l'11° giorno.

L'esame delle tabelle II e III mostra che esiste, nei tre eterozigoti nei primi tre giorni di sfarfallamento uno spostamento molto forte nel normale rapporto di sessi di 1 : 1 (i  $\chi^2$  sono in tutti i casi fortemente significativi), spostamento che non esiste nei quattro omozigoti. Il rapporto sessi è invece molto vicino ad 1 : 1 in tutti i ceppi, tranne forse *vg/vg* e *w/w*, se consideriamo gli individui sputati fra l'11° e il 21° giorno.

Se ne può trarre la conclusione che l'incrocio di due ceppi probabilmente altamente inincrociati e fortemente differenti fra di loro per l'ambiente poligenico differenzia la velocità di sviluppo dei due sessi. I ♂♂, più lenti nello

sviluppo, sarebbero da questo ritardo tanto sfavoriti da alterare, almeno nelle condizioni selettive prese in esame, il normale rapporto dei sessi.

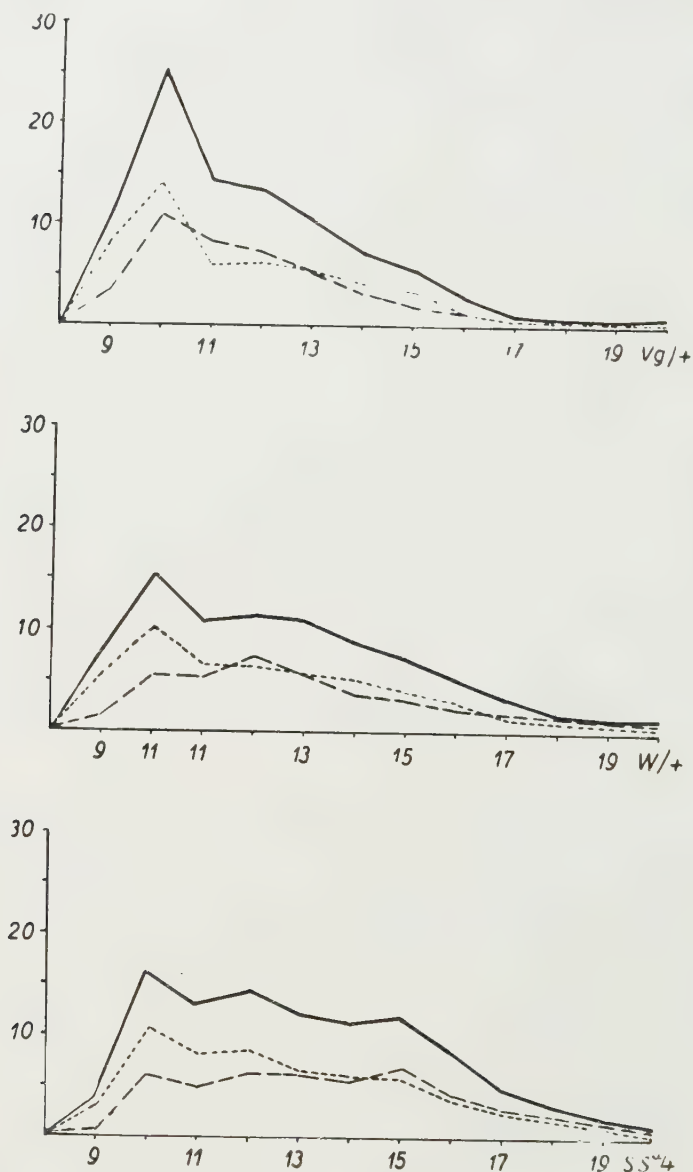


Fig. 2. - Grafico dello sfarfallamento giornaliero per i ceppi eterozigoti.

Ascisse e ordinate come in fig. 1.

Linea intera = totale degli individui; ..... = ♀♀; ----- = ♂♂.

È singolare il fatto che in tutti i tre ceppi ibridi sia sempre il sesso femminile ad essere avvantaggiato mentre nei ceppi puri la velocità di sviluppo dei due sessi è sensibilmente vicina.

TABELLA II.

Scarto nel rapporto sessi fra gli individui dei vari ceppi spupati fra il 9° e l'11° giorno.

Ceppo	♂♂	♀♀	$\chi^2$	Ceppo	♂♂	♀♀	$\chi^2$
vg/vg . . . . .	491	459	1,06	vg/+ . . . . .	852	1065	23,44
w/w . . . . .	516	513	0,0	w/+ . . . . .	437	797	105,2
ss <sup>a</sup> /ss <sup>a</sup> . . . . .	135	116	1,6	ss/+ . . . . .	132	259	14,4
Oregon . . . . .	457	459	0,0				

TABELLA III.

Scarto nel rapporto sessi fra gli individui dei vari ceppi spupati fra l'11° e il 21° giorno.

Ceppo	♂♂	♀♀	$\chi^2$	Ceppo	♂♂	♀♀	$\chi^2$
vg/vg : . . . . .	1237	1337	3,88	vg/+ . . . . .	824	841	0,14
w/w . . . . .	1099	1222	6,40	w/+ . . . . .	1079	1019	1,6
ss <sup>a</sup> /ss <sup>a</sup> . . . . .	193	223	2,14	ss <sup>a</sup> /+ . . . . .	447	424	0,66
+/+ . . . . .	913	976	2,2				

Si può pensare che la velocità di sviluppo larvale sia regolata da un sistema poligenico complesso in cui tutti i cromosomi siano rappresentati. Se il ceppo in esame è fortemente inincrociato il vantaggio che può dare al sesso femminile la potenziale eterozigosi per il cromosoma legato al sesso è in buona parte annullato. Se il ceppo in esame al contrario è poco o punto inincrociato l'eterozigosi per il cromosoma  $\chi^2$  fa sentire il suo peso, tamponando le ♀♀ contro le variazioni ambientali. Un fenomeno analogo potrebbe essere quello osservato da Rasmuson <sup>(6)</sup> (1952) che ha trovato in *D. melanogaster* diminuzione alla F' della variabilità del numero di setole rispetto ai ceppi parenti fortemente inincrociati; il numero delle setole sarebbe poi stato più variabile nei ♂♂ che nelle ♀♀, risultato che si spiega con la minor eterozigosi potenziale dei ♂♂ rispetto alle ♀♀.

Analogo potrebbe anche essere quel fenomeno noto sotto il nome di regola di Haldane, secondo cui generalmente il sesso meno vitale sarebbe il sesso eterogametico.

(6) M. RASMUNSON, « Acta Zool. Stock. », 33, 277 (1952).



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte, avvenuta l'11 corrente mese, di Sir Alexander Fleming, Premio Nobel, Socio Straniero della Categoria V (Scienze biologiche e applicazioni), e rievoca brevemente la grande figura e l'eccezionale opera dell'insigne scienziato che, per la scoperta della penicillina, merita di essere annoverato tra i benefattori dell'umanità.

Alla memoria dell'illustre Collega scomparso, il Presidente Giordani, a nome della Classe e dell'Accademia tutta, invia un reverente pensiero d'omaggio.

Il prof. Giordani porge quindi un affettuoso saluto al Socio Cantelli, che, dopo una lunga malattia, è oggi ritornato all'Accademia e la Classe si associa con un vibrante applauso.

Il prof. Cantelli ringrazia con commosse parole il Presidente e i Colleghi per la manifestazione d'affetto che hanno voluto tributargli.

Il Presidente desidera poi informare la Classe di aver fatto visita al Socio Lombardi e di essersi reso interprete presso di lui dei voti augurali dei Colleghi tutti.

Il prof. Lombardi, il quale continua a lavorare con una attività e con una molteplicità di interessi veramente ammirevoli, ha pregato il Presidente di ringraziare i Soci e ha espresso la speranza di poter ritornare prossimamente in Accademia.

## PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato della prof.ssa F. De Michelis, pervenuto all'Accademia in data 21 febbraio c. a., e un altro plico, consegnato in data odierna, dal Socio Bargellini.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i due citati plichi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente è lieto di comunicare che le trattative con l'Università di Chicago per l'edizione delle opere di Enrico Fermi sono ben avviate e sembrano prossime alla conclusione. Egli ha ricevuto proprio oggi una lettera al riguardo dal Sig. Hemens della «University Chicago Press» e si riserva di occuparsi personalmente della questione con i Colleghi americani e con quelli italiani, residenti negli Stati Uniti, in occasione del suo prossimo viaggio in America.

D'altra parte, il prof. Giordani può assicurare fin d'ora che il Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari ha già deliberato di mettere a disposizione

dell'Accademia, a titolo di contributo per la pubblicazione delle opere del Fermi, la somma di 10 milioni di lire.

Il Socio Cotronei desidera informare i Colleghi che domani, nella ricorrenza del 75° compleanno del prof. Rinaldo Dohrn, Direttore della Stazione Zoologica di Napoli, gli amici dell'illustre studioso intendono riunirsi intorno a lui per rendere omaggio all'opera che egli da lunghi anni svolge in vantaggio degli studi biologici e della cooperazione scientifica internazionale.

Il Socio Cotronei, dopo aver ricordato la grande importanza della Stazione Zoologica napoletana che, dallo studio della morfologia, ha esteso la sua attività alla fisiologia e alla chimica biologica, osserva che la Stazione, sorta come il primo Istituto Internazionale per la ricerca scientifica, ha, sotto la direzione del prof. Dohrn, assolto pienamente i suoi compiti, tanto da ospitare i più grandi scienziati del mondo.

Propone pertanto che l'Accademia invii un messaggio di saluto e di augurio al prof. Dohrn.

Il Socio G. Levi è pienamente d'accordo con quanto proposto dal Collega Cotronei e desidera mettere in evidenza che il prof. Dohrn ha anche il merito di avere salvato la Stazione in momenti estremamente difficili e di averle conservato, nonostante che egli fosse cittadino germanico, la caratteristica impronta internazionale. Si associa pertanto alla proposta formulata dal Socio Cotronei per l'invio di un messaggio di adesione dell'Accademia alle onoranze del citato professor Dohrn.

Il Presidente Giordani ricorda di aver avuto la fortuna di vivere e di lavorare molto vicino al prof. Dohrn e di averne altamente apprezzato i grandi meriti scientifici e l'opera disinteressata. È quindi ben lieto di assicurare che la Presidenza dell'Accademia provvederà ad inviargli un telegramma di felicitazioni e di augurio.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Abetti presenta il fascicolo n. 69 delle pubblicazioni della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Firenze, dal titolo: « Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri », edito dal Direttore dell'Osservatorio prof. G. Righini, e contenente i lavori eseguiti nel detto Osservatorio nel corso degli anni 1953-54. Fra questi sono da segnalarsi quelli di Righini-Rigutti sull'oscuramento al bordo del Sole, di M. C. Ballario sulle correnti di stelle veloci e di M. Hack su analisi quantitative di stelle del primo tipo di Secchi.

Il Socio Puntoni, riferendosi alla presentazione da lui fatta nella seduta del 12 febbraio c. a., del I volume degli « Atti » del VI Congresso Internazionale di Microbiologia, svoltosi a Roma dal 6 al 12 settembre 1953, presenta il volume II dei citati « Atti », che raggruppa le Sezioni VI e VII (Immunologia e Immunochimica).

Il prof. Pavari presenta i « Comptes Rendus » dell'XI Congresso tenuto a Roma, nel mese di settembre 1953, dell'« Union Internationale des Insti-

tuts des Recherches Forestières » da lui presieduta e osserva che tale Congresso ebbe un notevole successo, sia per la partecipazione di ben 153 specialisti, rappresentanti 97 Istituti di 20 Paesi diversi, sia per il numero considerevole delle comunicazioni scientifiche presentate, che raggiunsero un totale di 122.

Il Socio Pavari conclude, illustrando brevemente i compiti e l'attività dell'Unione, la quale, costituita nel 1890 e riorganizzata nel 1929, comprende oggi 113 membri ordinari e 2 membri associati di 44 Paesi ed esplica la sua attività scientifica principalmente a mezzo delle undici Sezioni di ricerche.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto pubblicazioni in omaggio all'Accademia.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

#### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Carobbi, Chiarugi, Caldirola, Graffi, Abetti, Boaga, Caloi, Cotronei, Rossi-Fanelli, Pupilli, Segre, Crocco, Montalenti, Armellini.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

GARAVELLI C. L. - Un nuovo minerale tra i prodotti secondari di Capo Calamita (Isola d'Elba) (pres. dal Socio G. CAROBBI).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 12 marzo 1955*

- CAPPELLETTI Carlo. — *Commemorazione dell'Accademico Sen. Prof. Dott. Oreste Matti-  
rolo*. Estr. da «Annali dell'Accademia di  
Agricoltura di Torino», vol. XC, 1947-  
1948.
- *Commemorazione di Don Giacomo Bre-  
sadorola*. Estr. da «Natura Alpina», a. V,  
1954, n. 4.
- *Domenico Saccardo*. Estr. da «Rivista di  
Agricoltura Subtropicale e Tropicale», a.  
XLVI, 1952, nn. 10-12.
- *Gli Orti Botanici nella loro funzione sto-  
rica per la diffusione del sapere*. Estr.  
dal vol. «Il diritto dell'uomo al sapere e  
al libero uso di esso».
- *Ricerche sulle variazioni giornaliere del-  
l'acqua nelle piante alpine in relazione  
alla quota ed alla stazione*. Estr. da «Nuovo  
Giornale Botanico Italiano», n. s., vol. LX,  
1953.
- Cérémonie en l'honneur du XXV<sup>e</sup> anni-  
versaire de l'Institut de Biologie Physico-  
Chimique*. 2<sup>e</sup> Fondation Edmond de Ro-  
thschild pour le développement de la Re-  
cherche Scientifique. Paris, Hermann et  
C.<sup>ie</sup>, 1953. Pp. 28, in-8°.
- CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICRO-  
BIOLOGIA. ROMA, 6-12 SETTEMBRE 1953. —  
*Atti*. Vol. II, sezioni VI-VII, n. 1-109.  
Roma, 1955. Pp. 409, in-8°, con figg.
- GIRARD Pierre. — Vedi: LEBEAU Paul et  
GIRARD Pierre.
- HELMER O., SWEDENBORG G. et PETTERSSON  
G. A. — *L'électrification des chemins de  
fer Suédois et son effet perturbateur sur  
le réseau de télécommunication*. Stockholm,  
Ericcson, 1954. Pp. 23, in-4°, con figg.
- LEBEAU Paul et GIRARD Pierre. — *Hom-  
mage à Jean Perrin*. Paris, Hermann et  
C.<sup>ie</sup>, 1950. Pp. 25, in-8°.
- Osservazioni e Memorie dell'Osser-  
vatorio Astrofisico di Arcetri*. 1954, fasc. 69.
- PETTERSSON G. A. — Vedi: HELMER O.,  
SWEDENBORG G. et PETTERSSON G. A.
- SWEDENBORG G. — Vedi: HELMER O.,  
SWEDENBORG G. et PETTERSSON G. A.
- UNION INTERNATIONALE DES INSTITUTS DE  
RECHERCHES FORESTIÈRES. — *III<sup>ème</sup> Con-  
grès de Rome 1953. Comptes-Rendus*. Fi-  
renze, Ente Nazionale per la Cellulosa e  
per la Carta, 1954. Pp. XXXV-1103, in-8°,  
con figg.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 16 aprile 1955*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geometria algebrica.** — *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche.* Nota (\*) del Socio FRANCESCO SEVERI.

La teoria dell'equivalenza algebrica sopra una varietà algebrica irriducibile  $\infty^r, M_r$ , della quale m'occuperò in questa Nota, per trattare in una successiva di altra specie d'equivalenza, s'iniziò con miei antichi lavori (1904-1905-06), ove furono considerati (con particolare riguardo alle curve d'una superficie) il concetto di sistema algebrico irriducibile di varietà (pure) di data dimensione sopra  $M_r$ ; quello di varietà virtuale (pura) e infine la nozione di equivalenza algebrica. La teoria generale dell'equivalenza, nella quale la precedente s'inquadra, cominciò con una serie di Memorie da me date alla luce dal 1932 in poi.

Mi sono occupato delle relazioni di equivalenza nelle Lezioni di quest'anno all'Istituto Nazionale di Alta Matematica ed ho avuto così occasione di arrecare utili complementi alla teoria, dei quali riferisco qui, atteso l'interesse che la teoria stessa suscita oggi, ancor più che nel passato, in Italia e fuori, sia nei suoi riflessi topologici (considerati specialmente da Beniamino Segre e da suoi scolari), sia in mezzo al fervore creativo di parecchi geometri e cultori di algebra astratta, i quali tendono a ricostruire la teoria dal loro punto di vista e a travasare nell'indirizzo algebrico astratto la grande mole di risultati accumulati dalla geometria algebrica italiana in quasi un secolo di lavoro; e dimenticano però spesso di risalire alle fonti, le quali, per essere ormai lontane nel tempo, appartengono al terreno classico e non hanno perciò forse bisogno di troppi rinvii bibliografici.

(\*) Presentata nella seduta del 16 aprile 1955.

1. In quanto segue si presuppone la conoscenza dell'aspetto gruppale della teoria generale dell'equivalenza, adombrato soltanto in mie antiche Memorie e sviluppato sistematicamente nel 1934, da Todd <sup>(1)</sup>.

Riassumo brevemente le nozioni fondamentali che vi si riferiscono. Sopra  $M_r$  l'insieme delle varietà virtuali pure  $\infty^k$  costituisce (rispetto alla somma) un gruppo abeliano  $G$  di elementi, la cui classe zero è lo zero (*assoluta*)  $\infty^k$  dell'uguaglianza (rappresentato da uno qualunque dei simboli  $A - A$ ,  $B - B$ , ecc.;  $A$ ,  $B$ , ... essendo varietà virtuali pure  $\infty^k$ ).

Sia  $H$  un sottogruppo proprio di  $G$ , non ridotto all'identità, e si assuma come zero (*relativo*)  $Z$  una qualunque delle varietà virtuali di  $H$ . Due varietà virtuali pure  $\infty^k$ ,  $A$ ,  $B$  si dicono *equivalenti* (mod.  $Z$ ) e si scrive  $A = B$  (mod.  $Z$ ), se la loro differenza è un elemento  $Z$  di  $H$ .

È evidente che ogni equivalenza contiene come caso particolare l'uguaglianza e che è simmetrica, riflessiva, transitiva. L'insieme delle varietà  $A + Z$ , equivalenti ad  $A$ , costituisce un *sistema gruppale d'equivalenza*, che non è generalmente né algebrico né dimensionale. Le sue varietà hanno lo stesso ordine, soltanto se  $Z$  è d'ordine zero.

Il sottogruppo più ovvio entro  $G$  è il *gruppo dell'uguaglianza*, il cui zero relativo coincide con lo zero assoluto e i cui sistemi gruppali d'equivalenza constano ciascuno di tutte le varietà virtuali uguali a una data.

Un altro tipo d'equivalenza, che si presenta spontaneamente dopo quello dell'uguaglianza, è quello della *equivalenza algebrica* <sup>(2)</sup>. Di tale equivalenza si può dare subito una definizione gruppale, che diremo la definizione  $\alpha$ ), assumendo come elemento zero  $Z$  una qualunque differenza  $A_1 - A_2$  di due varietà virtuali  $A_1$ ,  $A_2$  (pure e  $\infty^k$ ) appartenenti totalmente sopra  $M_r$  a un medesimo sistema algebrico irriducibile di varietà virtuali <sup>(3)</sup>. Se infatti  $A_1 - A_2$ ,  $\bar{A}_1 - \bar{A}_2$  sono due elementi zero e  $\Sigma$ ,  $\bar{\Sigma}$  i sistemi irriducibili che, per ipotesi, contengono rispettivamente  $A_1$ ,  $A_2$  e  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2$ , la somma  $(A_1 - A_2) + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2)$  è ancora un elemento zero, perché le varietà virtuali  $A_1 + \bar{A}_1$ ,  $A_2 + \bar{A}_2$  appartengono al sistema algebrico irriducibile  $\Sigma \times \bar{\Sigma}$ . Pertanto gli zeri considerati costituiscono un sottogruppo di  $G$  e danno luogo ad un tipo di equivalenza, che è precisamente quello che stiamo definendo. Si ha dunque la seguente definizione:

(1) *Some groups theoretic considerations in algebraic geometry* («Annals of Mathematics», 1934). Ved. pure la mia Memoria: *Il punto di vista gruppale nei vari tipi di equivalenza sulle varietà algebriche* («Commentarii mathematici helvetici», 1948).

(2) Prescindo dall'*equivalenza lineare*, sostanzialmente considerata dalla geometria algebrica classica, da Max Noether in poi, la quale si presenta per  $k = r - 1$  quale caso particolare dell'equivalenza razionale, di cui ci occuperemo nella Nota successiva ed anche quale caso particolare dell'equivalenza algebrica, quando  $M_r$  sia una varietà superficialmente regolare. Prescindo altresì dall'*equivalenza topologica* (che sarebbe il tipo d'equivalenza, si può dire immediatamente successivo, in ordine gerarchico, all'uguaglianza e che forse coincide con l'equivalenza algebrica: così almeno è per le curve d'una superficie).

(3) Un sistema algebrico irriducibile di varietà virtuali è la somma algebrica di un numero finito di sistemi irriducibili di varietà effettive. Esso è birazionalmente equivalente al prodotto di questi.

$\alpha$ ) Due varietà (pure, effettive o virtuali)  $\infty^k$ ,  $A, B$ , si dicono *algebricamente equivalenti* (e si scrive  $A \equiv B$  invece che scrivere  $A = B$ , mod.  $Z$ ) se la loro differenza è uguale alla differenza di due varietà d'un medesimo sistema irriducibile.

A norma della definizione  $\alpha$ ) due varietà  $A, B$  d'un medesimo sistema irriducibile sono dunque algebricamente equivalenti. Questo particolare legame di equivalenza algebrica s'indicherà col segno  $\parallel$ . Scriveremo cioè  $A \parallel B$ .

Si osserverà inoltre che, secondo quanto precede, le due ultime varietà di cui si parla in  $\alpha$ ), posson supporsi *effettive*.

La  $\alpha$ ) è equivalente alla definizione:

$\beta$ ) Due varietà  $A, B$  (effettive o virtuali) sopra  $M$ , diconsi algebricamente equivalenti, se  $A \parallel B$ , oppure  $A + B \parallel B + C$ , ove  $C$  sia una conveniente varietà (virtuale o effettiva).

Questa definizione è quella che io diedi originariamente, nel 1906, per l'equivalenza algebrica <sup>(4)</sup>.

Che le varietà  $A, B$  equivalenti secondo  $\alpha$ ), cioè tali che  $A - B = C_1 - C_2$ , con  $C_1, C_2$  varietà totali d'un  $\Sigma$  irriducibile, lo sieno anche secondo  $\beta$ ), deriva da ciò che  $A + C_2 + C_1, B + C_1 + C_2$  appartengono totalmente allo stesso sistema irriducibile cui appartengono le varietà  $N + C$ , somme di  $N = A + C_2 = B + C_1$  con una varietà  $C$  variabile in  $\Sigma$ . Perciò  $A \equiv B$  nel senso della  $\beta$ ).

Viceversa, se  $A, B$  sono equivalenti secondo  $\beta$ ), cioè per una conveniente  $C$ , eventualmente nulla, è  $A + C \parallel B + C$ , risulta  $(A + C) - (B + C) = A - B$  uguale ad uno zero di  $\alpha$ ).

Un'altra definizione equivalente alle  $\alpha$ ),  $\beta$ ) è la seguente:

$\gamma$ ) Le varietà virtuali  $A, B$  diconsi algebricamente equivalenti se fra le loro rappresentazioni quali somme algebriche di varietà effettive (si può dire anzi, senza restrizione, quali differenze di varietà effettive) ve ne sono due, e sieno rispettivamente  $A_1 - A_2, B_1 - B_2$  tali che  $A_1 \parallel B_1$  e  $A_2 \parallel B_2$ .

Ho desunto la  $\gamma$ ) da una gentile lettera del 2 febbraio u. s., scrittami dal prof. van der Waerden.

Supponiamo, invero, che  $A \equiv B$  secondo  $\alpha$ ) e sieno  $A = A_1 - A_2, B = B_1 - B_2$  due rappresentazioni delle  $A, B$  con varietà effettive  $A_1, A_2; B_1, B_2$ .

Si può determinare un ordine così alto (non minore del più grande fra gli ordini delle  $A_2, B_2$ ) che fra gl'insiemi di  $d + r - k$  forme di quell'ordine

(4) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* («Math. Annalen», 1906). La definizione originaria è esattamente la  $\beta$ ) con le due alternative, di cui fin da allora avevo avvertito la necessità ai fini, che oggi si dicono gruppalì. Ved. alle pp. 197, 203, 206, 208 della citata Memoria. Originariamente la definizione si riferisce alle varietà effettive, ma il suo uso riguarda le varietà virtuali, tenuto conto che ogni relazione di equivalenza, di qualsiasi tipo, tra varietà virtuali, riducesi ad una relazione dello stesso tipo tra varietà effettive, in virtù della definizione di uguaglianza tra varietà virtuali.

(appartenenti all'ambiente lineare  $S_d$  di  $M_r$ ) ve ne sieno che contengano  $A_2, B_2$ , anzi  $A_2 + B_2$ , senza passare per  $M_r$ .

Consideriamo il sistema irriducibile (razionale) di varietà  $\infty^k$ , segato su  $M_r$  dagli insiemi di forme di quell'ordine. Tale sistema contiene parzialmente  $A_2 + B_2$ , sicché può trovarsi in esso una varietà  $N, \infty^k$ , tale che  $N - (A_2 + B_2)$  è effettiva. Pongasi:

$$N = A_2 + P, \quad N = B_2 + Q, \quad P + A_1 = C, \quad Q + B_1 = D,$$

ove  $C, D$  sono varietà *effettive*, come le  $A_1, A_2, B_1, B_2, P, Q$ . Ne deriva:

$$A = A_1 - A_2 = C - N, \quad B = B_1 - B_2 = D - N;$$

e da  $A_1 - A_2 \equiv B_1 - B_2$  segue  $C \equiv D$ . Ora o  $C \parallel D$  e allora le  $A, B$  ammettono due rappresentazioni del tipo voluto; oppure  $C + E \parallel D + E$ , con  $E$  varietà effettiva conveniente. In questo ultimo caso riesce:

$$A = (C + E) - (N + E), \quad B = (D + E) - (N + E)$$

e si cade nelle rappresentazioni volute per  $A, B$ . (Si vede anzi che le varietà  $A_2, B_2$  dell'enunciato possono essere assunte uguali).

Se, viceversa, le  $A, B$  sono equivalenti secondo  $\gamma$ ), cioè se esistono coppie rappresentative  $A_1 - A_2, B_1 - B_2$  di  $A, B$ , con  $A_1 \parallel B_1$  e  $A_2 \parallel B_2$ , risulta  $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$  secondo  $\alpha$ ) e quindi  $A_1 - A_2 \equiv B_1 - B_2$ , nel senso della  $\alpha$ ).

Si avvertirà che in quanto precede le singole varietà  $\infty^k$  di  $M_r$  debbono essere considerate quali *sistemi algebrici*  $\infty^0$ .

OSSERVAZIONE. - Una volta adottata come definizione la  $\alpha$ ), le  $\beta$ ),  $\gamma$ ), divengono teoremi, esprimenti condizioni necessarie e sufficienti.

2. Dalla definizione  $\beta$ ) si deduce agevolmente (ved. la mia Memoria citata dei «Commentarii helvetici», p. 196) che *due varietà effettive d'un sistema algebrico connesso sono algebricamente equivalenti*.

La proprietà non è invertibile, ossia *due varietà  $\infty^k$  effettive  $A, B$  possono essere algebricamente equivalenti, senza appartenere ad alcun sistema connesso*.

Un esempio in proposito è dato nella mia Memoria dei «Math. Annalen», 1906. Lo ricordo:

Si consideri la superficie  $F$  modello birazionale della varietà algebrica  $\infty^2$  delle coppie non ordinate dei punti d'una curva,  $\Gamma$ , di genere  $p > 0$ , e s'indichi con  $\Sigma$  il sistema algebrico  $\infty^1$ , d'indice 2 e di grado 1, di curve, ciascuna delle quali è immagine delle coppie che hanno su  $\Gamma$  un punto fisso. Si trasformi birazionalmente  $F$ , in modo che un punto (semplice)  $E$  di  $F$  si muti in una curva eccezionale (di 1<sup>a</sup> specie)  $E'$  della superficie trasformata  $F'$ ; e si assumano su  $F'$  quali curve  $A, B$  le trasformate (astrazione fatta da  $E'$ ) delle due curve di  $\Sigma$  uscenti da  $E$ . Le due curve  $A + E', B + E'$  appartengono su  $F'$  al sistema irriducibile  $\infty^1, \Sigma'$ , di curve, trasformato del sistema  $\Sigma$  di  $F$  e sono perciò algebricamente equivalenti per la seconda alternativa della  $\beta$ ). Tuttavia le  $A, B$  non appartengono come curve totali ad alcun sistema irriducibile  $\infty^1$  almeno; né appartengono totalmente ad un sistema connesso.



Infatti su  $F'$  le  $A$ ,  $B$  hanno il grado virtuale nullo e *non s'incontrano*, epperò né l'una né l'altra può appartenere ad un sistema irriducibile di dimensione  $> 0$  di curve. Tanto meno dunque esse possono appartenere ad un sistema connesso, che è costituito da componenti di dimensione  $> 0$ .

Abbiamo altresì, in tal modo, *un esempio che giustifica a priori la necessità della seconda alternativa della definizione  $\beta$* , ove tale necessità non fosse già giustificata *a posteriori* dal fatto che soltanto così la definizione  $\beta$  diviene equivalente alla  $\alpha$ ) e dà luogo pertanto ad una relazione transitiva. La mancanza della transitività toglierebbe ogni importanza alla relazione d'equivalenza algebrica.

**Fisica matematica.** — *Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei.* Nota I <sup>(\*)</sup> del Corrisp. LUIGI FANTAPPIÈ.

1. È ben noto che Newton formulò la sua celebre legge della gravitazione universale, affermando che due punti materiali, di masse  $m$  e  $m'$ , si comportano « come se si attraessero » con una forza  $F$ , misurata da

$$(1) \quad F = k \frac{mm'}{r^2}$$

ove  $r$  è la distanza e  $k$  una costante universale, rinunciando a ogni ipotesi esplicativa (« hypotheses non fingo »). Successivamente furono tentate delle spiegazioni di questa legge (immaginando, per esempio, che i due corpi fossero immersi in un mezzo di particelle in movimento, e la mutua attrazione fosse dovuta all'azione di schermo dell'uno sull'altro) e furono anche proposte delle leggere modifiche della legge stessa (alterando, per esempio, di una piccola quantità l'esponente 2 del denominatore). In questa Nota faremo invece vedere che *non c'è bisogno di alcuna « spiegazione »* della legge (1) della gravitazione, la quale *non può nemmeno essere alterata*, nel quadro della meccanica classica, perché essa è *conseguenza logica necessaria* del fatto, sempre ammesso, nella meccanica classica, che il gruppo che definisce l'uguaglianza di due fenomeni fisici è *il gruppo di Galilei*, e di alcune altre condizioni naturali, di carattere soltanto qualitativo, che concernono la *regolarità* delle funzioni ed operatori da considerare, o le proprietà specifiche della *materia* (diverse, per esempio, da quelle dell'elettricità).

2. Ricordiamo perciò che, nella fisica classica si considerano *uguali* due « fenomeni » o due « cose », che si possono ottenere l'uno dall'altro con una *traslazione* nello spazio dei punti  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  o nel tempo  $x_0$ .

$$(2) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad , \quad x'_0 = x_0 + \alpha_0$$

(\*) Presentata nella seduta del 16 aprile 1955.



o con una *rotazione* nello spazio

$$(3) \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \text{con } A \equiv \|a_{rs}\| \text{ matrice ortogonale}$$

o con un *trascinamento* su una piattaforma in moto rettilineo e uniforme, con velocità  $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ , dato da  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}x_0$ , oppure con prodotti di queste trasformazioni e di ribaltamenti rispetto a uno degli assi  $x'_j = -x_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), prodotti che costituiscono il cosiddetto *gruppo di Galilei* del nostro spazio-tempo o cronotopo, gruppo che indicheremo con  $Gl_{3+1}^{10}$ , in quanto opera sulle tre coordinate spaziali e su quella temporale, e risulta a 10 parametri (4 per le traslazioni (2), 3 per le rotazioni (3), 3 per i trascinamenti).

Ora il principio generale dell'*invarianza delle leggi naturali* (che definisce, in fondo, il concetto stesso di queste leggi) si può formulare dicendo che, se due entità fisiche  $\rho$  e  $\varphi$  sono legate da una legge  $K$ , in simboli

$$(4) \quad \rho = K\varphi,$$

la stessa legge deve valere anche fra le due entità fisiche  $\rho'$  e  $\varphi'$ , « uguali » a  $\rho$  e  $\varphi$  rispettivamente, che si ottengono cioè da esse con una stessa trasformazione  $T_\alpha$  del gruppo *base*, che definisce l'uguaglianza, e cioè con una qualunque  $T_\alpha$  del gruppo  $Gl_{3+1}^{10}$ , da noi prescelto, nella meccanica classica. In simboli, posto

$$(5) \quad \rho' = T_\alpha \rho, \quad \varphi' = T_\alpha \varphi,$$

deve sempre aversi, come conseguenza della (4),

$$(6) \quad \rho' (= T_\alpha \rho = T_\alpha K\varphi) = K\varphi' = KT_\alpha \varphi$$

e cioè

$$(7) \quad T_\alpha K\varphi = KT_\alpha \varphi$$

o anche

$$(8) \quad K\varphi = T_\alpha^{-1}KT_\alpha \varphi.$$

La legge espressa da  $K$  deve dunque essere *permutabile*, per la (7), con tutte le trasformazioni del gruppo base, o *invariante*, per la (8), rispetto alle stesse trasformazioni <sup>(1)</sup>.

3. Volendo allora ricercare quale possa essere la legge che governa l'azione mutua di *due punti materiali*, noi ammetteremo i seguenti postulati di partenza:

1° tale legge, come ogni altra legge naturale, deve essere *invariante*, nel senso espresso dalle (7) o (8), per il gruppo di Galilei  $Gl_{3+1}^{10}$ ;

2° tutte le funzioni in giuoco debbono essere *regolari*, cioè *continue*, con le derivate che si considerano, in tutti i punti, per cui sono definite, e anzi,

(1) Cfr. anche L. FANTAPPIÈ, *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica*, « Rend. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, vol. 12, 1952.

se risultano *analitiche*, debbono essere *regolari nel senso delle funzioni analitiche*, negli stessi punti, ivi compresi gli eventuali punti all' $\infty$ , se un corpo si può allontanare indefinitamente, con che la sua azione, al limite (e cioè all' $\infty$ ) *deve ridursi a zero*; mentre gli operatori fisici *locali*  $K\varphi(\mathbf{x})$  (quelli cioè calcolabili, quando è nota la funzione  $\varphi(\mathbf{x})$  in un intorno comunque ristretto del punto  $\mathbf{x}$ ) sono sempre esprimibili mediante i valori di  $\varphi$  e di un numero finito di derivate della  $\varphi$  nello stesso punto, a causa del fatto che tali operatori si esprimono per i valori di  $\varphi$  e di tutte le sue derivate nel punto  $\mathbf{x}$ , ma, per la imprecisione delle misure, non ha senso fisico la considerazione delle derivate di  $\varphi(\mathbf{x})$ , al di là di un certo ordine.

A questi due postulati, di carattere generale, aggiungeremo poi gli altri due seguenti, che esprimono le proprietà specifiche della materia:

3° l'azione mutua di due punti materiali dipende soltanto dalle loro *posizioni*, ma non dipende dalle *velocità* (come avviene invece per le azioni elettromagnetiche), né dal *tempo* (come accade nei fatti di «isteresi»), e si manifesta come una variazione delle *derivate seconde* delle coordinate, e cioè come una *forza* applicata a ciascuno di essi (la posizione e velocità di un punto materiale restando arbitrarie, con un opportuno cambiamento del sistema di riferimento) che è dunque una funzione  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  delle sole coordinate spaziali  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{x}' \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$  dei due punti;

4° tale azione, e cioè la forza  $F$ , esercitata da più corpi materiali su uno stesso punto materiale, ha carattere *lineare*, nel senso che detta forza è semplicemente la *somma* delle forze dovute ai singoli corpi; segue di qui, in particolare, che la forza  $\Phi(\mathbf{x})$  esercitata su un punto materiale  $\mathbf{x}$  da una distribuzione di materia di densità  $\rho(\mathbf{x}')$  in un volume  $V$ , è data da un operatore lineare

$$(9) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

che a ogni distribuzione  $\rho(\mathbf{x}')$  associa la forza  $\Phi(\mathbf{x})$ ; inoltre, dato che l'esperienza ci dimostra che la quantità di materia nell'intorno di un punto, e cioè la *densità*  $\rho(\mathbf{x})$ , si può inversamente determinare (per esempio con la bilancia) dalla distribuzione delle forze  $\Phi(\mathbf{x})$  in un intorno comunque ristretto del punto stesso, noi supporremo anche che  $\rho(\mathbf{x})$  si ottenga da  $\Phi(\mathbf{x})$  con un *operatore locale* pure *lineare*,

$$(10) \quad \rho(\mathbf{x}) = K' \Phi(\mathbf{x}).$$

4. Da questi 4 postulati, e cioè dalle proprietà del gruppo di Galilei  $GI_{3+1}^{10}$ , indicato al n. 2, e dagli altri 3 postulati di carattere *soltanto qualitativo*, sopra enunciati, mostriamo ora come si possa dedurre, *come conseguenza necessaria*, l'espressione (I) della forza  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , e cioè la legge di Newton della gravitazione universale.

Dalla *linearità* (postulato 4°) segue intanto che  $F$  è *proporzionale* tanto a  $m$  che a  $m'$ . Per quanto riguarda poi la *direzione* di questa forza  $F$ , essa dovrà

risultare *invariante* (postulato 1°) rispetto a quelle trasformazioni del gruppo di Galilei, che lasciano inalterato il sistema dei due punti materiali, e cioè rispetto alle *rotazioni* attorno alla retta congiungente i due punti, come asse. Ora, l'unica direzione, invariante rispetto a queste rotazioni, è *proprio la direzione della stessa congiungente*, poiché ogni altra direzione varia, per quelle rotazioni, descrivendo tutto un cono, e quindi abbiamo intanto che detta forza  $F$  è *necessariamente diretta secondo la congiungente*.

Dunque, ogni punto materiale  $\mathbf{x}'$  di massa  $m'$  e coordinate spaziali  $x'_1, x'_2, x'_3$  genera un *campo centrale* di forze, e se indichiamo ora con  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  l'intensità di tale forza, in un punto  $\mathbf{x}$  di massa unitaria  $m = 1$ , e di coordinate  $x_1, x_2, x_3$ , le sue componenti  $F_1, F_2, F_3$  saranno date da

$$(11) \quad F_j = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{x_j - x'_j}{r}, \quad r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2$$

poiché i coseni di direzione della congiungente i due punti sono dati precisamente da

$$(12) \quad \cos \vartheta_j = \frac{x_j - x'_j}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

D'altra parte, l'intensità  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  di questa forza deve pure essere *invariante* (postulato 1°) rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo di Galilei e in particolare rispetto alle trasformazioni *del sottogruppo dei movimenti* di  $S_3$ , e poiché questo possiede un solo invariante fondamentale, per le coppie di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , dato dalla loro *distanza*, risulta che tale intensità è necessariamente *una funzione  $F(r)$  della sola distanza  $r$*  dei due punti, con che risulta anche invariante, manifestamente, anche per tutte le altre trasformazioni del gruppo di Galilei. Sostituendo poi questa espressione  $F(r)$  a  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  nelle (11), risulta allora che le componenti della forza sono le derivate di una stessa funzione  $f(r)$  essendo

$$(13) \quad F_j = F(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial f(r)}{\partial x_j}$$

o

$$(14) \quad \mathbf{F} = \text{grad } f(r)$$

con

$$(15) \quad f(r) = \int F(r) dr + \text{cost}, \quad F(r) = f'(r)$$

e quindi abbiamo che questo campo centrale di forze, generato da un punto materiale  $\mathbf{x}'$  di massa  $m'$ , *ammette un potenziale  $f(r)$* , da cui si deduce subito l'intensità  $F(r) = f'(r)$  della forza.

Preso uguale a 0 il valore del potenziale in un punto fisso  $\bar{P}$  (per esempio, per  $r = \infty$ ) si ha allora (postulato 4°), sostituendo la (14) nella (9), che il campo di forze, generato da una distribuzione di densità  $\rho$ , è dato da

$$(16) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \iiint_V \text{grad } f(r) \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

cioè

$$(17) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x})$$

se poniamo

$$(18) \quad \varphi(\mathbf{x}) = \iiint_V f(r) \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

ed ammette pure un potenziale  $\varphi(\mathbf{x})$ , dato da questa espressione.

5. Per determinare quale possa essere l'intensità  $F(r)$  della forza, basterà determinare adesso il valore del potenziale  $f(r)$ , generato da un punto materiale  $\mathbf{x}'$ , da cui si ha immediatamente  $F(r) = f'(r)$ .

Osserviamo perciò che, sostituendo la (17) nella (10), si ha pure

$$(19) \quad \rho(\mathbf{x}) = K' \text{grad } \varphi = K\varphi$$

e cioè  $\rho$  si ottiene anche dal potenziale  $\varphi$ , con un operatore  $K$ , che è pure locale, poiché si esprime, come  $K'$  e  $\text{grad}$ , con le sole derivate di  $\varphi$  nel punto  $\mathbf{x}$ . Ora, se si conoscesse questo operatore locale  $K$  o  $K'$ , avremmo che, nel caso di un solo punto materiale  $\mathbf{x}'$  di massa  $m'$ , il potenziale  $\varphi(\mathbf{x})$  si ridurrebbe a  $f(r)$ , mentre la distribuzione di materia  $\rho(\mathbf{x})$  sarebbe nulla in ogni punto  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ; e quindi in ogni tale punto dovrebbe aversi, dalla (19),

$$(20) \quad \rho(\mathbf{x}) = Kf(r) = 0, \quad \text{per } r > 0.$$

La conoscenza dell'operatore locale  $K$  ci porterebbe dunque a un'equazione (20) a cui  $f(r)$  deve soddisfare, e quindi l'espressione del potenziale  $f(r)$  sarebbe subito determinata come soluzione di detta equazione.

Cerchiamo perciò di stabilire quale possa essere l'operatore lineare locale  $K$ , che lega il potenziale  $\varphi$  con la distribuzione di densità  $\rho$ , e che può sempre esprimersi (postulato 2°, mediante un numero finito di derivate della  $\varphi$ , nella forma

$$(21) \quad \rho(\mathbf{x}) = K\varphi(\mathbf{x}) = \sum b_{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{x}) \frac{\partial^s \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}} = \sum b_{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{x}) \frac{\partial^s \varphi(\mathbf{t} + \mathbf{x})}{\partial t_1^{s_1} \partial t_2^{s_2} \partial t_3^{s_3}}_{\mathbf{t}=0} \quad (s = s_1 + s_2 + s_3).$$

Poiché, d'altra parte, questo operatore deve essere permutabile con tutte le trasformazioni del gruppo di Galilei (postulato 1°), in particolare con le traslazioni  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \alpha$ , dovrà aversi  $\rho(\mathbf{x} + \alpha) = K\varphi(\mathbf{x} + \alpha)$ , e cioè l'identità

$$(22) \quad \sum b_{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{x} + \alpha) \frac{\partial^s \varphi(\mathbf{x} + \alpha)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}} = \sum b_{s_1 s_2 s_3}(\mathbf{x}) \frac{\partial^s \varphi(\mathbf{x} + \alpha)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}}$$

per ogni funzione  $\varphi(\mathbf{x})$ , da cui segue intanto che i coefficienti  $b_{s_1 s_2 s_3}$  debbono essere costanti, e quindi  $K$  può esprimersi nella forma

$$(23) \quad \rho(\mathbf{x}) = K\varphi(\mathbf{x}) = G[\varphi(\mathbf{t} + \mathbf{x})]$$

ove  $G[\varphi(\mathbf{t})]$  è il funzionale lineare puro

$$(24) \quad G[\varphi(\mathbf{t})] = \sum b_{s_1 s_2 s_3} \frac{\partial^s \varphi(\mathbf{t})}{\partial t_1^{s_1} \partial t_2^{s_2} \partial t_3^{s_3}}_{\mathbf{t}=0} = \rho(0)$$

che è definito per tutte le funzioni  $\varphi(t_1, t_2, t_3)$  regolari nell'origine  $t=0$ , con le loro derivate fino a un certo ordine massimo, e quindi, *in particolare*, è certamente definito per le funzioni *analitiche* e regolari nell'origine, nel quale campo risulta anzi, data la sua espressione (24), un funzionale *analitico* (lineare).

Esso si potrà dunque determinare perfettamente<sup>(2)</sup> mediante la sua *indicatrice proiettiva*  $p(\tau)$ , definita dalla formula

$$(25) \quad p(\tau) = G \left[ \frac{1}{1 + \tau_1 t_1 + \tau_2 t_2 + \tau_3 t_3} \right] = \sum_{s_1 s_2 s_3} b_{s_1 s_2 s_3} (-1)^s s! \tau_1^{s_1} \tau_2^{s_2} \tau_3^{s_3}$$

che risulta dunque un *polinomio* nelle  $\tau_j$ , a causa dell'espressione (24) di  $G$ .

Ma l'operatore  $K$  deve essere permutabile (postulato 1°) anche con le altre trasformazioni del gruppo di Galilei, in particolare con tutte le « rotazioni » (3) attorno all'origine, e quindi dalla (23) si ricava

$$(26) \quad \rho(Ax) = K\varphi(Ax) = G[\varphi(At + Ax)]$$

e, per  $x=0$ , dalla (24)

$$(27) \quad \rho(0) = G[\varphi(t)] = G[\varphi(At)]$$

cioè il funzionale lineare  $G$  deve essere *invariante* per ogni sostituzione ortogonale,  $A$ , effettuata sulle variabili. Poiché, d'altra parte, il valore di detto funzionale, per ogni funzione analitica  $\varphi(t)$ , si ottiene subito mediante il *prodotto funzionale proiettivo* di  $\varphi$  per la sua indicatrice proiettiva  $p$

$$(28) \quad G[\varphi(t)] = p(\tau) \nabla \varphi(t)$$

e questa formazione è *invariante* (ved. Mem. citata in<sup>(2)</sup>), quando sulle  $t_j$  e  $\tau_j$  si effettuino sostituzioni lineari « duali » (trasposta dell'inversa, l'una dell'altra), quindi, in particolare, una stessa trasformazione *ortogonale* (che è sempre autoduale), avremo anche che dovrà aversi identicamente, per la (27),

$$(29) \quad G[\varphi(t)] = p(\tau) \nabla \varphi(t) = p(\tau) \nabla \varphi(At) = p(A^{-1}\tau) \nabla \varphi(t)$$

da cui segue

$$(30) \quad p(\tau) = p(A^{-1}\tau).$$

Dunque l'indicatrice proiettiva  $p(\tau)$  del funzionale lineare  $G$  non può essere un polinomio qualunque (25), ma una funzione *invariante* per tutte le sostituzioni ortogonali  $A^{-1}$ , e quindi una funzione dell'unico invariante indipendente di questo gruppo, che è la forma

$$(31) \quad \tau^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2.$$

L'indicatrice proiettiva  $p(\tau)$  (25) non può essere pertanto che un *polinomio* in  $\tau^2$  a coefficienti costanti  $a_s$ , e cioè della forma

$$(32) \quad p(\tau) = \sum_s^m a_s (2s)! (\tau^2)^s$$

(2) Cfr.: L. FANTAPPIÈ, *L'indicatrice proiettiva*, ecc., « Ann. di Matem. », ser. 4<sup>a</sup>, vol. 22, 1943.



da cui segue (ved. Memor. citata in <sup>(2)</sup>) che, posto

$$(33) \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

l'espressione dell'operatore  $K\varphi$  è data, per le (23), (28), (32) da

$$(34) \quad \rho(\mathbf{x}) = K\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^m a_s \Delta^s \varphi$$

cioè che *tale operatore locale K è necessariamente un polinomio dell'operatore fondamentale  $\Delta$  di Laplace* (corrispondente all'invariante  $2\tau^2$ ), ed è quindi un operatore definito non solo per le funzioni *analitiche*, ma anche per tutte le funzioni *regolari* (e continue) con le derivate, fino a un certo ordine  $2m$ .

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Algebra.** — *Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei.* Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

1. Nelle *Lezioni di Geometria moderna* <sup>(1)</sup> di B. Segre è dimostrato incidentalmente che la commutatività di un corpo ordinato segue necessariamente quando si supponga ch'esso sia archimedeo. Cercando una più semplice dimostrazione di questo teorema, si è trovato che esso vale — molto più in generale e come qui proveremo — per anelli *a priori* non associativi e che inoltre, dall'ipotesi dell'archimedeicità, segue anche la proprietà associativa del prodotto nonché l'isomorfismo dell'anello ad un dominio d'integrità contenuto nel campo reale.

2. Sia  $\mathfrak{A}$  un anello non necessariamente associativo, ossia un sistema a doppia composizione, le due composizioni essendo l'addizione e la moltiplicazione, per modo che:

I) il sistema risulti un gruppo abeliano rispetto all'addizione;

II) il sistema risulti chiuso rispetto alla moltiplicazione;

III) la moltiplicazione sia distributiva, tanto a destra che a sinistra, rispetto all'addizione.

In  $\mathfrak{A}$  entrambe le proprietà distributive valgono anche per la sottrazione. Ad esempio è:  $a(b - c) = ab - ac$ . Da cui, posto  $c = b$ , si ha  $a0 = 0$  per ogni  $a \in \mathfrak{A}$  e similmente  $0a = 0$ , quindi: *un prodotto è zero se è zero uno dei fattori*. L'inversa di questa proposizione non è necessariamente vera, ossia in  $\mathfrak{A}$  possono esistere elementi  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  per cui  $ab = 0$ . Questi elementi chiamansi *divisori dello zero*.

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) B. SEGRE [4], p. 18.

Un sistema  $\mathfrak{A}$ , non costituito dal solo zero, si dirà *ordinabile* se l'insieme dei suoi elementi, da cui si escluda lo zero, si può dividere in due classi disgiunte tali che:

- I') se  $a$  appartiene ad una classe, —  $a$  appartenga all'altra;  
 II') una delle due classi risulti chiusa rispetto a ciascuna delle due operazioni.

Fissata che sia una suddivisione in classi del tipo indicato,  $\mathfrak{A}$  dicesi *ordinato*. In seguito si considereranno solo sistemi  $\mathfrak{A}$  ordinati.

Gli elementi di  $\mathfrak{A}$  appartenenti alla classe di cui alla II') si diranno *positivi* e, se  $a$  è un tale elemento, si scriverà  $a > 0$ . Gli elementi dell'altra classe si diranno *negativi* e, se  $b$  è un tale elemento, si scriverà  $b < 0$ .

Fra gli elementi di  $\mathfrak{A}$  si possono allora definire le relazioni di *maggiore* ( $>$ ) e *minore* ( $<$ ), scrivendo:

$$a > b \text{ se } a - b > 0, \quad a < b \text{ se } a - b < 0.$$

Fra due qualunque elementi  $a, b \in \mathfrak{A}$  intercede una e una sola delle relazioni:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

Due elementi qualsiasi di  $\mathfrak{A}$ , diversi da zero, o appartengono ambedue ad una stessa classe o a classi diverse: nel primo caso il loro prodotto appartiene alla classe positiva, nel secondo caso alla classe negativa; in ogni caso esso è diverso da zero. Ne segue che *un sistema  $\mathfrak{A}$  ordinato è privo di divisori dello zero* <sup>(2)</sup>.

Si hanno le seguenti proprietà di ordinamento <sup>(3)</sup>:

$$1^a \quad a > b, \quad b > c \rightarrow a > c,$$

$$2^a \quad a > b \rightarrow a + c > b + c, \quad \begin{cases} ac > bc, \quad ca > cb & \text{se } c > 0 \\ ac < bc, \quad ca < cb & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

$$3^a \quad a > b, \quad c > d \rightarrow a + c > b + d,$$

$$4^a \quad a > b > 0, \quad c > d > 0 \rightarrow ac > bd, \quad ca > db.$$

Sia  $a > 0$  ed  $n$  un intero arbitrario. Posto  $na = a + a + \dots + a$ , si ha:

$$0 < a < 2a < 3a < \dots < na.$$

(2) Si noti che la proprietà commutativa della somma, per il sistema ordinato  $\mathfrak{A}$ , è conseguenza del fatto che in  $\mathfrak{A}$  mancano divisori dello zero. Siano infatti  $a, b$  due qualunque elementi di  $\mathfrak{A}$ . Fissato comunque in  $\mathfrak{A}$  un elemento  $c \neq 0$ , si ha

$$ac + bc + ac + bc = (a + b)(c + c) = ac + ac + bc + bc,$$

da cui:

$$\begin{aligned} bc + ac &= ac + bc \rightarrow (b + a)c = (a + b)c \rightarrow [(b + a) - (a + b)]c = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (b + a) - (a + b) = 0 \rightarrow b + a = a + b \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

(3) Esse si dimostrano con le stesse considerazioni indicate ad esempio in B. SEGRE [4], p. 17, nel caso dei corpi ordinati.

Dunque  $\mathfrak{A}$  è costituito da infiniti elementi diversi. Inoltre dalle precedenti disuguaglianze si deduce che, se  $a < 0$ , da  $ka \geq ha$  segue  $k \leq h$ , con  $k, h$  interi positivi.

Si hanno inoltre le proprietà:

$$5^a \quad a > b > 0, \quad na \leq Nb \rightarrow n < N \text{ (con } N, n \text{ interi positivi)}.$$

Si ha infatti  $Na > Nb \geq na$ , da cui  $Na > na$  e quindi  $N > n$ .

$$6^a \quad a > 0, \quad b > 0, \quad N^k a < N^h b \text{ con } k \geq h > 0 \rightarrow N^{h-k} a < b.$$

Infatti se fosse  $N^{h-k} a \geq b$ , sommando detta relazione  $N^h$  volte a se stessa si avrebbe  $N^k a \geq N^h b$ , contro l'ipotesi.

3. Un sistema  $\mathfrak{A}$  ordinato si dirà *archimedeo* se, presi comunque due elementi  $a, b \in \mathfrak{A}$  positivi, con  $a < b$ , esiste un intero positivo  $n$  tale che  $na > b$ .

Sussiste il seguente:

TEOREMA I. — Un sistema  $\mathfrak{A}$  ordinato archimedeo è commutativo e associativo rispetto al prodotto, e quindi è un dominio d'integrità.

DIMOSTRAZIONE. *Proprietà commutativa del prodotto.* — Si supponga per assurdo che  $a$  e  $b$  siano due elementi non permutabili di  $\mathfrak{A}$ ; scambiando se necessario  $a$  e  $b$  e scrivendo eventualmente  $-a, -b$  in luogo di  $a, b$ , ci si può ridurre ad avere  $a > 0, b > 0, ab - ba > 0$ .

Fissato comunque un elemento  $c$  di  $\mathfrak{A}$ , maggiore sia di  $a$  che di  $b$  (per esempio  $a + b$ ), e preso un intero positivo arbitrario  $N$ , si considerino le coppie di elementi di  $\mathfrak{A}$ :  $Na, c$  e  $Nb, c$ . Esistono due numeri naturali non negativi  $n$  e  $m$  per cui:

$$nc \leq Na \leq (n + 1)c \quad \text{con } 0 \leq n < N,$$

$$mc \leq Nb \leq (m + 1)c \quad \text{con } 0 \leq m < N.$$

Moltiplicando membro a membro la prima relazione per la seconda, una volta a destra e una volta a sinistra, si ha:

$$nm c^2 \leq N^2 ab \leq (n + 1)(m + 1) c^2$$

$$nm c^2 \leq N^2 ba \leq (n + 1)(m + 1) c^2$$

da cui, sottraendo dalla seconda disuguaglianza della prima relazione la prima disuguaglianza della seconda relazione, e osservando che  $n + m + 1 < 2N$ , si ha:

$$N^2 (ab - ba) \leq [(n + 1)(m + 1) - nm] c^2 < 2N c^2,$$

ed infine, essendo  $ab - ba > 0$  e ricordando la proprietà 6<sup>a</sup>,

$$0 < N (ab - ba) < 2 c^2.$$

Ora ciò, data l'arbitrarietà di  $N$ , è contro l'ipotesi che  $\mathfrak{A}$  sia archimedeo, ciò che dimostra l'asserto.

*Proprietà associativa:* si supponga per assurdo che  $a, b, c$  siano tre elementi di  $\mathfrak{A}$  per cui  $a(bc) \neq (ab)c$ ; tenuto presente che - come s'è visto testé - in  $\mathfrak{A}$  vale la proprietà commutativa, scambiando se necessario  $a$  con  $c$  e scrivendo eventualmente  $-a, -b, -c$  in luogo di  $a, b, c$  ci si può ridurre ad avere  $a > 0, b > 0, c > 0, a(bc) - (ab)c > 0$ .

Fissato comunque un elemento  $d$  di  $\mathfrak{A}$  maggiore di ciascuno degli elementi  $a, b, c$  (per esempio  $a + b + c$ ), e preso un intero positivo arbitrario  $N$ , si considerino le coppie di elementi di  $\mathfrak{A}$ :  $Na, d; Nb, d; Nc, d$ . Esistono tre numeri naturali non negativi  $p, q, r$  per cui:

$$\begin{aligned} (1) \quad & pd \leq Na \leq (p+1)d && \text{con } 0 \leq p < N \\ (2) \quad & qd \leq Nb \leq (q+1)d && \text{con } 0 \leq q < N \\ (3) \quad & rd \leq Nc \leq (r+1)d && \text{con } 0 \leq r < N. \end{aligned}$$

Moltiplicando a destra il prodotto delle (1) e (2) per (3), si ha:

$$pqr d^3 \cdot d \leq N^3 (ab)c \leq (p+1)(q+1)(r+1) d^2 \cdot d.$$

Analogamente moltiplicando a sinistra il prodotto delle (2) e (3) per (1), si ha:

$$pqr d \cdot d^2 \leq N^3 a(bc) \leq (p+1)(q+1)(r+1) d \cdot d^2.$$

Ma poiché vale la proprietà commutativa del prodotto, sarà

$$d \cdot d^2 = d^2 \cdot d = d^3,$$

onde

$$\begin{aligned} pqr d^3 &\leq N^3 (ab)c \leq (p+1)(q+1)(r+1) d^3, \\ pqr d^3 &\leq N^3 a(bc) \leq (p+1)(q+1)(r+1) d^3; \end{aligned}$$

sicché, sottraendo dalla seconda disuguaglianza della prima relazione la prima disuguaglianza della seconda relazione, e osservando che  $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr < 3N^2$ , si ha:

$$N^3 [(ab)c - a(bc)] \leq [(p+1)(q+1)(r+1) - pqr] d^3 < 3N^2 d^3.$$

Infine, essendo  $(ab)c - a(bc) > 0$  e ricordando la 6<sup>a</sup>, dall'ultima relazione si ricava:

$$0 < N [(ab)c - a(bc)] < 3d^2$$

Ora questo, data l'arbitrarietà di  $N$ , è contro l'ipotesi che  $\mathfrak{A}$  sia archimedeo, ciò che dimostra l'asserto.

4. Ci proponiamo da ultimo di dimostrare l'isomorfismo di un qualsiasi sistema  $\mathfrak{A}$  archimedeo ad un dominio d'integrità contenuto nel campo dei numeri reali. Giungeremo a questo risultato - almeno nel caso che  $\mathfrak{A}$  possenga un elemento  $u$  per cui  $u^2 = u$  - indipendentemente dai risultati precedenti, in modo da ottenere, tra l'altro, una nuova dimostrazione del teor. I. All'uopo dimostriamo il seguente:

TEOREMA II. — Ogni sistema  $\mathfrak{A}$  archimedeo, per cui esista un elemento  $u > 0$  tale che  $u^2 = u$ , è isomorfo ad un dominio d'integrità contenuto nel campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , l'isomorfismo conservando l'ordinamento.

Dato un numero razionale non nullo  $m/n$ , si converrà di assumere (com'è lecito)  $m > 0, n > 0$  se  $\frac{m}{n} > 0$ , e  $m < 0, n > 0$  se  $\frac{m}{n} < 0$ .

Ogni elemento  $a \in \mathfrak{A}$  determina nel campo dei numeri razionali una suddivisione in due classi, la prima costituita dai numeri razionali  $p/q$  per cui  $pu \leq qa$ , la seconda costituita dai numeri razionali  $r/s$  per cui  $ru > sa$ . Poiché  $\mathfrak{A}$  è archimedeo, nessuna delle due classi è vuota. Gli elementi della prima classe sono minori degli elementi della seconda classe: infatti, presi due qualsiasi elementi  $p/q, r/s$  rispettivamente della prima e della seconda classe (ov'è  $q > 0, s > 0$  in base alle convenzioni adottate), risulta:

$$\begin{aligned} pu \leq qa, ru > sa &\rightarrow psu \leq qsa, qsa < qru \rightarrow \\ &\rightarrow psu < qru \rightarrow ps < qr \rightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}. \end{aligned}$$

Ne segue che  $a$  determina nel campo dei numeri razionali una sezione razionale di Dedekind, individuante un numero reale  $\alpha$ .

L'applicazione  $a \rightarrow \alpha$  di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathbb{R}$  è, come ora mostreremo, un omomorfismo <sup>(4)</sup>: Presi comunque  $a, b \in \mathfrak{A}$ , con  $a \rightarrow \alpha, b \rightarrow \beta$ , si tratta di far vedere che  $a + b \rightarrow \alpha + \beta, ab \rightarrow \alpha\beta$ . Dette  $\left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$  e  $\left[\frac{p'}{q'}, \frac{r'}{s'}\right]$  rispettivamente le sezioni razionali individuate da  $a$  e  $b$ , sarà

$$(4) \quad \begin{cases} pu \leq qa & , & ru > sa, \\ p'u \leq q'b & , & r'u > s'b, \end{cases}$$

da cui, moltiplicando a sinistra le prime relazioni per le seconde

$$(5) \quad pp'u \leq qq'ab, \quad rr'u > ss'ab,$$

ed anche:

$$(6) \quad (pq' + qp')u \leq qq'(a + b), \quad (rs' + r's)u > ss'(a + b).$$

Da (5) e (6) segue che le sezioni individuate da  $ab$  e  $a + b$  sono rispettivamente il prodotto e la somma delle sezioni individuate da  $a, b$ , onde l'asserto.

Nell'omomorfismo  $a \rightarrow \alpha$ , lo zero di  $\mathbb{R}$  proviene solamente dallo zero di  $\mathfrak{A}$ , ciò basta per assicurare che il detto omomorfismo è oloedrico <sup>(5)</sup>.

L'insieme degli elementi  $\alpha \in \mathbb{R}$ , provenienti da elementi  $a \in \mathfrak{A}$  nell'omomorfismo oloedrico  $a \rightarrow \alpha$ , formano un sistema  $\bar{\mathfrak{A}}$  isomorfo al sistema  $\mathfrak{A}$ , ma, essendo  $\bar{\mathfrak{A}}$  contenuto in  $\mathbb{R}$ , in  $\bar{\mathfrak{A}}$ , e quindi anche in  $\mathfrak{A}$ , debbono valere la pro-

(4) Per la nozione di omomorfismo si veda per esempio B. SEGRE [4], p. 20 e sgg.

(5) Per la nozione di omomorfismo oloedrico si veda per esempio B. SEGRE [4], p. 21.



prietà associativa e la proprietà commutativa del prodotto. Ne segue che  $\mathfrak{A}$  è un dominio d'integrità isomorfo al dominio d'integrità  $\bar{\mathfrak{A}}$  contenuto nel campo reale. Sia ora  $a \in \mathfrak{A}$ , con  $a > 0$ ; esisterà un intero positivo  $n$  per cui  $u < na$ , onde per il numero reale  $\alpha$  corrispondente ad  $a$  si ha  $0 < 1/n < \alpha$ . Quindi, nell'isomorfismo tra  $\mathfrak{A}$  e  $\bar{\mathfrak{A}}$ , ad elementi positivi di  $\mathfrak{A}$  corrispondono elementi positivi di  $\bar{\mathfrak{A}}$ , e ciò basta per assicurare che il detto isomorfismo conserva l'ordinamento.

Dal teorema precedente segue:

COROLLARIO <sup>(6)</sup>. - *Ogni corpo archimedeo è isomorfo ad un campo contenuto nel campo dei numeri reali, l'isomorfismo conservando l'ordinamento.*

5. È noto <sup>(7)</sup> il teorema seguente:

TEOREMA III. - *Ogni dominio d'integrità ordinato può venire immerso in un campo ordinato, in guisa che l'ordinamento di questo induca nel dominio d'integrità l'ordinamento ivi definito, il campo risultando archimedeo se tale è il dominio d'integrità.*

Dal teorema I del n. 3, dal teorema precedente e dal corollario del n. 4 segue subito il

TEOREMA IV. - *Ogni sistema  $\mathfrak{A}$  archimedeo risulta isomorfo ad un dominio d'integrità contenuto nel campo dei numeri reali, l'isomorfismo conservando l'ordinamento* <sup>(8)</sup>.

Dalle considerazioni precedenti si trae subito che ogni corpo archimedeo completo <sup>(9)</sup> è isomorfo al campo reale, l'isomorfismo conservando l'ordina-

(6) Questo corollario è sostanzialmente noto, si veda per esempio A. A. ALBERT [1], p. 266 oppure U. MORIN [3], p. 242.

(7) Si veda U. MORIN [3], p. 236 e sgg.

(8) Nel caso in cui  $\mathfrak{A}$  possieda un elemento positivo  $a$  minore o uguale a ciascun elemento positivo di  $\mathfrak{A}$ , il teor. IV si può dimostrare direttamente secondo la via sottoindicata, che non dipende dalle considerazioni precedenti:

sia  $b$  un elemento positivo di  $\mathfrak{A}$  diverso da  $a$ , sarà  $b - a > 0$ , onde  $0 < b - a \leq a$  e quindi  $0 < b = 2a$  o  $b - 2a > 0$ ;

sia  $b - 2a > 0$ , sarà  $b - 2a \leq a$  e quindi  $0 < b = 3a$  o  $b - 3a > 0$ . Così proseguendo, si giungerà ad un intero positivo  $k > 1$  per cui  $b = ka$ , in quanto  $\mathfrak{A}$  è archimedeo;

sia ora  $b$  un qualsiasi elemento di  $\mathfrak{A}$ : se  $b = 0$  scriveremo  $b = 0a$ , dove  $0$  è lo zero dei numeri naturali; se  $b < 0$ , sarà  $-b > 0$  ed esisterà quindi un intero positivo  $k$  per cui  $-b = ka$ , ossia  $b = -(ka)$ , e scriveremo  $b = (-k)a$ . Così ad ogni  $b \in \mathfrak{A}$  rimane associato un intero relativo  $k$ , per cui  $b = ka$ . In particolare all'elemento  $a^2$  rimane associato un intero positivo  $l$  per cui  $a^2 = la$ ;

si faccia corrispondere all'elemento  $b = ka$  di  $\mathfrak{A}$  l'intero relativo  $kl$ . Nasce così una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di  $\mathfrak{A}$  e gli interi relativi multipli di  $l$ , che risulta manifestamente un isomorfismo, conservante l'ordinamento. Pertanto: *ogni sistema  $\mathfrak{A}$  archimedeo per cui esista un  $a \in \mathfrak{A}$  positivo non maggiore di ciascun elemento positivo di  $\mathfrak{A}$  è isomorfo all'anello dei multipli di un dato intero positivo, l'isomorfismo conservante l'ordinamento.*

(9) Per la definizione di corpo ordinato completo si veda per esempio P. DUBREIL [2], p. 292 e sgg.

mento. Da ciò seguono come immediati corollari i teoremi sui corpi ordinati completi archimedei <sup>(10)</sup>.

Come conseguenze geometriche di quanto sopra si ha che gli spazi grafici irriducibili desarguesiani archimedei <sup>(11)</sup> non differiscono che per un isomorfismo dagli spazi lineari costruiti sui campi contenuti nel campo reale. Più in particolare, se lo spazio grafico irriducibile desarguesiano si suppone continuo, esso non differirà che per un isomorfismo da uno spazio reale.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. A. ALBERT, *Modern Higher Algebra* (University of Chicago Press, Chicago, 1937).  
 [2] P. DUBREIL, *Algèbre* (Gauthier-Villars, Paris, 1954).  
 [3] U. MORIN, *Algebra astratta*, vol. I (Cedam, Padova, 1955).  
 [4] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna*, vol. I (Zanichelli, Bologna, 1948).

**Geometria differenziale.** — *Un'applicazione dell'integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane.* Nota di ALESSANDRO OSTROWSKI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio F. SEVERI.

Sia  $S$  una curva piana

$$(1) \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s),$$

ove  $s$  è la lunghezza dell'arco. L'evoluta  $\Sigma$  di  $S$  è rappresentata, in funzione del parametro  $s$ , dalle equazioni

$$(2) \quad \xi = x - r\dot{y} \quad , \quad \eta = y + r\dot{x},$$

ove  $r$  è il raggio di curvatura. Da (2) si ottiene, se  $r$  è derivabile,

$$\dot{\xi} = -\dot{r}\dot{y} \quad , \quad \dot{\eta} = \dot{r}\dot{x},$$

e quindi

$$(3) \quad \frac{d\xi}{dr} = -\dot{y} \quad , \quad \frac{d\eta}{dr} = \dot{x}.$$

Da queste equazioni si deducono immediatamente le proprietà fondamentali dell'evoluta  $\Sigma$ : la lunghezza dell'arco di  $\Sigma$  è  $s + c$  e la tangente a  $\Sigma$  coincide colla normale di  $S$ .

D'altra parte queste proprietà valgono anche, come ho provato recentemente <sup>(1)</sup> nell'ipotesi che  $r$  sia continua e monotona in senso stretto, senza essere necessariamente derivabile.

(10) Cfr. ad esempio P. DUBREIL [2], p. 301 e sgg.

(11) Si veda B. SEGRE [4], p. 128 e sgg.

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) Vedasi A. OSTROWSKI, *Ueber Evoluten und Evolventen ebener Kurven*, « Archiv der Mathematik », 6 (1955), pp. 170-179.

In quanto segue d'ò una dimostrazione brevissima di questo risultato, utilizzando la *nozione dell'integrale di Stieltjes*.

Designato con  $t$  l'angolo della tangente coll'asse  $x$ , viene:

$$\dot{x} = \cos t \quad , \quad x = \int \cos t \, ds + c_1,$$

e quindi, poiché  $ds = r \, dt$ :

$$x + c_1 = \int r \cos t \, dt = \int r \, d \sin t.$$

Considerando questo integrale come integrale di Stieltjes ed applicando la formula dell'integrazione per parti, quale si dimostra nella teoria dell'integrale di Stieltjes, s'ottiene

$$x = - \int \sin t \, dr + r \sin t + c_2;$$

dunque, tenuto conto di (2):

$$\xi = x - r \sin t = - \int \sin t \, dr + c_2;$$

e questo integrale può considerarsi,  $r$  essendo monotono, come un integrale classico. La prima formula (3) ne segue immediatamente, e la seconda formula (3) si dimostra in modo analogo.

Lo stesso procedimento può essere applicato alla *costruzione dell'evolvente* della curva data

$$(4) \quad \xi = \xi(\sigma) \quad , \quad \eta = \eta(\sigma),$$

ove  $\sigma$  è la lunghezza dell'arco e si suppone soltanto che l'angolo  $\theta$  della tangente coll'asse  $x$  sia una funzione di  $\sigma$ , continua e monotona in senso stretto. L'evolvente  $S$  di  $\Sigma$  è data dalle formule

$$(5) \quad x = \xi - \sigma \xi' \quad , \quad y = \eta - \sigma \eta'$$

ove  $\sigma$  è assunto positivo per l'intera porzione considerata di  $\Sigma$ . Abbiamo allora, considerando gl'integrali come integrali di Stieltjes ed integrando per parti:

$$\xi' = \int \cos \theta \, d\sigma + c = - \int \sigma \, d \cos \theta + \sigma \cos \theta + c_1 = \int \sigma \sin \theta \, d\theta + \sigma \cos \theta + c_1,$$

dunque, tenute presenti le (5):

$$x = \int_0^\theta \sigma \sin \theta \, d\theta + c_1 \quad , \quad \frac{dx}{d\theta} = \sigma \sin \theta.$$

Un calcolo esattamente analogo fornisce

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sigma \cos \theta.$$

Designando con  $s, t$  e  $r$  la lunghezza dell'arco, l'angolo della tangente coll'asse  $x$  e il raggio di curvatura di  $S$ , abbiamo ora:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sigma, \quad t = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad r = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} = \sigma,$$

epperò l'evolvente  $S$  di  $\Sigma$ , definita dalle (5), è una curva dotata di  $t$  e  $r$  continue, e l'evoluta di  $S$  è  $\Sigma^{(2)}$ .

Consideriamo finalmente una curva piana  $S$

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

con  $x, y$  funzioni dell'arco  $s$ , e l'angolo  $t$  della tangente coll'asse  $x$  sia una funzione continua e monotona in senso stretto. La curva parallela  $S_l$  alla distanza  $l$  è definita per ogni  $l \geq 0$  dalle equazioni

$$(6) \quad \xi = x - l\dot{y}, \quad \eta = y + l\dot{x}.$$

Sebbene  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  non sieno necessariamente derivabili rispetto a  $s$ , proveremo qui che se  $\sigma = s - lt$  è una funzione monotona in senso stretto lungo  $S$ ,  $S_l$  possiede una tangente che forma lo stesso angolo  $t$  coll'asse  $x$ , e la lunghezza dell'arco di  $S_l$  è misurata da  $\sigma = s - lt$  <sup>(3)</sup>.

Infatti, considerando i due integrali

$$x = \int \cos t ds + c_1, \quad y = \int \cos t dt + c_2$$

come integrali di Stieltjes, sottraendo otteniamo

$$\xi = \int \cos t d(s - lt) = \int \cos t d\sigma,$$

epperò

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \cos t,$$

e nello stesso modo

$$\frac{d\eta}{d\sigma} = \sin t.$$

Il nostro teorema ne segue immediatamente.

(2) Vedasi per il teorema così nuovamente dimostrato A. OSTROWSKI, loc. cit.

(3) Vedasi per un'altra dimostrazione di questo teorema A. OSTROWSKI, *Zur Differentialgeometrie der ebenen Parallelkurven*, «Mathematische Miszellen, XXIII. Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung», 58 (1955).

**Magneto-idrodinamica.** — *Osservazioni su una relazione energetica della magneto-idrodinamica.* Nota di RENATO NARDINI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. In un dominio, di volume  $V$ , limitato dalla superficie  $\sigma$ , si muova un fluido. Il primo principio della termodinamica permette di scrivere la seguente relazione molto generale <sup>(1)</sup>:

$$(1) \quad dQ_e + dL_m = d(T + U)$$

dove  $dQ_e$  è il calore che nell'intervallo di tempo  $t, t + dt$  attraversa  $\sigma$ ,  $dL_m$  il lavoro delle forze meccaniche agenti nel volume  $V$  e delle pressioni esercitate attraverso  $\sigma$ ,  $dT$  e  $dU$  rappresentano, in  $V$ , la variazione rispettivamente dell'energia cinetica e dell'energia interna nel medesimo intervallo di tempo  $t, t + dt$ .

Se poi, nel volume  $V$ , si propaga anche un campo elettromagnetico, in maniera indipendente dal moto del fluido (più precisamente le equazioni del campo elettromagnetico sono indipendenti dalle equazioni del moto del fluido), vale il teorema di Poynting, che scriveremo nel seguente modo:

$$(2) \quad dL_e + dI = dW + dQ_i$$

dove  $dL_e$  è il lavoro delle forze elettriche impresse presenti nel volume  $V$ , compiuto nell'intervallo di tempo  $t, t + dt$ ,  $dI$  è l'energia elettromagnetica (flusso del vettore di Poynting) che entra in  $V$  attraverso  $\sigma$  nel medesimo intervallo,  $dQ_i$  è il calore di Joule e  $dW$  è la variazione dell'energia elettromagnetica, entrambi riferiti al volume  $V$  e all'intervallo di tempo  $t, t + dt$ . In questo caso poi, a primo membro di (1), si deve aggiungere  $dQ_i$ , sicché, sommando la (1) con la (2), si ha:

$$(3) \quad dQ_e + dL_m + dL_e + dI = d(T + U + W).$$

2. Nella magneto-idrodinamica <sup>(2)</sup>, le equazioni del moto del fluido non sono indipendenti da quelle dell'elettromagnetismo: infatti se  $\mathbf{v}$  è la velocità del fluido,  $\mathbf{B}$  il vettore induzione,  $\mathbf{j}$  la densità di corrente, tutti calcolati in un punto generico di  $V$ , alle forze meccaniche per unità di volume, che compaiono nelle equazioni della idrodinamica, bisogna aggiungere il ter-

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) Si veda: B. FINZI, *Meccanica razionale*, Bologna, Zanichelli, 1946, Cap. XV, n. 31.

(2) Cfr. H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford at the Clarendon Press (1950), Cap. IV.



mine  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ , alle forze elettriche impresse il termine  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ ; è però facile vedere che la (3) è valida anche in questo caso. Infatti a primo membro di (3) occorrerebbe aggiungere il lavoro fornito nel tempo  $t, t + dt$  dalla forza  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  e il lavoro del campo  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ ; queste due grandezze però si elidono, perché, riferite all'unità di volume, valgono rispettivamente

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{v} dt \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{j} dt.$$

Si ha così il teorema: *nella magneto-idrodinamica vale la stessa equazione energetica che si ha quando un campo elettromagnetico si propaga in una regione dove si muove un fluido, essendo fra loro indipendenti il moto del fluido e il campo elettromagnetico.*

3. Il teorema precedente si può invertire nel seguente modo: ammettiamo valida la (3) ed ammettiamo, conforme del resto ai risultati della fisica elementare, che, quando un fluido si muove in un campo magnetico, su ogni unità di volume agisca la forza  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ ; mostriamo allora che, in base ai principî della meccanica e dell'elettromagnetismo, si ricavano le equazioni della magneto-idrodinamica. Infatti un gruppo delle dette equazioni è dato da quelle della meccanica dei fluidi, a cui si aggiunge la forza per unità di volume  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ : queste equazioni si ottengono subito in base alle ipotesi ora esposte. L'altro gruppo delle dette equazioni è dato da quelle di Maxwell, in cui però la relazione fra la densità di corrente  $\mathbf{j}$  ed il campo elettrico  $\mathbf{E}$  vale

$$(4) \quad \mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}),$$

essendo  $\gamma$  la conduttività ed  $\mathbf{E}_i$  il campo elettrico impresso. Resta dunque da provare tale relazione. Ora, per quanto precede, la (3) è valida se il lavoro della forza  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  è compensato da lavoro fornito da un termine  $\mathbf{E}_i$  da aggiungere al campo impresso; si ha così

$$\int_V \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{E}_i \times \mathbf{j} dV = 0$$

e poiché  $V$  è arbitrario deve essere

$$\mathbf{E}_i \times \mathbf{j} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{j};$$

siccome poi  $\mathbf{j}$  ha la direzione del campo elettrico complessivo e perciò è da ritenersi arbitrario si deduce che:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B},$$

da cui segue la (4).

**Geofisica matematica.** — *I fenomeni di fluttuazione in geofisica. — Loro descrizione matematica e loro applicazione dal punto di vista pratico.* Nota di MATTHIAS MATSCHINSKI, presentata (\*) dal Corrisp. L. SOLAINI.

Tutte le grandezze che si osservano e si misurano in geofisica sono soggette a delle fluttuazioni, quando non sono delle fluttuazioni esse stesse. Per fissare le idee, iniziamo ad esempio dai vettori. Questi vettori possono essere: gradiente del campo gravitazionale, vettori dei campi elettrici o magnetici, corrente tellurica, ecc. Nel primo caso (grandezze soggette a fluttuazioni) un vettore, anche se abbastanza stabile in media, cambia sempre, più o meno, di direzione e di valore assoluto (fig. 1 a).

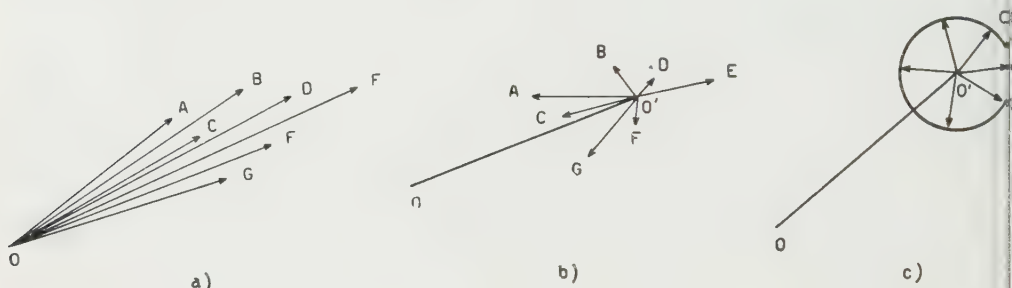


Fig. 1.

Si stabilisce una media  $OO'$  (fig. 1 b) e si considerano i piccoli vettori  $O'A$ ,  $O'B$ , ecc. come fluttuazioni. In certi casi si trascurano e ci si limita solamente ai valori medi; per altre applicazioni si prendono particolarmente in esame le fluttuazioni: si studiano le curve rappresentanti il cambiamento di vettore in funzione del tempo:  $OA$ ,  $OB$ , ecc. oppure, con lo stesso risultato, il cambiamento di  $O'A$ ,  $O'B$ , ecc.

Ci si limita sovente alla considerazione di un valore medio  $O'O''$  di queste fluttuazioni, il quale può essere simbolizzato da un cerchio (fig. 1 c). In linea generale, poco importa quale specie di media si applicherà per calcolare i valori  $OO'$  e  $O'O''$  (fig. 1 b e 1 c); potrà essere una media aritmetica, quadratica, geometrica o qualsiasi altra: ciò dipende dagli scopi che ci si propone per la ricerca. Ma se si resta nel campo delle medie classiche, per quante esse siano, non ci si discosta mai dalla geometria delle fig. 1 a, 1 b, 1 c: non si avrà che  $OO'$ , media dei vettori iniziali, e  $O'O''$ , media delle fluttuazioni.

Si deve tuttavia riconoscere che una tale descrizione è assai vaga. Ma ritornare al metodo delle curve « vettore-tempo » o « componente del vettore-tempo », ricordate sopra, equivale a tuffarsi di nuovo in un'innumerabile moltitudine di curve, per le quali gli studi che si fanno sono già *a priori* destinati a non essere che delle classificazioni più o meno complete, più o meno ingegnose.

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

Lo stesso dicasi per il secondo caso, dove le grandezze osservate e misurate non sono che delle fluttuazioni. In questo caso (fig. 2) o si sostituisce un gruppo di vettori  $OA, OB, OC$ , ecc. (che, come detto sopra, non sono altro che i differenti valori di una sola grandezza fisica corrispondenti a differenti momenti) con una media, o si considerano le curve già menzionate. Qualunque sia la media classica scelta, la rappresentazione geometrica sarà sempre data da un cerchio (fig. 2 *b*). Non ci si può aiutare calcolando le medie delle componenti dei vettori in luogo dei vettori stessi, perché queste componenti medie danno il vettore  $OO'$  (fig. 1) oppure sono eguali, per definizione, a zero (fig. 2). Quindi o la rappresentazione è troppo elementare, o la collezione delle curve « vettore  $OA$  — tempo » è troppo numerosa per una ricerca appropriata.

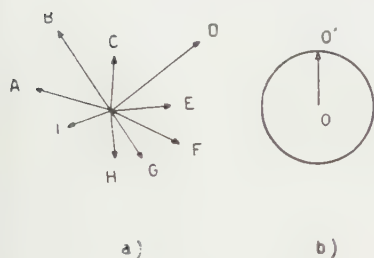


Fig. 2.

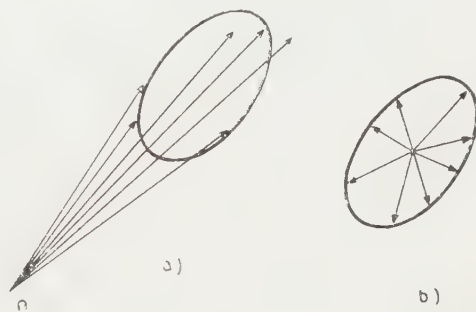


Fig. 3.

Come è stato dimostrato nel nostro articolo sui « tensori medi » <sup>(1)</sup> si può fare un passo avanti considerando un'ellisse (fig. 3) per la forma descrivente le fluttuazioni, invece di limitarci ad un cerchio (figg. 1 e 2).

La determinazione di una media classica di un gruppo di vettori è sempre: 1° una scelta del metodo d'interpolazione e 2° una interpolazione con un cerchio. Questo problema non sarà molto più difficile se, in luogo di un cerchio si ricerca un'opportuna ellisse. Ma la descrizione ne guadagnerà molto: la caratteristica di un gruppo di vettori dipenderà dalla posizione di questi ultimi. In effetti una rappresentazione « circolare » (media classica) resta la stessa, se si scambiano i vettori (fig. 4), mentre una rappresentazione « ellittica » (tensori medi) dell'insieme dei vettori scambiati differisce da quella dell'insieme primitivo (fig. 5).

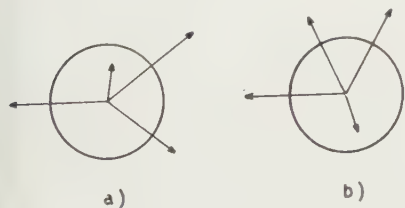


Fig. 4.

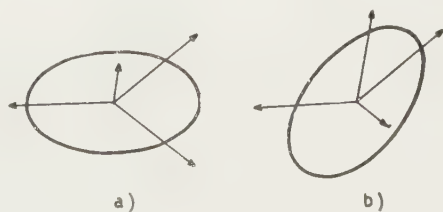


Fig. 5.

(1) *Sur les moyennes-tenseurs et sur leur application*, « Comp. Rend. d. Séances de l'Académie des Sciences », Paris 1954, Tome 239, p. 1457.

Naturalmente la caratteristica « ellittica » non contiene un solo numero, come la caratteristica « circolare », ma più numeri. Nel caso di un vettore piano, come quello delle figure, l'ellisse sarà caratterizzata da 3 numeri, la cui scelta sarà determinata nel paragrafo seguente.

Nel caso dello spazio, non sono delle ellissi che noi dobbiamo considerare, ma degli ellissoidi. In questo caso, pure tridimensionale, i calcoli non saranno molto complicati: rappresentare un sistema di punti per mezzo di un'ellissoide o di una sfera, significa effettuare dei calcoli poco differenti fra loro. Tuttavia le figure esplicative sono, per tre dimensioni, molto meno chiare. Per ciò, considerando in generale il caso tridimensionale, vengono rappresentate qui solo delle figure piane.

2. È proprio in geofisica che, per quanto sappiamo, i tensori medi troveranno il maggior numero di applicazioni. Nelle altre scienze fisiche e meccaniche non ci si interessa delle fluttuazioni macroscopiche. Generalmente si applicano altri rami delle matematiche ai fenomeni molecolari ed atomici. Infine in biologia non si hanno dei vettori, almeno se i problemi ad essa relativi sono trattati con i procedimenti attualmente in uso. Contrariamente a tutto ciò, i campi naturali e, più ancora, i campi dovuti ai fenomeni provocati artificialmente nella crosta terrestre e nell'atmosfera, sono fortemente caratterizzati dalla presenza di fluttuazioni. Queste ultime sono dovute innanzitutto al fatto che tutti gli elementi costituenti sono molto eterogenei e tutti i fenomeni molto complicati. Quindi per descrivere queste fluttuazioni bisogna ricorrere, come è stato spiegato nel paragrafo 1, alle medie « ellittiche », se si vuole:

1° attenersi alla descrizione in media e nello stesso tempo;

2° applicare le medie che tengono conto delle relative posizioni dei vettori in questione (ved. figg. 4 e 5).

Queste medie « ellittiche », nel caso di due dimensioni, sono caratterizzate da 3 numeri, e per quello di 3 dimensioni da 6.

Limitiamoci a considerare il caso di due dimensioni. L'ellisse della figura 3 è determinata geometricamente nel modo più semplice dai suoi due assi e dal suo angolo di inclinazione. Tuttavia è molto più comodo scegliere un altro modo di rappresentazione. La ragione, che è decisiva, è la seguente: i numeri caratterizzanti l'ellisse devono essere scelti in modo tale da rendere possibile stabilire delle equazioni differenziali per le medie « ellittiche », se si conoscono le equazioni per i vettori OA, OB, ecc. (figg. 1-2 e 3). Questa condizione ad esempio, è molto ben realizzata per le medie aritmetiche classiche e per le equazioni differenziali lineari. Nel primo caso, come si sa per la continua applicazione, l'equazione per le medie è la stessa che per i vettori da cui si è partiti (principio di identità). Questa è una delle cause per cui le medie aritmetiche hanno trovato un vasto campo di applicazione.

Si deve esigere, se possibile, la stessa facilità di applicazione per le medie « ellittiche », e, come si dimostra nella citata Nota <sup>(2)</sup>, si ottengono più facil-

(2) Loc. cit.

mente le equazioni per le medie, se si descrivono le ellissi di interpolazione date dai tensori simmetrici che hanno esattamente 3 componenti nel caso di due dimensioni e 6 nel caso di tre. Nel caso piano queste caratteristiche sono:  $X_{11}$ ,  $X_{22}$  e  $X_{12}$  come ben si sa.  $X_{11} + X_{22}$ , il primo invariante, è uguale alla somma degli assi, mentre  $X_{11}X_{22} - X_{12}^2$ , il secondo invariante, è proporzionale alla superficie dell'ellisse in questione. Infine  $X_{12}$  misura pure l'inclinazione; per esempio per  $X_{12} = 0$  gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi coordinati.

In linea generale in luogo di un semplice tensore  $X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) con 3 componenti, si ha un tensore tridimensionale  $X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) pure simmetrico ( $X_{12} = X_{21}$ , ecc.) con 6 componenti determinanti le dimensioni e la posizione di un ellissoide nello spazio. Quindi in luogo di un principio di identità, principio classico, si ha un *principio di trapiantamento* (loc. cit.). Questo principio, che ha una vasta applicazione, dice:

*Se l'equazione (o le equazioni) per i vettori studiati sono espresse in operazioni invarianti (non dipendenti dalla rotazione e dalla traslazione delle coordinate), l'equazione (o le equazioni) per i « tensori medi » descritte saranno le stesse a condizione che tutte le operazioni vettoriali debbano essere sostituite dalle equivalenti operazioni tensoriali.*

Nel caso in cui si hanno, nelle equazioni primitive, oltre alle operazioni vettoriali, delle operazioni tensoriali (per esempio corrispondenti ai tensori di 2° ordine) si sostituiscono con delle operazioni tensoriali, ma dell'ordine successivo (per esempio del 3° ordine), ecc. In generale, passando da equazioni per il vettore osservato a equazioni per i « tensori medi » si aumenta l'ordine tensoriale di tutte le operazioni invarianti. La questione delle operazioni non-invarianti resta aperta. Tuttavia quest'ultima limitazione non può apportare delle difficoltà. In effetto tutte le operazioni di geofisica sono invarianti o almeno possono essere portate a forme invarianti.

Sia  $v_i$  un vettore;  $X_{ij}$  e  $X_{ijn}$  dei tensori di 2° e 3° ordine;  $Op_1, Op_2, Op_3$ , ecc. le operazioni del 1°, 2° e 3° ordine. Un tensore medio di  $v_i$  sarà:

$$(1) \quad M_{ij} = M(v_i) \quad ; \quad \text{di } X_{ij} : \quad M_{ijk} = M(X_{ij}).$$

Infine il principio di trapiantamento si esprimerà:  
equazione data:

$$(2) \quad E(Op_1, Op_2, Op_3, \dots, v_i, X_{ij}) = 0,$$

equazione per i « tensori medi »:

$$(3) \quad E(Op_2, Op_3, Op_4, \dots, M_{ij}, M_{ijk}) = 0;$$

dove E in (2) ed E in (3) sono essenzialmente gli stessi.



3. L'applicazione di questo principio di trapiantamento è molto facile. Abbiamo già considerato alcune di queste applicazioni in sismologia <sup>(3)</sup>. I tensori medi applicati ai campi elettromagnetici variabili sono stati trattati in altri due articoli <sup>(4)</sup>. Naturalmente noi non crediamo che con queste pubblicazioni le corrispondenti questioni siano esaurite, al contrario esse non sono che appena abbozzate. Ma per indicare dei campi piuttosto differenti di applicazione e, d'altra parte, per sviluppare degli esempi matematicamente più semplici, vengono considerati qui *campi potenziali*, cioè, in primo luogo, di gravitazione, ed anche quelli magnetico ed elettrico invariabili o lentamente variabili.

Consideriamo un vettore  $\vec{p}$ , gradiente del potenziale  $\varphi$ :

$$(4) \quad \vec{p} = \text{grad } \varphi.$$

La grandezza può essere: forza di gravità, tensione elettrica (E) o magnetica (H), ecc. Dall'esistenza di un potenziale ne segue che:

$$(5) \quad \text{rot } \vec{p} = 0 \quad , \quad 0 : \frac{\partial p_x}{\partial y} = \frac{\partial p_y}{\partial x} \text{ ecc.}$$

Quindi le equazioni (equazioni primitive) sono:

$$(6) \quad \Delta \varphi = 0 \quad , \quad \Delta \vec{p} = 0 \quad ; \quad \text{rot } \vec{p} = 0 \quad ; \quad \vec{p} = \text{div. } \varphi ;$$

al di fuori delle masse (gravitanti, « elettriche », « magnetiche », ecc.).

Qui grad, rot,  $\Delta$  sono le operazioni vettoriali invarianti bene conosciute.

Ora il nostro compito è quello di stabilire le equazioni per le medie « ellittiche »:  $M_{ij}$  e  $M_i$  (vedi (1) (3)). Le operazioni *grad-tens* e *rottens* sono le operazioni tensoriali corrispondenti ai grad e rot:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{gradtens } A_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_x}{\partial x} , \frac{\partial A_y}{\partial x} , \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} , \frac{\partial A_y}{\partial y} , \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} , \frac{\partial A_y}{\partial z} , \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{array} \right\} \\ \\ \text{rottens } X_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_{12}}{\partial z} - \frac{\partial X_{31}}{\partial y} , \frac{\partial X_{13}}{\partial x} - \frac{\partial X_{11}}{\partial z} , \frac{\partial X_{11}}{\partial y} - \frac{\partial X_{21}}{\partial x} \\ \frac{\partial X_{22}}{\partial z} - \frac{\partial X_{32}}{\partial y} , \frac{\partial X_{23}}{\partial x} - \frac{\partial X_{12}}{\partial z} , \frac{\partial X_{21}}{\partial y} - \frac{\partial X_{22}}{\partial x} \\ \frac{\partial X_{32}}{\partial z} - \frac{\partial X_{33}}{\partial y} , \frac{\partial X_{33}}{\partial x} - \frac{\partial X_{13}}{\partial z} , \frac{\partial X_{31}}{\partial y} - \frac{\partial X_{23}}{\partial x} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

(3) *Sur les vibrations d'une plaque (ou d'une couche) plane infinie et sur les mesures pour déterminer son épaisseur*, « Compt. Rend. des Séances de l'Académie des Sciences », Paris 1954, tome 239, p. 1766.

(4) *Les équations de Maxwell pour le trifeuille et leur application, etc.* « Revue scientifique », p. 91, mars-avril 1952; *Some methods of interpretation of the magnetic fields presented at the Copenhagen meeting of the European Association of Exploration Geophysicists* 19-21 May 1954, « Geofisica pura e applicata », vol. 30, 1955.

si vede che, come sempre, rottens (gradtens) = 0 e che  $M_{ij}$  e  $M_i$  sono legati dalle formule:

$$(8) \quad M_{11} = \frac{\partial M_x}{\partial x} ; M_{12} = \frac{\partial M_x}{\partial y} ; M_{13} = \frac{\partial M_x}{\partial z} ; M_{21} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \text{ ecc.}$$

che generalizzano le formule abituali che legano  $p_i$  e  $\varphi$ :

$$p_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} , p_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} , p_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

Così è dimostrato che il tensore medio (media ellittica) d'uno scalare è un vettore, come si è supposto più sopra. Ciò sembra paradossale a prima vista; questo fatto entra facilmente nella regola generale dell'aumento dell'ordine tensoriale per il passaggio alle medie (vedi la fine del paragrafo 2).

L'operazione  $\Delta$  è teoricamente e praticamente invariabile; in effetto

$$(9) \quad \Delta A_i = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z), \Delta X_{ij} = \begin{Bmatrix} \Delta X_{11} & \Delta X_{12} & \Delta X_{13} \\ \Delta X_{21} & \Delta X_{22} & \Delta X_{23} \\ \Delta X_{31} & \Delta X_{32} & \Delta X_{33} \end{Bmatrix} .$$

Finalmente si hanno le equazioni per i tensori medi:

$$(10) \quad \underset{\varphi}{\Delta M_j} = 0 ; \underset{p_i}{\Delta M_{ij}} = 0 ; \underset{p_i}{\text{rottens } M_{ij}} = 0 ; \underset{p_i}{M_{ij}} = \underset{\varphi}{\text{gradtens } M_i} .$$

Queste condizioni dipendono dal principio di trapiantamento (paragrafo 2).

Questo esempio di applicazione del principio menzionato ci dimostra che la scelta dei tensori medi per le medie ellittiche è estremamente conveniente, poiché si possono ricavare le equazioni per queste medie quasi automaticamente e senza calcolo intermediario. Le equazioni (10) possono essere risolte con l'aiuto dei metodi generalizzati, analoghi a quelli che vengono usati per la risoluzione del sistema (6) nella teoria del potenziale. Partendo da condizioni limiti, si costruiranno tutte le ellissi e tutte le fluttuazioni del campo dato, naturalmente al di fuori delle « masse ». Tuttavia ciò è già un progresso abbastanza considerevole: non occorre misurare tutte le fluttuazioni, ma solamente quelle scelte secondo la possibilità di risoluzione del sistema (10); tutte le altre derivano dal calcolo. Questa regola vale per ogni applicazione del principio menzionato.

Tuttavia nel caso del campo potenziale si può andare ancor più lontano utilizzando il fatto noto che i tensori medi come le rappresentanti delle medie « ellittiche » sono tensori simmetrici.

Perché  $M_{ij}$  siano simmetrici nell'espressione (7):  $\underset{p_i}{M_{ij}} = \underset{\varphi}{\text{gradtens } M_i}$ , occorre

che  $M_{12} = M_{21}$ , ecc. da cui:  $\frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial M_x}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial x}$ , ecc. ciò che può essere anche scritto:

$$(11) \quad \underset{\varphi}{M_i} = \underset{p_i}{\text{grad } \Phi} ; \underset{p_i}{M_{ij}} = \underset{p_i}{\text{gradtens } (\text{grad } \Phi)} ; \Delta \Phi = 0 .$$

Si trova in definitiva:

$$(12) \quad M_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ; M_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} ; M_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} , M_{23} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} ,$$

$$M_{33} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} , M_{13} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} .$$

Questo importante risultato può essere formulato come segue: *Le fluttuazioni del campo potenziale, fluttuazioni del vettore gradiente, espresse per mezzo dei tensori medi sono un gradiente doppio di un superpotenziale scalare  $\Phi$  che risolve la solita equazione  $\Delta\Phi = 0$ .*

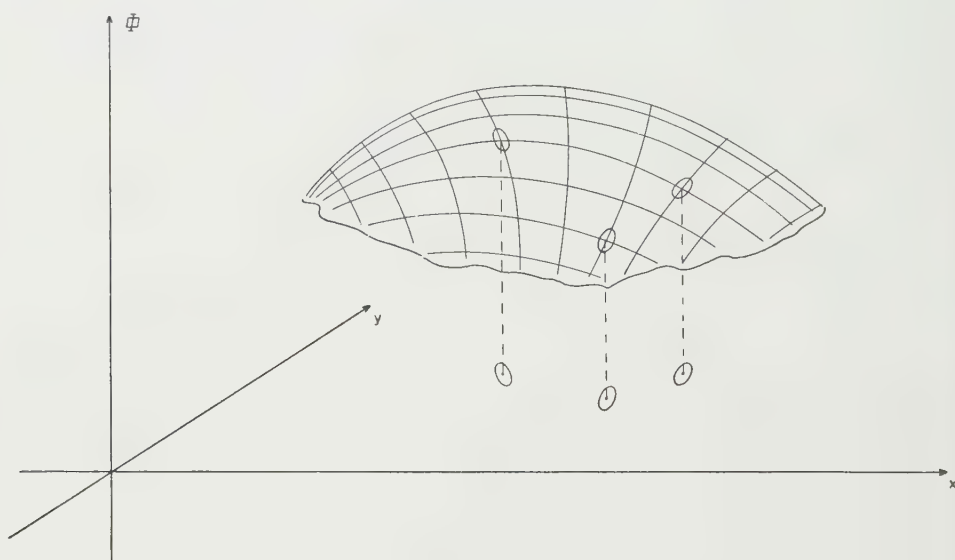


Fig. 6.

Questo superpotenziale non è evidentemente uguale al potenziale del campo; è un *potenziale delle fluttuazioni*.

L'esistenza dimostrata di un potenziale delle fluttuazioni è una cosa estremamente comoda in pratica. Tutta la varietà delle fluttuazioni del campo può essere riportata al calcolo di una sola funzione scalare, con un numero abbastanza ridotto di misure e di osservazioni (vedi fig. 6 in cui le ellissi delle fluttuazioni sono rappresentate a partire da una funzione data  $\Phi$ ).

4. L'applicazione dell'equazioni (3) nel caso generale o delle equazioni (10) - nel nostro caso di campo potenziale - portano in ultima analisi ad un problema di interpolazione o di estrapolazione. Infatti abitualmente partendo da misure effettuate sulla superficie (su parte della superficie) e da ipotesi sulla distribuzione delle « masse » (di « sorgenti ») sotto questa superficie, si prolungano le grandezze del campo come per le funzioni che risolvono il

caso (2) (caso generale) e (6) (campo potenziale). Ora, secondo il metodo del paragrafo 3, si risolve il problema di interpolazione (di prolungamento) partendo dalle fluttuazioni sulla superficie e dalle ipotesi già accettate, nel solito caso, per le « masse » o le « sorgenti ». Si prolungano i tensori delle fluttuazioni come le funzioni rappresentate per mezzo delle equazioni (3) e (10) o infine (11) e (12).

Quindi, anche da un punto di vista generale, l'applicazione delle fluttuazioni è ragionevole come metodo dello stesso genere di quelli classici, ma un metodo che, partendo da altre misure (o da altre interpretazioni di misure) ci dà la possibilità di provare e di controllare l'interpretazione geofisica basata sulle equazioni (6).

Tuttavia l'interpretazione ottenuta attraverso le fluttuazioni porta a migliori risultati, specialmente se ci si basa sulle equazioni (11), (12). Consideriamo ad esempio il campo di gravitazione. In questo caso si ha:  $\varphi$  = potenziale di gravitazione;  $\vec{p}_i$  = gravità (o accelerazione, ecc.). Come si sa, l'interpretazione matematica è molto più facile se si parte dalle derivate seconde. Ma, come pure ben si sa, le misure di queste derivate seconde sono molto più complicate e quasi irrealizzabili sul terreno. Ciò si ha perchè nella più parte dei casi si misurano solamente le derivate prime, sebbene l'interpretazione risulti meno esatta e matematicamente difficile. Questa difficoltà scompare allorché vengono applicate le misure delle fluttuazioni. In questo caso i tensori determinati con queste misure ( $M_{ij}$ ) – misure delle *derivate prime* – sono, per definizione, le *derivate seconde* del superpotenziale  $\Phi$  (vedi (12)).

Ciò perchè, senza difficoltà particolari di misura si hanno a propria disposizione i metodi matematici più esatti e più semplici. Naturalmente questo calcolo non ci dà dei valori del potenziale e della gravità sotto la superficie, ma solamente dei valori di superpotenziale e di fluttuazioni. Inoltre esso determina (come nei metodi abituali) la distribuzione (o il dettaglio sulla distribuzione) delle masse (delle densità) sotto la superficie – e questo è essenzialmente lo scopo della ricerca geofisica – sia che si tratti di una prospezione mineraria o di una ricerca puramente teorica. Sottolineiamo ancora una volta che non si tratta di misure delle derivate seconde, ma solo di un procedimento teorico *che permette di utilizzare le misure delle fluttuazioni delle derivate prime* (fluttuazione in un punto) *in luogo delle misure delle derivate seconde* (ciò che equivarrà sia alle misure delle derivate prime in due punti vicini, sia alla utilizzazione di apparecchiature poco appropriate al lavoro sul terreno).

Lo stesso dicasi per tutti gli altri casi del campo potenziale, per i campi elettrici e magnetici lentamente variabili, per le correnti telluriche, ecc. Solamente occorre sempre assicurarsi con cura che lo spazio considerato non contenga delle linee (contorni) chiuse. Ciò è evidentemente necessario per l'applicazione della condizione:  $\text{rot} = 0$ , condizione che sola permette di introdurre il potenziale ed il superpotenziale.

**Fisica matematica.** — *Sull'importanza del «gruppo base» nel problema della unificazione dei campi fisici.* Nota di GIUSEPPE ARCI-DIACONO, presentata (\*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

1. PREMESSE. — È noto che il gruppo di Galileo  $Gl_{3+1}^{10}$ , può considerarsi come caso limite, per  $c \rightarrow \infty$ , del gruppo di Lorentz  $Lz_{3+1}^{10}$ . Ebbene, in una recente Nota Lincea (1), il Fantappiè ha dimostrato che, a sua volta, il gruppo di Lorentz può considerarsi come caso limite, per  $R \rightarrow \infty$ , di un altro gruppo, il *gruppo finale*  $Fn_{3+1}^{10}$ , trovando l'interessante risultato che questo nuovo gruppo non è più caso limite di alcun altro gruppo (ancora a 10 parametri ed operante su un  $S_{3+1}$ ), ed è anzi un gruppo semplice.

Poiché le equazioni di Maxwell sono, come è noto, invarianti per il gruppo di Lorentz, sorge allora il problema di scriverle in modo che risultino invarianti per le trasformazioni del gruppo finale, o di un gruppo ad esso isomorfo.

Come ha dimostrato il Fantappiè nel citato lavoro, il gruppo finale  $Fn_{3+1}^{10}$ , è isomorfo al gruppo  $Os_{4+1}^{10}$  delle trasformazioni «pseudoortogonali» della forma

$$\bar{J} = -\bar{x}_0^2 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 = 0$$

in sé, il quale ha la stessa struttura complessa del gruppo ortogonale  $Os_5^{10}$  delle rotazioni dello spazio a 5 dimensioni.

Ma il gruppo di Lorentz ristretto  $Lz_{3+1}^6$  ha la stessa struttura complessa del gruppo ortogonale  $Os_4^6$  delle rotazioni dello  $S_4$ , quindi la via più semplice e naturale da seguire, per generalizzare le equazioni di Maxwell, è quella di scrivere le dette equazioni, prima nell'Universo (statico) che ha per «gruppo base» il gruppo  $Os_3^3$  delle rotazioni dello spazio a 3 dimensioni (ed indicheremo tale Universo con  $UOs_3^3$ ), poi di scriverle nell'universo (dinamico) che ha per gruppo base l' $Os_{3+1}^6$ , e di vedere quali modificazioni esse subiscono nel passaggio dallo  $UOs_3^3$  allo  $UOs_{3+1}^6$ . Come si vedrà al n. 5, da questo confronto segue che le equazioni di Maxwell si possono trasportare nello  $UOs_{4+1}^{10}$ , in un sol modo.

In un successivo lavoro vedremo che le equazioni di Maxwell così generalizzate (nella teoria di relatività finale) sono tali che, facendo in esse  $R \rightarrow \infty$ , oppure  $x_4 = \text{cost}$ , si riottengono le equazioni di Maxwell della teoria della relatività speciale, ed accanto a queste un altro gruppo di equazioni, descrittivi un nuovo campo, completamente diverso dal campo elettromagnetico (e. m.), e senza alcun legame con esso.

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955

(1) L. FANTAPPIÈ, *Su una nuova teoria di «relatività finale»*; «Rend. Lincei», ser. 8ª, vol. 17, fasc. 5 (1954).



2. GRUPPI ORTOGONALI E MULTIVETTORI. — Richiamiamo alcune nozioni sui gruppi ortogonali e pseudoortogonali. Come è noto <sup>(2)</sup>, il gruppo delle rotazioni in uno spazio ad  $n$  dimensioni lascia invariante la forma quadratica

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Le trasformazioni di tale gruppo (che è ad  $\frac{n(n-1)}{2}$  parametri), sono lineari, e sono date da matrici esponenziali  $\mathbf{x}' = e^{\mathbf{K}} \mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{K}$  è una matrice emisimmetrica con  $\frac{n(n-1)}{2}$  elementi distinti, i quali formano un sistema di parametri canonici ortogonali del gruppo. Tale sistema di parametri può pure considerarsi come un bivettore dell' $S_n$  (Cartan, loc. cit., p. 34). I gruppi «pseudoortogonali» che a noi interessano, sono quelli che lasciano invariante la forma quadratica

$$(2.1) \quad \bar{f} = -x_c^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

cioè con  $n$  quadrati di un segno ed uno di segno contrario: essi saranno indicati con la notazione  $Os_{n+1}$ .

Se facciamo la sostituzione  $\bar{x}_0 = ix_0$ , ricadiamo in un gruppo ortogonale, ed allora il bivettore che ha per componenti gli elementi della matrice  $\mathbf{K}$ , si considererà ancora come un bivettore *reale* rispetto al gruppo pseudoortogonale, pur avendo immaginarie pure le componenti con un indice nullo (e reali tutte le altre) <sup>(3)</sup>.

In quel che segue adotteremo le notazioni dello Schouten <sup>(4)</sup>, il quale chiama «multivettore» o  $p$ -vettore un tensore antisimmetrico di valenza  $p$ :

$$(2.2) \quad v_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = v_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]}.$$

Poiché nel nostro caso i «sistemi ammissibili» sono quelli cartesiani ortogonali, non occorrerà distinguere gli indici di covarianza da quelli di controvarianza.

Dato un  $p$ -vettore reale  $w$  nello  $S_n$ , il suo *duale* è un  $(n-p)$  vettore pure reale  $v$ , definito così:

$$(2.3) \quad v_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} \stackrel{\text{def}}{=} \pm w_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}$$

dove vale il segno  $\pm$  a seconda che la permutazione  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  è pari o dispari rispetto alla  $1 \dots n$ . Nei gruppi pseudoortogonali del tipo (2.1) un  $p$ -vettore *reale* ha immaginarie pure le componenti con un indice nullo (e reali tutte le altre), e quindi il suo *duale* sarà dato, se deve essere pure reale, da

$$v_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \stackrel{\text{def}}{=} \pm i w_{\lambda_{p+1} \dots \lambda_n}.$$

(2) É. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, vol. I: *Actualités scientifiques*, n. 643. Hermann, Paris, 1938.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Gruppi topologici e loro applicazioni fisiche* (dispense litografate in corso di stampa) Roma, Docet; *Sulle funzioni di una matrice*, «Anais da Academia Brasileira de Ciencias», n. 1, vol. 26 (1954).

(4) I. A. SCHOUTEN, *Tensor analysis for physicists*, II ed. 1954, Oxford at the Clarendon Press.

I tre operatori differenziali dell' $S_n$ , sono definiti così:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Grad } a = \partial_j a = \frac{\partial a}{\partial x_j} & ; \quad \text{Rot } w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} \\ \text{Div } w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \partial^{\lambda_1} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \end{cases}$$

Ci sarà utile ricordare che:

$$(2.5) \quad \text{Rot Grad } a = 0 \quad ; \quad \text{Rot Rot } w = 0 \quad ; \quad \text{Div Div } w = 0$$

e che valgono i tre teoremi:

a) Se  $\text{Rot } w_\lambda = 0$  si avrà  $w_\lambda = \partial_\lambda a = \text{Grad } a$ , mentre se  $\text{Rot } w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = 0$  ( $p > 1$ ) si avrà:

$$(2.6) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \text{Rot } v_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}}$$

$$(2.7) \quad b) \text{ Se } \text{Div } w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = 0 \text{ sarà } w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \text{Div } v_{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_p} \quad (p < n)$$

$$(2.8) \quad c) \nabla^2 w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^j \partial_j w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \text{Div Rot } w + \text{Rot Div } w \quad (p > 1).$$

3. LE EQUAZIONI DI MAXWELL NELL'UNIVERSO  $UOs_3^3$ . - Abbiamo visto che un bivettore di  $S_n$  ha tante componenti distinte quanti sono i parametri del gruppo. Nell'Universo che ha per gruppo base l' $Os_3^3$ , poiché si tratta di un Universo statico, tale bivettore (definito in ogni punto dell' $S_3$ ) può interpretarsi come un « tensore elettrico »:

$$(3.1) \quad E_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & E_3 & -E_2 \\ -E_3 & 0 & E_1 \\ E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché qui  $n = 3$ , il suo duale sarà un vettore:

$$E_1^* = E_{23} = E_1 \quad ; \quad E_2^* = E_{31} = E_2 \quad ; \quad E_3^* = E_{12} = E_3$$

che è il vettore *intensità del campo elettrico*, al quale corrisponde un *vettore eccitazione*  $\bar{E}_j^* = D_j$ , legato al precedente da una relazione che qui non interessa scrivere. Ciò posto, le equazioni di Maxwell nello  $UOs_3^3$  si scrivono così:

$$(3.2) \quad \text{Div } \bar{E}_j^* = \rho \quad ; \quad \text{Rot } E_j^* = 0$$

dove si è indicata con  $\rho$  la *densità spaziale di carica*.

Dalla seconda equazione segue la esistenza di un *potenziale elettrostatico*:

$$E_j^* = \partial_j a = \text{Grad } a.$$

Nel vuoto ( $\bar{E}_j^* = E_j^*$ ), e per  $\rho = 0$  segue che il campo è irrotazionale e solenoidale, cioè armonico:

$$(3.4) \quad \Delta E_j^* = 0.$$

Il vettore che rappresenta le *azioni meccaniche del campo* si costruisce così:

$$(3.5) \quad f_j = \rho E_j^*,$$

mentre invece le manifestazioni energetiche del campo si lasciano compendiare da un *tensore energetico*:

$$(3.6) \quad T_{jk} = E_{js} E_{.k}^s + \frac{1}{4} \delta_{jk} E_{rs} E^{rs}.$$

legato al vettore  $f_j$  dalla relazione

$$(3.7) \quad f_j = \text{Div } T_{jk},$$

la quale, tenuto conto delle equazioni (3.2) è una identità. Tale equazione descrive la interazione tra le particelle ed il campo.

4. LE EQUAZIONI DI MAXWELL NELLO  $\text{UOS}_{3+1}^6$ . — Nell'Universo con gruppo base  $\text{LOs}_{3+1}^6$ , che coincide col gruppo di Lorentz ristretto  $\text{LZ}_{3+1}^6$ , il bivettore a 6 componenti distinte (definito in ogni punto del cronotopo), può interpretarsi come un *tensore elettromagnetico* (tale Universo è dinamico in quanto ha per gruppo base un gruppo pseudoortogonale e quindi non compatto):

$$(4.1) \quad F_{jk} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 \\ iB_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ iB_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ iB_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui duale (*intensità del campo*) è dato da  $F_{jk}^* = \pm i F_{lm}$ , e a questo corrisponde il *tensore eccitazione*  $F_{jk}^*$ :

$$F_{jk}^* \equiv \begin{bmatrix} 0 & iE_1 & iE_2 & iE_3 \\ -iE_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -iE_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -iE_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_{jk}^* \equiv \begin{bmatrix} 0 & iD_1 & iD_2 & iD_3 \\ -iD_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -iD_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -iD_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le equazioni di Maxwell dello  $\text{UOS}_{3+1}^6$  sono quindi:

$$(4.2) \quad \text{Div } \bar{F}_{jk}^* = J_k, \quad \text{Rot } F_{jk}^* = 0,$$

dove  $J_k$  è il vettore *distribuzione elettrica* o «quadricorrente». Dalla seconda equazione segue la esistenza di un potenziale  $e$ . m.

$$(4.3) \quad F_{jk}^* = 2 \text{ Rot } \varphi_j = \partial_j \varphi_k - \partial_k \varphi_j.$$

Dalla 1<sup>a</sup> equazione si trae la *legge di conservazione della elettricità*:

$$(4.4) \quad \text{Div } \mathbf{J}_k = 0.$$

Nel vuoto ( $\mathbf{F}_{jk}^* = \bar{\mathbf{F}}_{jk}^*$ ), e per  $\mathbf{J}_k = 0$ , segue

$$(4.5) \quad \square \mathbf{F}_{jk}^* = 0,$$

che è l'equazione di propagazione delle onde e. m.

Le azioni meccaniche del campo sono date dal vettore:

$$(4.6) \quad f_j = \mathbf{J}^k \mathbf{F}_{jk}^*,$$

mentre, costruito il *tensore elastico* di Maxwell-Minkowski:

$$(4.7) \quad T_{jk} = F_{js} F_{\cdot k}^s + \frac{1}{4} \delta_{jk} F_{rs} F^{rs}.$$

vale la identità:

$$(4.8) \quad f_j = \text{Div } T_{jk}.$$

5. CONFRONTO TRA I DUE GRUPPI DI EQUAZIONI. - Se esaminiamo attentamente i due gruppi di equazioni, validi rispettivamente nello  $\text{UOs}_3^3$  e nello  $\text{UOs}_{3+1}^6$ , osserviamo che nel passare dal primo al secondo Universo si verificano questi fatti interessanti:

a) In entrambi questi Universi è definito in ogni punto un bivettore (con tante componenti distinte quanti sono i parametri del gruppo), il cui *duale* è il vettore (bivettore) *intensità del campo*, dal quale si ricava la corrispondente *eccitazione*.

b) La distribuzione ed il potenziale, da scalari diventano vettori.

c) Le equazioni di Maxwell restano formalmente identiche nei due Universi <sup>(5)</sup>.

d) Nel vuoto e per distribuzioni nulle, il campo è armonico.

e) Infine risulta chiaramente con quale legge si costruisce la  $f_j$  (densità di forza) ed il tensore energetico.

Ne deduciamo che, se vogliamo scrivere le equazioni analoghe a quelle di Maxwell nello  $\text{UOs}_{4+1}^{10}$ , si dovrà seguire questa via:

a) Da un bivettore a 10 componenti distinte, si ricava un trivettore (duale dal precedente), che ci dà la *intensità del campo*, dal quale si deduce un altro trivettore che ci dà la *eccitazione*.

b) La distribuzione ed il potenziale saranno adesso dei bivettori.

c) Le equazioni di Maxwell generalizzate saranno formalmente identiche a quelle del campo elettrostatico ed elettromagnetico.

d) Nel vuoto e per distribuzione nulla, il campo sarà armonico.

(5) Vedi G. LAMPARIELLO, *Progressi recenti in elettrodinamica relativista*, « Atti IV Congresso UMI », Taormina 1951, p. 240.

6. CONCLUSIONE. — Prima di scrivere le equazioni di Maxwell, in modo che risultino invarianti per il gruppo finale, o per il suo isomorfo  $Os_{4+1}^{10}$  (cosa che faremo in un successivo lavoro), vogliamo mettere in rilievo la importanza che ha il gruppo base nella unificazione del campo elettrico e magnetico.

Consideriamo perciò l'Universo avente per gruppo base l' $Os_{3+1}^6$ . In esso varranno le equazioni di Maxwell scritte al n. 4. Supponiamo che in tale Universo ci siano dei fisici i quali hanno sbagliato il gruppo base del loro Universo, e credano che esso abbia per gruppo base il gruppo di Galileo ristretto  $Gl_{3+1}^6$  (limite del precedente per  $c \rightarrow \infty$ ). Come appariranno ad essi le equazioni di Maxwell? Basterà porre nelle (4.2)  $c \rightarrow \infty$  (il che fisicamente equivale a considerare il campo e la distribuzione indipendenti dal tempo,  $t = \text{cost}$ ), otteniamo allora:

$$(I) \quad \begin{cases} \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{rot } \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

cioè per essi le equazioni di Maxwell si spezzano in due gruppi di equazioni: da una parte le equazioni di Maxwell dello  $UOs_3^3$ , ed accanto ad esse un altro gruppo di equazioni descriventi il campo magnetico (completamente diverso dal campo elettrico). Questi due campi non hanno alcun legame tra loro, e non son quindi unificabili nell'ambito del gruppo  $Gl_{3+1}^6$ . *L'aver sbagliato il gruppo base, porta come conseguenza la impossibilità di una teoria unificata dei campi elettrico e magnetico*: Infatti, come si vede facilmente, i due campi sono legati tra di loro attraverso il tempo e tale legame si perde se ci limitiamo a considerare fenomeni statici.

Ebbene, se (come ha suggerito il Fantappiè nella nota <sup>(1)</sup>), il nostro Universo ammette come gruppo base lo  $Fn_{3+1}^{10}$  invece dello  $Lz_{3+1}^{10}$  (caso limite del precedente per  $R \rightarrow \infty$ ), ciò porta come conseguenza che le equazioni di Maxwell debbono considerarsi come parte di equazioni più generali. Come vedremo nel successivo lavoro, le equazioni di Maxwell della relatività finale, per  $R \rightarrow \infty$  (ovvero per campi e distribuzioni indipendenti dalla 5ª coordinata  $x_4$ ), si spezzano in due gruppi di equazioni: accanto alle equazioni di Maxwell dello  $UOs_{3+1}^6$  (Universo precedente), compare un altro gruppo di 7 equazioni, descriventi un nuovo campo completamente diverso dal campo e. m., e che non ha alcun legame con esso (nell'ambito del gruppo  $Lz_{3+1}^{10}$ ).

In successivi lavori studieremo tale nuovo campo, per vedere se esiste effettivamente in natura (potrebbe essere, per esempio, il campo gravitazionale).

Sento il dovere di ringraziare il prof. Fantappiè per gli utili suggerimenti datemi nella elaborazione del presente lavoro.



**Mineralogia.** — *Un nuovo minerale tra i prodotti secondari del giacimento di Capo Calamita (Isola d'Elba)* (\*). Nota di CARLO L. GARAVELLI, presentata (\*\*) dal Socio G. CAROBBI.

Nel corso di una serie di ricerche sulle mineralizzazioni ferrifere elbane, ho avuto occasione di raccogliere alcuni campioni, in cui è stato possibile identificare il ferriossalato potassico, fino ad ora mai rinvenuto in natura.

Gli esemplari esaminati furono raccolti nella parte centrale del giacimento ferrifero di Capo Calamita e precisamente al livello del Piano Patate, circa trecento metri più ad est del fabbricato degli impianti per l'aria compressa. La località è compresa nella zona di ossidazione del giacimento stesso: ivi la dolomia calcarea retica, sede normale della mineralizzazione metallifera, appare completamente ricoperta da una spessa coltre di limonite secondaria, terrosa e friabile tanto che su di essa ha potuto svilupparsi una vegetazione relativamente abbondante.

La massa fondamentale dei campioni raccolti è costituita da questa limonite bruna e terrosa, con qualche cristallo di color giallo-ambra ad *habitus* prismatico. Questo minerale fu identificato per oxalite e descritto in altro lavoro <sup>(1)</sup>. L'attento esame di molti tra i campioni raccolti ha mostrato anche la presenza di altri cristallini verdi e trasparenti, irregolarmente sparsi entro la massa fondamentale di limonite. Questo secondo minerale non si presentava mai, a differenza dell'oxalite, in individui impiantati alla superficie dei campioni, bensì in laminette quasi sempre interamente incluse nella limonite. Altri cristallini di questa sostanza furono rinvenuti, eccezionalmente, impiantati sulle pareti di alcune piccole cavità non beanti: questi ultimi individui presentavano, come ovvio, uno sviluppo più regolare di quelli inglobati nella pasta limonitica.

Poiché le caratteristiche di questi cristallini non si mostravano in accordo con quelle dei vari minerali secondari la cui presenza era lecito sospettare in una simile giacitura, fu deciso di intraprenderne lo studio dettagliato. Data la necessità di disporre del maggior quantitativo possibile di sostanza, fu proceduto ad una accurata separazione meccanica delle varie fasi presenti nel miscuglio naturale. Ciò risultò abbastanza facilitato dalla relativa incoerenza della limonite; assai più laboriosa fu invece la purificazione dei singoli cristalli, date le minime dimensioni e la elevata fragilità. Non fu purtroppo possibile ottenere una quantità di sostanza perfettamente omogenea tale da permettere uno studio chimico completo; perciò le analisi vennero condotte utilizzando materiale notevolmente arricchito ma ancora sensibilmente impuro.

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R. presso l'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 12 marzo 1955.

(1) C. GARAVELLI, *Nuovo ritrovamento di oxalite fra i minerali secondari del giacimento di Capo Calamita (Isola d'Elba)*, « Rend. Soc. Min. Ital. », vol. XI (1955).

Da questa separazione meccanica si ottenne un certo numero di cristalli di colore verde, ma con sfumature abbastanza variabili. Mentre alcuni individui appaiono di un verde-erba intenso ed omogeneo, in altri sono presenti nette tonalità gialle. Di regola il tono del colore varia da punto a punto di uno stesso cristallo, e si può osservare che, nella maggior parte dei casi, le parti più interne sono quelle più decisamente colorate in verde; molti individui si presentano infine ricoperti da una patina giallo-bruna, facilmente distinguibile, per il suo aspetto di materiale cristallino e la sua lucentezza vitrea, dagli idrossidi di ferro che pure inquinano tenacemente parecchi cristalli. Tutto ciò suggerisce che l'ingiallimento dei cristalli sia provocato da fenomeni di alterazione procedenti dall'esterno verso l'interno. Osservati a forti ingrandimenti, moltissimi cristalli mostrano la presenza di minute granulazioni rosso-brune, semiopache, nel loro interno; a differenza della sostanza trasparente che ricopre alcuni individui, l'aspetto di queste granulazioni è quello tipico degli idrossidi di ferro.

I cristalli del minerale si presentano per lo più isolati, e solo eccezionalmente ho potuto osservare gruppetti di più individui compenetrati senza alcuna apparente regolarità. L'*habitus* è tabulare, e si osserva una netta tendenza ad una più facile divisibilità secondo il piano di appiattimento; quasi sempre irregolari sono i contorni di queste tavolette e solo eccezionalmente (nei cristalli raccolti sulla superficie di cavità) si notano minute faccette. Sono presenti pure alcuni granelli senza alcuna forma esterna regolare, costituiti da più individui compenetrati ed intrecciati, distinguibili l'uno dall'altro solo per la diversa estinzione mostrata al microscopio. Le dimensioni di questi cristalli, isolati o no, sono sempre molto minute, oscillando da qualche decimo ad alcuni centesimi di millimetro; in genere la colorazione gialla è più pronunciata negli individui di dimensioni minori.

Il minerale è abbastanza facilmente solubile in acqua, ed assai più a caldo che a freddo. Si ottiene una soluzione, debolmente colorata in verde, ed una piccola quantità di residuo insolubile che, separato per centrifugazione ed osservato al microscopio, appare, in prevalenza almeno, costituito da idrossidi di ferro e dal materiale giallo-bruno costituente le patine di incrostazione di certi cristalli.

Osservato in luce polarizzata, il minerale appare birifrangente biassico, con potere rifrangente non molto elevato, ma con birifrangenza piuttosto forte. Il pleocroismo è netto, dal verde giallastro ( $\alpha$ ) al verde-smeraldo intenso ( $\gamma$ ). Il piano di più facile divisibilità è apparso coincidente con il piano degli assi ottici; è stato così possibile misurare i tre indici di rifrazione principali; la determinazione (filtro giallo « Lifa » n. 365) ha fornito i seguenti valori:

$$\alpha = 1,498 \quad \beta = 1,554 \quad \gamma = 1,594$$

Il segno ottico è negativo; l'angolo degli assi ottici è assai elevato, tanto che non è stato possibile determinarlo esattamente. Dalle birifrangenze principali si ricava:

$$2V = 78^\circ$$

essendo  $\gamma$  la bisettrice ottusa.

La densità del minerale è stata determinata, con il metodo dell'immersione in liquidi pesanti (tetrabromuro di acetilene diluito con xilolo), su di un paio di cristallini assolutamente omogenei e privi di inclusioni, ed è stato ottenuto:

$$d_{(20^{\circ})} = 2,080.$$

Come già osservato per i caratteri esteriori del minerale, anche le sue proprietà fisiche non concordano dunque perfettamente con quelle di alcuna sostanza nota in natura. Poiché alcuni saggi microchimici orientativi avevano svelato la presenza di ferro, potassio ed acqua nei cristallini in esame, e data l'esistenza dell'oxalite nel miscuglio naturale dal quale essi provenivano, ho pensato potesse trattarsi del ferriossalato potassico triidrato, la cui presenza in natura non mi risulta fino a questo momento segnalata.

Il ferriossalato potassico è un composto abbastanza ben studiato, sia dal punto di vista chimico che da quello cristallografico. Le più recenti determinazioni delle costanti fisiche di questo composto sono dovute ad I. E. Knaggs <sup>(2)</sup>, le cui misure differiscono in parte da quelle, assai più antiche, tabulate nella *Chemische Krystallographie* del Groth <sup>(3)</sup>. Secondo i dati di Knaggs, il ferriossalato potassico triidrato è monoclinico prismatico, con costanti cristallografiche:

$$a : b : c = 0,9916 : 1 : 0,3895 \quad ; \quad \beta = 94^{\circ}13'30''.$$

Sempre secondo Knaggs, l'*habitus* più comune è quello di lamine sottili parallele a  $\{0\ 1\ 0\}$ , che è anche un piano di particolare divisibilità per i cristalli. Gli assi ottici giacciono sul piano  $\{0\ 1\ 0\}$ , e gli indici di rifrazione, determinati per la luce di sodio, sono:  $\alpha = 1,5019$  ;  $\beta = 1,5558$  ;  $\gamma = 1,5960$ . Il segno ottico è negativo, ed i cristalli sono intensamente pleocroici; su di una sezione parallela a  $\{0\ 1\ 0\}$  si ha:  $\alpha$  = giallo-verde pallido ;  $\gamma$  = verde netto. Il peso specifico, misurato per sospensione in liquidi pesanti, è, secondo Knaggs:  $d_{40}^{20} = 2,133$ .

L'accordo fra i valori di Knaggs e quelli determinati per il minerale di Capo Calamita è senz'altro molto soddisfacente; poiché tuttavia la letteratura esistente non concorda sul valore di alcune costanti (ad esempio J. M. Eder ed E. Valenta <sup>(4)</sup> hanno trovato per la densità il valore di 1,4418 alla temperatura di 17°), le proprietà fisiche del minerale di Capo Calamita sono state confrontate anche con quelle del ferriossalato potassico artificiale, appositamente preparato.

Il sale è stato ottenuto secondo le indicazioni di A. J. Allmand e W. W. Webb <sup>(5)</sup>, lasciando cristallizzare, in presenza di alcol e lontano

(2) I. E. KNAGGS, *Inorganic complex salts: crystallographic and optical study*, « Journ. Chem. Soc. », vol. CXXI (1922).

(3) P. GROTH, *Chemische Krystallographie*, vol. III, p. 168, Lipsia (1906).

(4) J. M. EDER ed E. VALENTA, *Zur Kenntniss der Eisenoxalate und einiger ihrer Doppelsalze*, « Monatsh. f. Chem. », vol. I (1880).

(5) A. J. ALLMAND e W. W. WEBB, *The photolysis of potassium ferrioxalate solutions*, « Journ. Chem. Soc. », vol. CXXXI (1929).

dalla luce, una soluzione acquosa di  $\text{FeCl}_3$  e  $\text{K}_2\text{C}_2\text{O}_4$  in rapporti molecolari 1 : 3.

I minuti cristalli, osservati al microscopio binoculare, mostravano caratteristiche esteriori strettamente corrispondenti a quelli del minerale di Capo Calamita. Simile anche l'*habitus* dei cristalli, solo che nel composto artificiale si hanno individui più tozzi, piuttosto bacillari che tabulari. Anche le proprietà fisiche sono in perfetto accordo con i valori indicati dalla letteratura (ed in particolare con quelli riportati da I. E. Knaggs) e con quelli trovati per il prodotto naturale, come risulta dalla seguente tabella I.

TABELLA I.

*Proprietà fisiche del ferriossalato potassico triidrato.*

	Misurati per il minerale di Capo Calamita	Misurati per $\text{K}_3\text{Fe}(\text{C}_2\text{O}_4)_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ artificiale	Misurati da I. E. Knaggs <sup>(2)</sup>	Riportati da P. Groth <sup>(3)</sup>
Densità (*) . . . . .	2,080	2,092	2,133	—
$\alpha$ . . . . .	1,498	1,501	1,5019	—
$\beta$ . . . . .	1,554	1,555	1,5558	1,556
$\gamma$ . . . . .	1,594	1,597	1,5960	—
$2 V$ . . . . .	$78^\circ$	$80^\circ$	$78^\circ 36' 30''$	$80^\circ \div 79^\circ$
Segno ottico . . . . .	neg.	neg.	neg.	neg.

(\*) In base a questi dati deve evidentemente ritenersi erroneo il valore 1,4418 determinato, per la densità a  $17^\circ$ , da J. M. Eder ed E. Valenta (4).

Si deve dunque concludere che le proprietà ottiche e la densità misurate per il minerale di Capo Calamita coincidono perfettamente con quelle del composto  $\text{K}_3\text{Fe}(\text{C}_2\text{O}_4)_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ .

Le ricerche goniometriche sui cristalli naturali furono rese molto difficili dalla grande fragilità dei cristalli stessi, e dalla conseguente impossibilità di ottenere individui completi. Furono tuttavia esaminati tre cristallini, incompleti ad una estremità, e che ben rappresentavano l'*habitus* caratteristico di questo minerale. Essi presentano la seguente combinazione:  $b\{010\}$ ,  $e\{11\bar{1}\}$ ,  $o\{111\}$ ,  $m\{110\}$ .

La forma semplice di gran lunga più sviluppata è il pinacoide  $\{010\}$ , assai meno sviluppati i prismi  $\{11\bar{1}\}$  ed  $\{110\}$ , che compaiono come esili faccette allungate. Le facce del prisma di quarta specie sono di regola piuttosto irregolari e fortemente striate in direzione parallela al loro allungamento, mentre nitide e brillanti sono apparse le faccette del prisma di terza specie. Nei cristalli esaminati è stata pure notata la presenza dell'altro prisma  $\{111\}$ , che forma facce piccole e lucenti.



La combinazione di forme semplici riscontrate è in sostanza quella che già Knaggs <sup>(2)</sup> ed i ricercatori precedenti avevano notato per il ferriossalato potassico artificiale, ma sensibilmente diverso è l'*habitus* dei cristalli naturali, i quali hanno straordinariamente sviluppato il pinacoide  $\{010\}$ . Anche i prismi  $\{11\bar{1}\}$  ed  $\{110\}$  mostrano uno sviluppo nettamente diverso, assai più allungato di quello riscontrato per il composto artificiale, e da ciò deriva l'aspetto tabulare dei cristallini esaminati (fig. 1).

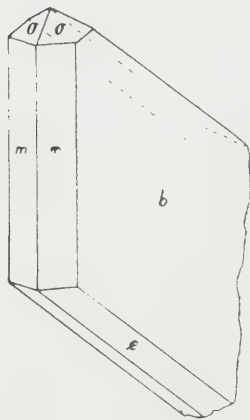


Fig. 1.

I valori angolari misurati sono in pieno accordo con le costanti cristallografiche adottate da Groth <sup>(3)</sup>:  $a:b:c = 0,9918:1:0,3896$   $\beta = 94^\circ 15'$  e con quelle adottate da Knaggs <sup>(2)</sup>:  $a:b:c = 0,9916:1:0,3895$   $\beta = 94^\circ 13' 30''$ .

I dati sperimentali sono riportati nella tabella II.

Non ho proceduto al calcolo di nuove costanti cristallografiche in base ai valori angolari misurati per il minerale di Capo Calamita, poiché le differenze fra i valori misurati e quelli calcolati in base ai dati di Groth e di Knaggs risultano dello stesso ordine di grandezza della varianza della media relativa ai gruppi di valori sperimentali ottenuti. L'accordo fra gli angoli misurati e quelli calcolati può comunque ritenersi senz'altro soddisfacente.

TABELLA II.

*Misure angolari per i cristalli verdi di Capo Calamita.*

Angolo	numero misure	Misurati		Calcolati	
		valori estremi	media	sec. Groth	sec. Knaggs
$(11\bar{1}) \wedge (1\bar{1}1)$	18	$40^\circ 7' - 41^\circ 14'$	$40^\circ 40'$	$40^\circ 43'$	$40^\circ 43'$
$(110) \wedge (1\bar{1}0)$	11	$89^\circ 12' - 89^\circ 39'$	$89^\circ 26'$	$89^\circ 22'$	$89^\circ 25'$
$(110) \wedge (111)$	23	$58^\circ 34' - 59^\circ 10'$	$58^\circ 48'$	$58^\circ 47'$	$58^\circ 47' 30''$
$(111) \wedge (1\bar{1}1)$	13	$38^\circ 23' - 39^\circ 9'$	$38^\circ 49'$	$38^\circ 52'$	$38^\circ 52'$

Come è stato in precedenza rilevato, la quantità di materiale veramente puro che fu possibile ottenere per separazione meccanica non era tale da permettere analisi chimiche ripetute; è stato pertanto utilizzato un materiale di seconda scelta, costituito in prevalenza da cristallini fortemente impuri per la presenza di granulazioni attribuibili ad idrossido ferrico e per lo strato superficiale alterato. Poiché era necessario, ai fini di una corretta interpretazione dei risultati analitici, essere in possesso di informazioni sulla natura chimica delle fasi estranee presenti, ho eseguito uno spettro di polvere sul residuo



insolubile in acqua lasciato da una piccola quantità dei cristallini nei quali lo strato giallo-bruno superficiale appariva particolarmente sviluppato. Le righe predominanti sono apparse quelle della oxalite  $\text{Fe}(\text{C}_2\text{O}_4) \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ , assieme ad alcune, molto sfumate, attribuibili alla goethite ed a poche altre, appena visibili, di incerta attribuzione.

Ho preferito ridurre al minimo la quantità di materiale impiegato in ogni analisi e fare invece diverse analisi condotte con metodi e criteri diversi. La necessità di lavorare su piccole quantità di sostanza ha comportato naturalmente l'introduzione delle modifiche necessarie per applicare i metodi analitici correnti ad una scala semi-micro. Ecco un cenno sui metodi impiegati nelle varie analisi.

*Analisi I.* — Furono determinate anzitutto le perdite di peso, per riscaldamento al di sotto di  $100^\circ\text{C}$  e, successivamente, per arroventamento. Sul residuo della calcinazione, attaccato a caldo con  $\text{HCl}$ , furono determinati: il residuo insolubile, il terzo gruppo totale (precipitato con  $\text{NH}_4\text{OH}$  in presenza di  $\text{NH}_4\text{Cl}$  e di acqua di bromo), il calcio come ossalato, il magnesio come fosfato ammonico-magnesiaco, ed infine il potassio come perclorato. Gli ossidi dei due metalli trivalenti, dopo pesata, furono attaccati con miscela di  $\text{HCl}$  ed  $\text{HClO}_4$ , che scioglie solo  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , e quindi pesati separatamente. L'ossalato di calcio fu titolato con soluzione  $\text{N}/100$  di  $\text{KMnO}_4$ . Sostanza impiegata: gr. 0,1003.

*Analisi II-a e II-b.* — Dopo la determinazione dell'acqua di imbibizione, fu eseguita una combustione della sostanza, pesando separatamente l'anidride carbonica e l'acqua di costituzione. Il residuo della combustione fu poi analizzato in modo analogo alla prova I. Sostanza impiegata: gr. 0,1022 e gr. 0,1198.

*Analisi III-a e III-b.* — La sostanza naturale fu disciolta a freddo in  $\text{H}_2\text{O}$  ed il residuo insolubile venne separato e pesato in crogiolo di Gooch. Tanto sul residuo insolubile stesso (attaccato con  $\text{HCl}$ ), quanto sulla soluzione acquosa del minerale venne poi dosato il ferro totale e l'alluminio, con la medesima procedura in precedenza descritta. Sostanza impiegata: gr. 0,0997 e gr. 0,1008.

Per la determinazione del ferro bivalente, si dovette ricorrere a porzioni separate della sostanza naturale. Essa venne attaccata, a freddo ed in corrente di  $\text{CO}_2$ , mediante soluzione di Zimmermann e quindi titolata rapidamente con soluz.  $\text{N}/100$  di  $\text{KMnO}_4$ . L'operazione fu condotta in assenza di luce diretta, onde evitare eventuali fenomeni ossidoriduttivi fra gli ioni ossalato e gli ioni  $\text{Fe}^{+++}$  coesistenti nella soluzione. La prova fu condotta in triplo, e dai valori ottenuti, nota la quantità di ioni ossalato presenti, fu calcolato per differenza il ferro ferroso. Per il calcolo della quantità di ioni ossalato fu assunta come base la media delle due determinazioni di anidride carbonica fornite dalle analisi II-a e II-b ( $\text{C}_2\text{O}_3 = 42,13\%$ ) e si ottennero così i tre valori 2,65; 2,15; 2,03 per la percentuale di  $\text{FeO}$ . La media di questi tre dati ( $\text{FeO} = 2,28\%$ ) è riportata in ciascuna delle analisi tabulate in tabella III, nelle quali il ferro trivalente fu calcolato sottraendo, dal ferro

totale, questo valor medio di  $\text{FeO}$ , ricalcolato come  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Sostanza impiegata per le tre determinazioni del ferro ferroso: gr. 0,0030; gr. 0,0101 e gr. 0,0241.

La seguente tabella riassume i risultati analitici.

TABELLA III.

*Risultati analitici.*

	Analisi I	Analisi II-a	Analisi II-b	Analisi III-a	Analisi III-b	Media
$\text{Fe}_2\text{O}_3$ . . . . .	16,09	16,03	16,07	15,96	16,08	16,05
$\text{K}_2\text{O}$ . . . . .	25,77	26,25	25,97	—	—	26,00
$\text{C}_2\text{O}_3$ . . . . .	53,50(*)	42,22	42,03	—	—	42,13
+ $\text{H}_2\text{O}$ . . . . .		11,44	11,25	—	—	11,35
— $\text{H}_2\text{O}$ . . . . .	1,62	1,64	1,54	—	—	1,60
$\text{Al}_2\text{O}_3$ . . . . .	0,08	0,14	0,10	0,10	0,09	0,10
$\text{FeO}$ . . . . .	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28
$\text{MgO}$ . . . . .	0,12	0,08	0,10	—	—	0,10
$\text{CaO}$ . . . . .	0,04	0,02	tr.	—	—	0,03
Res. ins. in $\text{HCl}$ . . . . .	0,08	0,10	0,10	—	—	0,10
Totale . . . . .	99,58	100,20	99,44	—	—	99,74

(\*) Valore trovato come perdita alla calcinazione; questo numero non è stato utilizzato per il calcolo della formula.

L'interpretazione dei risultati analitici riassunti nella precedente tabella è stata condotta con i seguenti criteri. Dopo aver calcolato i vari rapporti molecolari pertinenti agli ossidi (sono state trascurate l'acqua di imbibizione ed il residuo insolubile in  $\text{HCl}$ ), sono stati raggruppati i rapporti molecolari corrispondenti alle tre fasi presenti nel miscuglio analizzato. Il ferriossalato potassico è stato calcolato in base al  $\text{K}_2\text{O}$  presente; l'ossalato ferroso in base al radicale ossalico rimasto in eccesso; ed infine l'ossido ferrico e l'acqua rimasti in eccesso sono stati considerati come goethite, leggermente più idratata di quanto non mostri la formula  $\text{FeO}(\text{OH})$ . L'alluminio presente è stato aggregato al ferro trivalente del ferriossalato potassico, in quanto (cfr. analisi III-a e III-b) esso passa quantitativamente nella soluzione acquosa; il magnesio e le tracce di calcio sono stati invece considerati quali sostituenti del ferro bivalente nell'oxalite, poiché riscontrati in essa in occasione di precedenti analisi<sup>(1)</sup>.

Il calcolo è riassunto nella seguente tabella.

## TABELLA IV.

*Interpretazione dei risultati delle analisi chimiche.*

	Percentuali in peso	Rapporti molecolari	$K_3Fe(C_2O_4)_3 \cdot 3H_2O$	$Fe(C_2O_4) \cdot 2H_2O$	$FeO(OH)$
$Fe_2O_3$ . . . . .	16,05	0,1005	0,0910	—	0,0095
$K_2O$ . . . . .	26,00	0,2759	0,2759	—	—
$C_2O_3$ . . . . .	42,13	0,5850	0,5518	0,0332	—
$H_2O$ . . . . .	11,35	0,6299	0,5518	0,0675	0,0106
$Al_2O_3$ . . . . .	0,10	0,0010	0,0010	—	—
$FeO$ . . . . .	2,28	0,0316	—	0,0316	—
$MgO$ . . . . .	0,10	0,0022	—	0,0022	—
$CaO$ . . . . .	0,03	0,0005	—	0,0005	—

Si ottengono dunque i seguenti rapporti molecolari: per il ferriossalato potassico triidrato:  $Fe_2O_3 : Al_2O_3 : K_2O : C_2O_3 : H_2O = 1.000 : 3.000 : 6.000 : 6.000$  per l'ossalato ferroso diidrato:  $FeO + MgO + CaO : C_2O_3 : H_2O = 1,016 : 0,984 : 2.000$ ; per l'idrossido ferrico:  $Fe_2O_3 : H_2O = 1.000 : 1,116$ .

Questi risultati indicano pertanto che nel miscuglio analizzato sono effettivamente presenti le tre fasi considerate: ferriossalato potassico, ossalato ferroso ed idrossido ferrico. La composizione mineralogica risulta la seguente:

Ferriossalato potassico triidrato....	90,31
Oxalite.....	6,02
Goethite .....	1,71
Acqua di imbibizione .....	1,60
Residuo insolubile in HCl .....	0,10
Totale ..	99,74

Anche le ricerche chimiche concordano dunque con l'ipotesi della presenza, nei campioni esaminati, del composto  $K_3Fe(C_2O_4)_3 \cdot 3H_2O$ .

Allo scopo di confermare i risultati acquisiti con la determinazione delle proprietà fisiche e cristallografiche e con l'analisi chimica, ho eseguito due spettri di polvere, uno sul minerale verde di Capo Calamita ed un altro sul composto artificiale. Ho poi confrontato i valori così ottenuti per i  $d_{h,k,l}$  con quelli riportati dalle tabelle internazionali <sup>(6)</sup> per il ferriossalato potassico

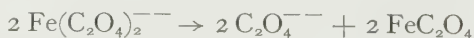
(6) AM. SOC. FOR TESTING MATERIALS. *Alphabetical and grouped numerical index of X-ray diffraction data*. Pubbl. n. 48 B, Filadelfia (1950).

triidrato. Gli spettri furono ripresi, in camera di mm. 57,3 di diametro, secondo il metodo di Debye-Straumanis. Fu utilizzata la radiazione  $K_{\alpha}$  del ferro filtrata su zirconio, con pose di  $2^h 45'$ . Data l'assenza di righe retrodiffratte non fu possibile applicare la correzione per lo spessore della pellicola; l'intensità delle righe fu apprezzata visualmente. Nella tabella V sono riportati i valori di  $d_{h,k,l}$  relativi al campione naturale ed alla sostanza artificiale, confrontati con i valori riportati dall'indice A.S.T.M. per questa sostanza. L'accordo, come si vede, può considerarsi soddisfacente.

L'identificazione del minerale elbano per via roentgenografica è stata confermata anche riprendendo uno spettro di polvere sul miscuglio naturale fortemente impuro per goethite ed oxalite. Lo spettro è stato registrato mediante il goniometro ad alto angolo Philips con contatore Geiger-Müller e circuito elettronico di registrazione automatica (radiaz. Cr  $K_{\alpha}$ )<sup>(7)</sup>. La registrazione ha permesso di riconoscere la presenza di tutte le righe ultime del ferriossalato potassico (oltre quelle della oxalite e della goethite), con intensità relative assai meglio corrispondenti ai valori tabulati nell'indice A.S.T.M. di quelle degli spettri di tabella V ripresi per via fotografica.

Queste ricerche confermano dunque definitivamente la presenza del composto  $K_3Fe(C_2O_4)_3 \cdot 3H_2O$  fra i prodotti naturali formati nella zona di ossidazione del giacimento di Capo Calamita. Si tratta dunque di un nuovo minerale, per il quale propongo il nome di *Minguzzite*, in omaggio alla memoria del prof. Carlo Minguzzi che in questo istituto si era occupato di minerali elbani e che così prematuramente è stato strappato al lavoro scientifico.

Per quanto concerne la genesi del minerale, essa è chiaramente da ricondursi alla circolazione di acque superficiali contenenti in soluzione ioni  $K^+$  e ioni  $C_2O_4^{--}$ , con ogni verosimiglianza provenienti dai detriti della vegetazione che cresce rigogliosa intorno al luogo di ritrovamento. A. J. Allmand e W. W. Webb<sup>(5)</sup> hanno infatti dimostrato che il ferriossalato potassico triidrato è la prima sostanza che si forma per azione degli ioni  $Fe^{+++}$  sopra soluzioni di ossalato potassico. Nel ferriossalato potassico è contenuto lo ione complesso  $Fe(C_2O_4)_3^{--}$  che è instabile sotto l'azione della luce diretta. Le soluzioni contenenti il sale si alterano molto rapidamente, ed ingialliscono in pochi minuti se esposte all'azione dei raggi solari. Lo schema della reazione è il seguente:



Il prodotto finale di questa azione fotolitica è dunque l'ossalato ferroso, il quale finisce per separarsi dalle soluzioni contenenti originariamente l'ione ferriossalato, precipitando come sale biidrato. Quest'ultimo composto costi-

(7) L'apparecchiatura impiegata fu quella in dotazione all'Istituto di Mineralogia della Università di Pisa. Mi è grato ringraziare il Direttore, prof. S. Bonatti, ed i suoi Assistenti, per l'ospitalità gentilmente concessami.

tuisce appunto il minerale oxalite, che venne rinvenuto accanto ai cristallini verdi nei medesimi campioni di limonite, e rappresenta pertanto il prodotto finale della reazione fra ioni ferrici e ioni ossalato. Al contrario del ferriossalato potassico, l'oxalite presenta una stabilità relativamente molto grande, sia perché di gran lunga meno solubile in acqua, sia perché non si altera sotto l'azione della luce.

TABELLA V.

*Valori di  $d_{h,k,l}$  per il ferriossalato potassico triidrato.*

Composto naturale		Composto artificiale		Valori riportati dall'indice A.S.T.M.	
$d_{h,k,l}$	intensità	$d_{h,k,l}$	intensità	$d_{h,k,l}$	intensità
—	—	—	—	10,2	53
6,96	<i>m</i>	6,96	<i>f</i>	6,9	100
—	—	—	—	6,6	7
4,95	<i>f</i>	4,97	<i>f</i>	4,96	53
—	—	—	—	4,68	7
4,42	<i>d</i>	—	—	4,43	27
4,08	<i>m</i>	—	—	4,09	27
3,62	<i>f</i>	3,63	<i>f</i>	3,61	67
—	—	—	—	3,48	7
3,35	<i>d</i>	3,33	<i>dd</i>	3,34	27
3,16	<i>d</i>	3,19	<i>m</i>	3,16	47
—	—	—	—	3,03	40
—	—	2,89	<i>dd</i>	2,85	13
2,65	<i>m</i>	2,70	<i>d</i>	2,67	60
—	—	2,61	<i>dd</i>	2,58	33
—	—	—	—	2,51	7
—	—	2,35	<i>dd</i>	2,36	7
—	—	—	—	2,31	13
2,18	<i>d</i>	2,20	<i>m</i>	2,18	67
2,12	<i>d</i>	2,13	<i>dd</i>	2,12	—

Oltre che in soluzione, i ferriossalati presentano una certa fotolabilità anche allo stato solido, benché in grado molto minore. Il decorso della reazione di alterazione è sostanzialmente lo stesso, ed anche in questo caso si ha la formazione intermedia del ferroossalato corrispondente; quando però



si sia formato attorno ai cristallini uno strato di ossalato ferroso biidrato, esso è sufficiente per impedire una rapida alterazione nelle zone più interne, ed in queste condizioni la sostanza è stabile anche diversi mesi<sup>(5)</sup>.

È pertanto probabile che l'ingiallimento osservato in molti fra i cristallini raccolti sia dovuto ad una incipiente alterazione con formazione del ferroossalato potassico. Non è quindi escluso che quest'ultimo possa trovarsi in tracce nei campioni studiati, poiché costituisce un termine intermedio di una reazione graduale di cui sono presenti i prodotti iniziale e finale.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisionomia enzimatica della fotosintesi* - I. *Trasporto di idrogeno all'ossigeno, tramite il sistema trifosfopiridinucleotide-glutatione-ascorbico, in cloroplasti isolati esposti alla luce* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e GIANNINO LAUDI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Lo studio della reazione fotosintetica negli aspetti che essa presenta quando studiata non più su cellule integre, ma su cloroplasti isolati, ha portato negli ultimi anni un contributo decisivo alle nostre conoscenze nei riguardi di questa funzione.

In una serie di brillanti ricerche è stato così successivamente dimostrato che sospensioni di cloroplasti lavati sono capaci:

a) di operare la fotolisi dell'acqua in ossigeno da un lato, e idrogeno, subito trasferito su un qualche adatto accettore, dall'altro (Hill [1]);

b) di ridurre quegli stessi coenzimi piridinici DPN e TPN, che fungono nella respirazione da accettori primari di idrogeno (Vishniac e Ochoa [2]; Tolmach [3]; Arnon [4]);

c) di catalizzare, specie se accoppiati a determinati sistemi enzimatici d'origine sia animale che vegetale, reazioni di carbossilazione riduttiva (e cioè di fissazione della  $\text{CO}_2$ ), di tipo presumibilmente molto vicino a quelle costituenti il momento centrale della fotosintesi *in vivo* (Arnon [4]);

d) di utilizzare l'energia luminosa per la sintesi di legami pirofosforici ad alto contenuto energetico (Arnon [5]; Vishniac e Ochoa [6]; Arnon [7]).

Appare così evidente che il cloroplasto isolato, pur collaborando forse con sistemi extraplastidiali per la fissazione di  $\text{CO}_2$ , risulta però pienamente autonomo, dal punto di vista del corredo enzimatico, per quanto riguarda due aspetti fondamentali della fotosintesi: quello della formazione di composti ridotti a potenziale ossidoriduttivo molto elevato ( $-0,28$  V per DPN e TPN), e quello della produzione di legami fosforici ad alto contenuto energetico.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

Aspetti questi, del resto, strettamente legati fra loro: i fenomeni di fosforilazione appaiono infatti associati, secondo ogni evidenza, al trasporto dell'idrogeno, proveniente dalla fotolisi dell'acqua, da un accettore primario verso l'ossigeno, attraverso catene di sistemi ossidoriducibili del tipo di quelle note per il metabolismo respiratorio; e, d'altro lato, l'utilizzazione dell'idrogeno fissato sull'accettore primario per la riduzione dei prodotti intermedi dell'anabolismo fotosintetico deve essere necessariamente favorita da un alto rapporto ATP/ADP; come appare evidente, ad esempio dalla considerazione di reazioni del tipo:  $\text{acido fosfoglicerico} + \text{TPNH} + \text{ATP} \rightleftharpoons \text{fosfogliceraleide} + \text{TPN}^+ + \text{ADP} + \text{P}$ . In altri termini dall'accettore primario l'idrogeno verrebbe a dirigersi, per due vie, da un lato verso l'ossigeno, producendo legami fosforici a ricco contenuto energetico, dall'altro verso metaboliti parzialmente ossidati, riducendoli, e l'energia necessaria alla riduzione di questi ultimi verrebbe in parte fornita dagli stessi legami ad alto contenuto energetico prodotti nelle reazioni della prima delle due vie.

Da quanto sopra appare evidente l'interesse di ricerche intese a meglio definire le caratteristiche di quelle catene ossidoriduttive che, in quel piccolo mondo ad autonomia singolarmente elevata che è il cloroplasto, mediano il trasporto dell'idrogeno dall'acqua (dopo la fotolisi) all'ossigeno, permettendo il parallelo immagazzinamento di energia chimica nel sistema degli adenosinfosfati.

La presente nota ha appunto per scopo di dimostrare la presenza, in cloroplasti isolati, di una catena di sistemi ossidoriduttivi capaci di trasportare l'idrogeno, prodotto nella reazione fotolitica, dal TPN al glutatione, da questo al sistema ascorbico/deidroascorbico, ed infine da quest'ultimo all'ossigeno.

La possibilità dell'esistenza, nel plastidio verde, di un simile sistema ci era infatti suggerita dai risultati di precedenti ricerche, secondo le quali la catena ossidoriduttiva: TPN - glutatione - ascorbico era apparsa operante nei più vari tessuti di piante sia superiori che inferiori (Marrè e Laudi [8]; Laudi e Marrè [9]), e particolarmente attiva proprio nei tessuti clorofilliani. D'altro lato, la capacità, da parte dei cloroplasti isolati esposti alla luce, di ridurre l'acido deidroascorbico era stata recentemente rilevata da Luger [10].

#### MATERIALI E METODI.

Le sospensioni di cloroplasti isolati venivano preparate da foglie adulte di spinacio (*Spinacia oleracea*) seguendo la tecnica descritta da Arnon [7]: plastidi ottenuti omogeneizzando in Waring Blendor, a bassa velocità ed a 3 gradi C, frammenti fogliari in soluzione di NaCl 0,35 M e Tris 0,1 M pH 7, filtrati attraverso cotone e precipitati centrifugando a circa  $1000 \times g$ , venivano lavati con la stessa soluzione, riprecipitati a  $1000 \times g$  e risospesi in NaCl 0,4 M, tamponato con Tris 0,1 M, sempre a pH 7.

Le esperienze venivano eseguite su aliquote della sospensione così ottenuta (2 cc., corrispondenti ai cloroplasti ottenuti da 5 grammi di tessuto fogliare fresco). Dopo aggiunta dei vari reagenti, e incubazione per un determinato periodo all'aria o al vuoto, in condizione di oscurità o di illuminazione intensa, la reazione veniva fermata coll'aggiunta di acido metaforico, fino a concentrazione finale del 4 %, e le varie determinazioni venivano eseguite.

I valori al tempo 0, per i singoli composti studiati, venivano determinati su controlli prelevati all'inizio del periodo di incubazione. Il glutatione ridotto veniva determinato se-

condo il metodo di Fujita e Numata [11], mentre l'acido ascorbico era dosato mediante il metodo al diclorofenolindofenolo.

Come reagenti abbiamo usato TPN della «Sigma», glutatione ridotto (GSH) ed ossidato (GS-SG) della «Schwartz». L'acido deidrascorbico è stato preparato da noi stessi mediante ossidazione con bromo da acido ascorbico della «Merck».

## ESPERIENZE E RISULTATI.

### I. - Riduzione del deidrascorbico da parte di cloroplasti isolati, ed effetto della luce, del TPN e del glutatione sulla reazione.

Dai dati della tabella I risulta, in accordo con Luger [10], che i cloroplasti isolati posseggono i sistemi enzimatici necessari a ridurre attivamente l'acido deidrascorbico ad ascorbico. La reazione avviene solo alla luce, ed in presenza di glutatione (aggiunto, in questa esperienza, sotto forma ossidata, per evitare un'eventuale reazione diretta tra glutatione ridotto e deidrascorbico). L'aggiunta di TPN aumenta sensibilmente la velocità di riduzione del deidrascorbico ad ascorbico.

TABELLA I.

#### *Riduzione dell'acido deidrascorbico da parte di cloroplasti isolati.*

Incubazione sotto vuoto. Volume finale dell'incubato: 2 cc. Temperatura 18 gradi C. Dati come media di due esperienze. Dati corretti sottraendo i valori al tempo 0

Ambiente	Aggiunte	Incremento in $\gamma$ di AA determinato dopo 1 ora
Oscurità	TPN 100 $\gamma$ , GS-SG 200 $\gamma$ , DHA 250 $\gamma$ . .	6
Luce	TPN 100 $\gamma$ , GS-SG 200 $\gamma$ , DHA 250 $\gamma$ . .	48
Luce	GS-SG 200 $\gamma$ DHA 250 $\gamma$ . . . . .	32
Luce	DHA 250 $\gamma$ . . . . .	5

L'insieme di questi dati conferma quindi l'ipotesi di un passaggio di idrogeno dall'acqua all'ascorbico tramite il TPN ed il glutatione; ipotesi ulteriormente convalidata dalle esperienze sottoriferite, che dimostrano la presenza sia della glutatione-riduttasi che dell'ascorbico-riduttasi nei nostri cloroplasti isolati.

### II. - Glutatione riduttasi nei cloroplasti isolati.

I dati della tabella II mostrano come sospensioni di cloroplasti isolati riducano il glutatione ossidato, in misura molto limitata all'oscurità, molto intensa alla luce, e come l'aggiunta di TPN aumenti di circa il 400% la velocità di riduzione.

TABELLA II.

*Riduzione del glutatione ossidato da parte di cloroplasti isolati.*

Condizioni sperimentali come alla tabella I. Dati come media di due esperienze.

Ambiente	Aggiunte	Incremento in $\gamma$ di GISH dopo 1 ora
Oscurità	GIS-SGI 400 $\gamma$ . . . . .	16
Oscurità	GIS-SGI 400 $\gamma$ TPN 200 $\gamma$ . . . . .	30
Luce	GIS-SGI 400 $\gamma$ . . . . .	80
Luce	GIS-SGI 400 $\gamma$ TPN 200 $\gamma$ . . . . .	200
Oscurità	nessuna . . . . .	3
Luce	nessuna . . . . .	3

Il fatto che una certa attività di riduzione si osservi anche all'oscurità, sembra indicare la presenza, nel plastidio verde, di un composto a potere riducente molto elevato, presumibilmente formatosi durante l'esposizione accidentale alla luce, prima dell'inizio dell'esperienza: composto che sembra diverso dal TPN ridotto (infatti l'aggiunta di questo coenzima nella forma ossidata mantiene, anche all'oscurità, un effetto attivante), e, che, qualora questi dati venissero confermati da ricerche specificamente dirette a questo scopo, si sarebbe tentati di identificare con l'accettore primario di idrogeno.

TABELLA III.

*Riduzione in oscurità del glutatione ossidato da parte di sospensioni di cloroplasti, precedentemente addizionate, o meno, di TPN e tenute rispettivamente alla luce o all'oscurità per 1 ora, sotto vuoto. GIS-SGI aggiunto, al termine del pretrattamento, dal braccio laterale dei tubi di Thumberg.*

Altre condizioni sperimentali come alla tabella I. Dati come media di due esperienze.

Trattamento prima dell'aggiunta di 200 $\gamma$ di GIS-SGI	Incremento in $\gamma$ di GISH dopo 1 ora all'oscurità
Oscurità . . . . .	tracce
Oscurità, TPN 400 $\gamma$ . . . . .	tracce
Luce . . . . .	30
Luce, TPN 400 $\gamma$ . . . . .	100

La funzione del TPN, nella riduzione del glutatione ossidato in sospensioni di cloroplasti illuminati, appare evidente dal collegamento tra i risultati ormai classici di Ochoa e di Arnon circa la fotoriduzione del TPN da parte dei cloroplasti isolati, con quelli delle esperienze della tabella III. Da queste risulta che, in realtà, la riduzione del glutatione non è direttamente legata alla luce, ma è essenzialmente condizionata dalla precedente riduzione del TPN (aggiunto nella forma ossidata); riduzione operata appunto dai cloroplasti solo in presenza di luce. Infatti sospensioni di cloroplasti addizionate di TPN esposte a luce intensa per un certo intervallo di tempo, e quindi portate all'oscurità, appaiono parimenti dotate della capacità di ridurre efficacemente il glutatione ossidato (tabella III).

Sembra pertanto legittimo concludere che nel cloroplasto è operante un enzima capace di trasportare idrogeno dal TPN al glutatione ossidato; enzima forse identificabile con la glutatione-riduttasi di Conn e Vennessland [12].

### III. - *Ascorbico riduttasi in cloroplasti isolati.*

Sospensioni di cloroplasti addizionate di glutatione ridotto riducono rapidamente l'acido deidrascorbico ad ascorbico (tabella IV). Il rapporto tra glutatione ridotto aggiunto e deidrascorbico ridotto appare costante e, nelle nostre condizioni di esperienza, è di circa 2 a 1: il che significa che praticamente tutto il glutatione ridotto viene ossidato da parte del deidrascorbico, occorrendo due molecole di glutatione per la riduzione di una di deidrascorbico.

TABELLA IV.

*Riduzione all'oscurità dell'acido deidroascorbico, in presenza di GISH, da parte di cloroplasti isolati.*

Condizioni sperimentali come alla tabella I. Dati come media di due esperienze.

A g g i u n t e	Incremento in $\mu\text{M}$ di AA ridotto dopo	
	1 ora	6 ore
DHA 250 $\gamma$ . . . . .	0,04	0,04
DHA 250 $\gamma$ , GISH 0,3 $\mu\text{M}$ . . . . .	0,16	0,15
DHA 250 $\gamma$ , GISH 1,2 $\mu\text{M}$ . . . . .	0,66	0,60

Questi dati dimostrano la presenza, nei cloroplasti isolati, di un sistema enzimatico che trasporta idrogeno dal glutatione all'acido deidroascorbico, ossia di una ascorbico-riduttasi (Yamaguchi e Joslyn [13].



IV. - *Ascorbico ossidasi in cloroplasti isolati.*

Divergenza di opinioni si riscontra circa la presenza, nei cloroplasti isolati, di enzimi ossidanti l'acido ascorbico: presenza affermata da Luger [10], negata da Arnon [7]. Nelle nostre esperienze le sospensioni di cloroplasti, isolati e lavati, sono apparse dotate della capacità di ossidare l'acido ascorbico (tabella V).

TABELLA V.

*Ossidazione dell'acido ascorbico da parte di cloroplasti isolati, all'oscurità.*

Incubazione all'aria, in vaschette agitate con un ritmo di 60 oscillazioni al minuto primo. Concentrazione iniziale dell'acido ascorbico aggiunto all'inizio dell'esperienza: 1000/ $\gamma$  cc. Tampone al Tris, pH 6.8. Dati come medie di due esperienze.

	AA in $\gamma$ mancante dopo 60 min. pr.
Cloroplasti normali . . . . .	90
Cloroplasti portati a 98 gradi C per 1 primo . . . . .	0

Tale attività ascorbico-ossidastica appare peraltro modesta, e si osserva bene soltanto in sospensioni mantenute all'oscurità: alla luce infatti le reazioni di riduzione dell'ascorbico ossidato tendono a prevalere su quelle ossidanti.

## CONCLUSIONI.

Dalle nostre esperienze risulta quindi che:

A) Cloroplasti isolati e lavati, se esposti alla luce, riducono l'acido deidroascorbico ad ascorbico. Glutazione e TPN (anche se aggiunti nelle loro forme ossidate) stimolano intensamente questa reazione.

B) Gli stessi cloroplasti, alla luce, riducono attivamente il glutazione ossidato, attraverso una reazione nettamente stimolata dalla presenza di TPN. Il glutazione ossidato viene attivamente ridotto, anche nell'oscurità, da sospensioni di cloroplasti che siano precedentemente state addizionate di TPN ed esposte alla luce per un certo intervallo di tempo, nel vuoto.

C) Cloroplasti isolati posseggono un'attiva ascorbico-riduttasi: in presenza di glutazione ridotto, infatti, essi riducono rapidamente l'acido deidroascorbico ad ascorbico, anche all'oscurità.

D) Cloroplasti isolati ossidano, all'oscurità, l'acido ascorbico. Tale attività ossidasica appare peraltro alla luce coperta dagli opposti processi che riducono il deidroascorbico ad ascorbico.



**Fisiologia.** — *Attività elettrica spontanea dei lobi ottici del Piccione mesencefalico* (\*). Nota di PAOLO CREPAX e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Nel corso di esperimenti sull'attività elettrica spontanea delle varie parti dell'encefalo di Piccione, abbiamo avuto occasione di rilevare come la frequenza delle pulsazioni elettriche derivabili dai lobi ottici risultasse particolarmente elevata. La registrazione mediante l'elettroencefalografo a penne scriventi, di cui allora ci servivamo, non consente tuttavia la riproduzione fedele di oscillazioni di potenziale di frequenze superiori agli 80–100 Hz. Pertanto, negli esperimenti intrapresi a fine di studiare in qualche dettaglio l'attività elettrica dei lobi ottici di Piccione, siamo ricorsi alla registrazione mediante l'oscillografo a raggi catodici.

Gli esperimenti sono stati eseguiti su 21 Piccioni, nei quali, dopo aver sezionato il tronco dell'encefalo secondo un piano passante subito al davanti dei lobi ottici, si era proceduto all'asportazione delle parti encefaliche rostrali al piano di sezione; la superficie dei lobi ottici e del cervelletto così messa allo scoperto, veniva protetta dall'essiccamento mediante un sottile strato di olio di vaselina. L'intervento operatorio era eseguito in narcosi eterica, procedendosi alla registrazione almeno 30 min dopo la fine dell'inalazione. Per la derivazione ci siamo serviti di sottili fili (0,2 mm di diametro) di argento clorurato, a estremità smussa, ovvero di spiruline di filo d'argento clorurato, prolungate con sottili batuffoli di cotone imbevuti di liquido di Ringer.

La derivazione era bipolare o unipolare, nel secondo caso l'elettrodo indifferente essendo infisso nelle parti molli pericraniche infiltrate preventivamente con novocaina all'1%. La registrazione è stata fatta mediante un oscillografo Du Mont mod. 322 a doppio raggio, collegato con preamplificatori Grass mod. P 4.

L'attività elettrica spontanea dei lobi ottici del Piccione mesencefalico è costituita da onde di frequenza elevata (150–180 Hz) e di piccolo voltaggio (15–25  $\mu$ V), inscritte su altre assai più ampie (40–70  $\mu$ V) e di frequenza compresa tra 80 e 120 Hz (figg. 1 e 2). Non si notano differenze tra i grafici ottenuti da punti diversi della superficie dei lobi ottici.

L'elettrogramma cerebellare, registrato nelle medesime condizioni sperimentali, è costituito da onde di una frequenza compresa tra 220 e 320 Hz e un voltaggio dell'ordine di 30–50  $\mu$ V. Le derivazioni eseguite da punti diversi della superficie dei *folia* VI e VII, secondo la nomenclatura di Larsell (1), forniscono tracciati in tutto simili tra loro.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », LXXXIX, 123 (1948).

Sul fondamento delle considerazioni che appresso esporremo, per chiarire un aspetto della elevata frequenza delle pulsazioni elettriche dei lobi ottici ci è parso necessario ricercare quali effetti eserciti la decerebellazione

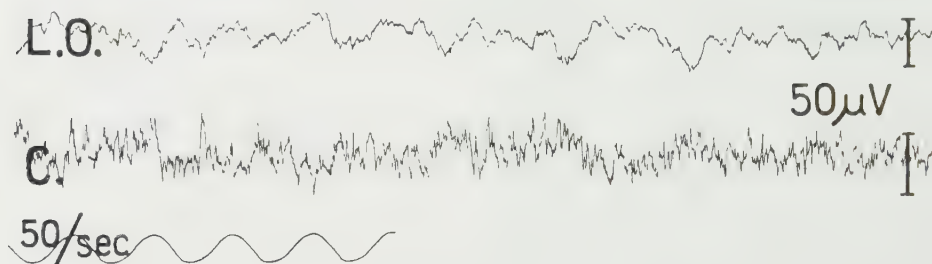


Fig. 1. - Attività elettrica del lobo ottico di sinistra (L.O.) e del cervelletto (C.) nel Piccione mesencefalico, registrata mediante oscillografo a raggi catodici.

sull'elettrogramma derivabile da tali strutture. Abbiamo osservato, nel periodo immediatamente successivo all'asportazione del cervelletto, una diminuzione dell'ampiezza delle pulsazioni elettriche senza modificazioni della frequenza; per altro, nel volgere di 2-4 min, le onde elettriche dei lobi ottici riacquistano l'ampiezza iniziale (fig. 2).

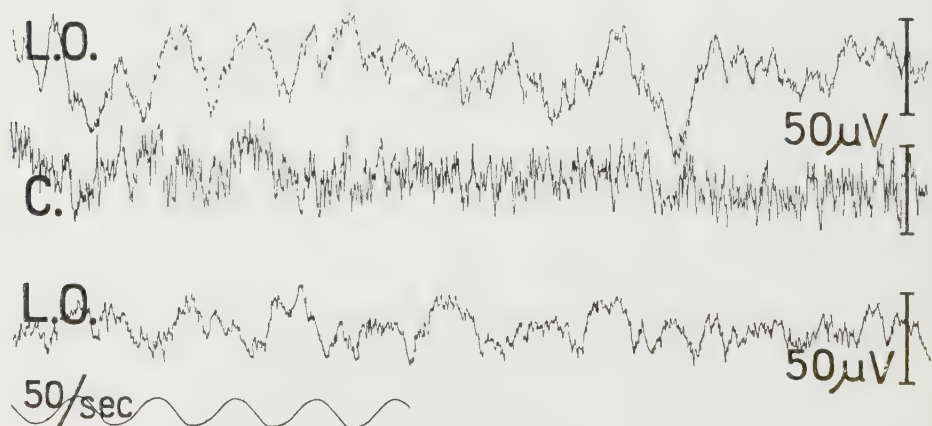


Fig. 2. - Attività elettrica del lobo ottico di destra (L.O.) e del cervelletto (C.) nel Piccione mesencefalico, registrata mediante oscillografo a raggi catodici. Il tracciato inferiore (L.O.) riproduce l'attività dello stesso lobo ottico, 12 min dopo l'ablazione del cervelletto.

Com'è noto [cfr. letteratura in Pupilli <sup>(2)</sup>], il ritmo pulsatorio degli aggregati neuronici più diversi, nei Vertebrati come negl'Invertebrati, si compone di frequenze comprese tra 1 e 70 Hz: fa eccezione la corteccia cerebellare,

(2) G. C. PUPILLI, *L'attività elettrica continua degli aggregati neuronici*, « Arch. Fisiol. », Suppl. II, 3 (1951).

che nel Mammifero è contraddistinta da frequenze di 150–250 Hz <sup>(3)</sup>. Sebbene la ordinaria valutazione delle frequenze pulsatorie sia alquanto soggettiva e la documentazione delle medesime dipenda dalle condizioni tecniche di registrazione, si può senza riserve affermare che il ritmo pulsatorio dei lobi ottici del Piccione è particolarmente elevato. La qual cosa risulta da una semplice comparazione: la frequenza delle onde elettriche di tali strutture è pari a circa la metà di quella delle pulsazioni della corteccia cerebellare.

L'elevata frequenza pulsatoria dei lobi ottici del Piccione può mettersi in relazione con due ordini di fatti, e cioè: *a*) con le connessioni anatomiche di tali strutture; *b*) con la complessa architettura delle medesime.

Quanto al primo punto, le oscillazioni di potenziale derivabili dai lobi ottici potrebbero essere trasmesse dal cervelletto: circa alla possibilità di derivare un'attività pulsatoria rapida, simile a quella cerebellare, da punti del tronco dell'encefalo aventi connessioni odologiche con il cervelletto, si vedano le osservazioni di Eldred e Snider <sup>(4)</sup>, i quali nel Gatto hanno registrato una attività di così elevata frequenza nella capsula interna, nel nucleo lenticolare, nel nucleo ventrale del talamo, nel tegmento mesencefalico, nei corpi genicolati, nei peduncoli cerebellari medi e superiori, nei nuclei vestibolari, nell'oliva inferiore e nella formazione reticolare. Sul terreno anatomico, la esistenza di connessioni dirette cerebello-tettali negli Uccelli viene ammessa con molto riserbo <sup>(5)</sup>. Né la esistenza di correlazioni funzionali tra cervelletto e lobi ottici, a cui è stata data chiara evidenza [Machne e Zanchetti <sup>(6)</sup>; Machne <sup>(7)</sup>], necessariamente contrasta coi dati anatomici noti: le connessioni tra cervelletto e lobi ottici possono essere indirette. Che l'attività elettrica del tetto sia subordinata a impulsi di origine cerebellare, si può d'altronde escludere per la ragione che la decerebellazione non modifica la frequenza delle onde derivabili dai lobi.

Riguardo al secondo punto, si fa presente come l'elevata frequenza pulsatoria del cervelletto di Mammifero sia stata messa in rapporto con la particolare disposizione anatomica dei suoi elementi [Bremer <sup>(8)</sup>]. Ci si può domandare se l'architettura dei lobi ottici non consenta di attribuire medesima-

(3) Il valore qui riportato è quello comunemente riferito. SWANK e BRENDLER [EEG clin. Neurophysiol., III, 207 (1951)] hanno segnalato nel Cane frequenze pulsatorie molto più elevate (1500–2000 Hz).

(4) E. ELDRÉD e R. S. SNIDER, «Anat. Rec.», CVI, 190 (1950).

(5) Fibre cerebello-tettali sono state descritte soprattutto nei Pesci; non è certo che esistano anche negli Anfibi; WESTON [cfr. ARIËNS KAPPERS, HUBER e CROSBY, *The comparative anatomy of the central nervous system of the vertebrates*. New York, Mac Millan (1936)] ritiene di averne dimostrato l'esistenza nei Rettili: si tratterebbe di fibre delle cellule di Purkinje, che andrebbero a terminare negli strati periventricolari del tetto insieme a fibre di origine ipotalamica. A ogni modo, mancano dati sicuri intorno all'esistenza di fasci che congiungano il cervelletto col tetto ottico negli Uccelli.

(6) X. MACHNE e A. ZANCHETTI, «Arch. Sci. biol.», XXXIII, 77 (1949).

(7) X. MACHNE, «Arch. Sci. biol.», XXXIV, 89 (1950).

(8) F. BREMER, «Bull. Acad. roy. Med. Belgique», IX, IV<sup>e</sup> Série, 149 (1944).



mente un sostrato morfologico definito al loro ritmo pulsatorio. La complessità di dette strutture è senza dubbio particolarmente notevole negli Uccelli <sup>(9)</sup>, in confronto di quelle omologhe di tutte le altre classi di Vertebrati; il che va ricollegato con le peculiari attribuzioni funzionali dei lobi ottici in tali animali [letteratura in Machne e Zanchetti <sup>(6)</sup>]. E la moltiplicazione, la diffusione e la sommazione degli impulsi, nel tetto ottico degli Uccelli, potrebbero effettuarsi mediante i neuroni di associazione intercalati in gran numero tra fibre afferenti e fibre efferenti: un'interpretazione siffatta andrà vagliata con lo studio comparativo delle frequenze pulsatorie dei lobi ottici e delle formazioni omologhe in Vertebrati appartenenti a classi diverse.

**Fisiologia.** — *La regolazione dei riflessi in muscoli simmetrici degli arti della Rana sottoposta a sezioni del neurasse a diversi livelli* <sup>(\*)</sup>. Nota di FRANCESCO INFANTELLINA e GIUSEPPE LA GRUTTA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Lo studio dell'attività riflessa nella Rana e nel Rospo spinali ha mostrato la presenza sia di riflessi del salto, con una contrazione coordinata dei muscoli estensori degli arti posteriori [Baglioni <sup>(1)</sup>, Bremer <sup>(2)</sup>, Ozorio de Almeida e Vianna Dias <sup>(3)</sup>, Ozorio de Almeida, Moussatché e Vianna Dias <sup>(4)</sup>], sia di movimenti locomotori riflessi degli arti posteriori, ritmicamente alterni [Nothnagel <sup>(5)</sup>, Biedermann <sup>(6)</sup>, Baglioni <sup>(1)</sup>, Gray e Lissmann <sup>(7)</sup>, Brihaye <sup>(8)</sup>]. Nella Rana bulbare, i due MM. sartorii reagiscono alla stimolazione di un piede, come muscoli governati da innervazione reciproca [Infantellina, Dolivo e Fleisch <sup>(9)</sup>]. Recenti indagini hanno d'altra parte chiarito l'influenza che, nella Rana e nel Rospo, il rombencefalo e il mesencefalo esercitano sull'attività

(9) SHIRASU [«Acta Sch. med. Univ. Kioto», XXX, 279 (1953)], che ha studiato accuratamente il tetto ottico di 23 specie differenti, scrive a conclusione delle sue osservazioni che «beim Vogel stellt das Tectum opticum in ganzen Zentralnervensystem den kompliziertesten Schichtenbau dar, indem weder die Grosshirn – noch die Kleinhirnrinde beim Vogel einen so verwickelten Bau wie das Tectum aufweisen».

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) S. BAGLIONI, «Z. allg. Physiol.», XIV, 161 (1912).

(2) F. BREMER, «Arch. int. Physiol.», XIX, 183 (1922).

(3) M. OZORIO DE ALMEIDA et M. VIANNA DIAS, «C. r. Soc. Biol.», CXVII, 206 (1934).

(4) M. OZORIO DE ALMEIDA, H. MOUSSATCHÉ et M. VIANNA DIAS, «C. r. Soc. Biol.», CXXXII, 713 (1940).

(5) H. NOTHNAGEL, «Virchow's Arch.», XIL, 267 (1870).

(6) W. BIEDERMANN, «Pflüger's Arch.», LXXX, 408 (1900).

(7) J. GRAY a. H. W. LISSMANN, «J. exp. Biol.», XVII, 267 (1940).

(8) J. BRIHAYE, «C. r. Soc. Biol.», CXLII, 261 (1948).

(9) F. INFANTELLINA, M. DOLIVO et A. FLEISCH, «Helv. physiol. Acta», XI, 131 (1953).

riflessa [Ozorio de Almeida, Moussatché e Vianna Dias<sup>(10)</sup>, Gerebtzoff<sup>(11)</sup>, Andreoli e Granata<sup>(12, 13)</sup>, Bianconi<sup>(14, 15)</sup>, Gualtierotti<sup>(16)</sup>] e sull'attività elettrica spontanea del midollo spinale [Ten Cate, Walter e Koopman<sup>(17)</sup>, Ten Cate<sup>(18)</sup>, Crepax, Fadiga e Zanicco<sup>(19)</sup>].

Abbiamo indagato in *R. esculenta* l'attività riflessa di due muscoli simmetrici (MM. sartorii), destata da una stimolazione elettrica fatta agire sull'estremità di un arto pelvico: le ricerche sono state eseguite nell'animale a sistema nervoso integro e nell'animale che ha subito l'ablazione di parti diverse del nevrasse.

Le recisioni del nevrasse erano effettuate: *a*) secondo un piano trasversale passante per i poli occipitali del telencefalo, con conservazione del diencefalo (*Rana diencefalica*); *b*) secondo un piano, parallelo al precedente, passante subito al davanti dell'estremità orale dei lobi ottici (*Rana mesencefalica*); *c*) caudalmente ai lobi ottici (*Rana bulbare*); *d*) secondo un piano passante al di sotto del bulbo, a livello del II N. spinale (*Rana spinale*). Le parti del nevrasse anteriori alla sezione venivano asportate.

I due MM. sartorii erano staccati dalla loro inserzione distale e isolati, per quanto possibile, dagli altri muscoli della coscia. L'animale, giacente sull'addome, era fissato a mezzo di spilloni infissi attraverso le ossa del cinto pelvico e degli arti posteriori medesimi. Si registrava contemporaneamente, mediante due miografi ottici isotonici, l'attività dei due muscoli: la tensione iniziale imposta a ciascun muscolo, variava da 1 a 3 g secondo il peso dell'animale.

Si provocava l'attività riflessa dei MM. sartorii nel modo sopra indicato. Gli stimoli erano onde rettangolari della durata di 5-25 msec, fornite da un generatore elettronico; la frequenza degli stimoli variava da 2 a 10 al sec, la durata della stimolazione da 2 a 8 sec e la tensione utilizzata era quella liminale, le caratteristiche della stimolazione rimanendo immutate nel corso di uno stesso esperimento. Gli elettrodi di stimolazione erano costituiti da due placchette metalliche disposte a pinzetta, che venivano a racchiudere sotto leggera pressione il piede dell'animale.

Gli esperimenti sono stati eseguiti nei mesi dal settembre al dicembre; durante l'esperimento l'animale era tenuto costantemente in camera umida e alla temperatura di 8°-10°C.

(10) M. OZORIO DE ALMEIDA, H. MOUSSATCHÉ et M. VIANNA DIAS, « Arch. int. Physiol. », XLVII, 277 (1938).

(11) M. A. GEREBTZOFF, « Arch. int. Physiol. », LVI, 286 (1949).

(12) C. ANDREOLI e L. GRANATA, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVII, 1570 (1951).

(13) L. GRANATA et C. ANDREOLI, « Arch. int. Physiol. », LXII, 109 (1954).

(14) R. BIANCONI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVIII, 1029 (1952).

(15) R. BIANCONI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXIX, 235 (1953).

(16) T. GUALTIEROTTI, « J. Physiol. », CXVII, 401 (1952).

(17) J. TEN CATE, W. G. WALTER a. L. J. KOOPMAN, « J. Neurophysiol. », X, 233 (1947).

(18) J. TEN CATE, « EEG clin. Neurophysiol. », II, 445 (1950).

(19) P. CREPAX, E. FADIGA e G. ZANOCCHI, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 21 (1955).

I risultati ottenuti sono i seguenti.

a) *Rana spinale*. - Nell'animale spinale la stimolazione elettrica della estremità di un piede desta nel M. sartorio ipsilaterale una contrazione riflessa sostenuta, appena intercisa da brevissimi rilasciamenti, e nel muscolo simmetrico una contrazione meno ampia, interrotta da rilasciamenti molto accentuati e spesso completi. Nei due muscoli i singoli rilasciamenti sono simultanei (fig. 1, A).

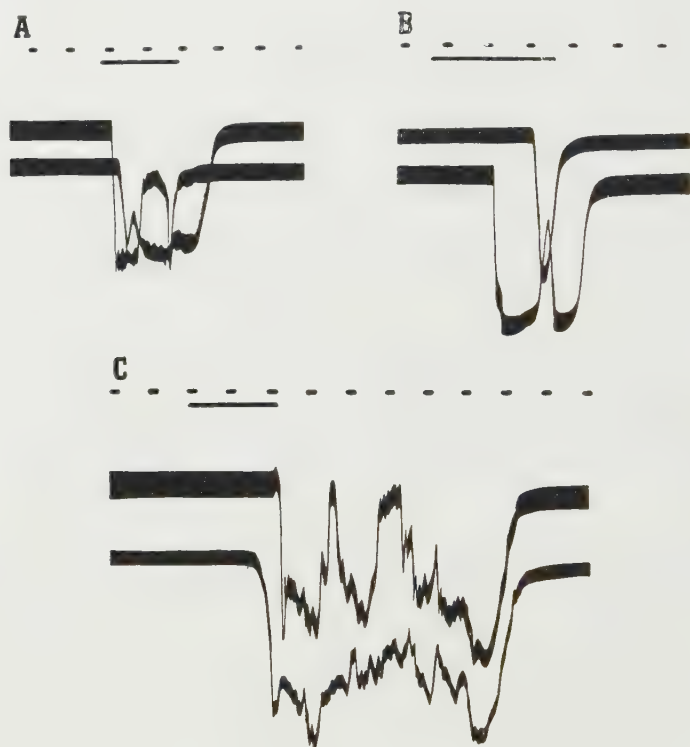


Fig. 1.

A: principiario dall'alto: tempo in sec, tracciato del segnale di stimolazione, miogramma ottico del M. sartorio di sinistra, miogramma ottico del M. sartorio di destra. La deflessione del miogramma verso il basso indica contrazione. A: *Rana spinale*; stimolazione del piede sinistro. B: *Rana bulbare*; stimolazione del piede destro. C: *Rana mesencefalica*; stimolazione del piede destro.

b) *Rana bulbare*. - Nell'animale in cui il nevrasso è stato reciso secondo un piano passante subito all'indietro dei lobi ottici, i movimenti riflessi dei due muscoli simmetrici sono ritmicamente alterni: si osserva la contrazione del M. sartorio ipsilaterale e successivamente, durante il rilasciamento del medesimo, la contrazione di quello contralaterale (fig. 1, B). Quest'ultimo, in alcuni casi, reagisce alla stimolazione con una sola contrazione e in altri casi dà ripetute risposte, di guisa che i due muscoli reagiscono con una serie di contrazioni e rilasciamenti ritmici e alterni, come nei movimenti reciproci della locomozione. Le contrazioni ipsilaterali sono sempre più energiche di quelle contralaterali.

c) *Rana mesencefalica*. — Le risposte riflesse in tali preparati sono molto simili a quelle che si ottengono nelle Rane spinali: la contrazione riflessa del M. sartorio contralaterale compare durante la risposta dell'ipsilaterale (fig. 1, C). In entrambi i MM. sartorii le risposte sono intercese da rilasciamenti muscolari: le contrazioni e i rilasciamenti avvengono presso che contemporaneamente nei due muscoli, essendo per altro più sostenute le contrazioni del muscolo ipsilaterale e più completi i rilasciamenti dell'omologo contralaterale.

d) *Rana diencefalica*. — Nella Rana diencefalica l'attività riflessa dei due MM. sartorii non differisce da quella descritta nel preparato mesencefalico: si manifesta con contrazioni e rilasciamenti sincroni da entrambi i lati, quelle più energiche nel M. sartorio ipsilaterale e questi più completi nel contralaterale.

e) *Rana integra*. — Nelle Rane col sistema nervoso centrale integro, quando la stimolazione venga effettuata in stato di riposo dell'animale, la contrazione riflessa e il rilasciamento dei due muscoli avvengono contemporaneamente, presentandosi più ampia la reazione del muscolo ipsilaterale. Il tipo di risposta ottenuto nelle Rane integre corrisponde quindi a quello che si registra nelle Rane mesencefaliche e diencefaliche. Anche i movimenti spontanei dei due muscoli sono simultanei.

Le nostre ricerche mostrano che nel preparato spinale la funzione riflessa dei due MM. sartorii si svolge con le caratteristiche proprie dei muscoli retti da innervazione identica; all'opposto, nella Rana bulbare i due muscoli simmetrici manifestano un'attività riflessa governata da innervazione reciproca. Si avrebbe pertanto nell'animale spinale, rispetto a quello bulbare, una inversione del riflesso contralaterale con trasformazione dell'effetto inibitorio contralaterale in eccitatorio. Ora, recenti ricerche hanno mostrato come nella Rana e nel Rospo, il bulbo eserciti un'influenza inibitrice sull'attività riflessa [Gerebtzoff <sup>(11)</sup>, Andreoli <sup>(20)</sup>, Andreoli e Granata <sup>(12, 13)</sup>, Bianconi <sup>(14, 15)</sup>] e sull'attività elettrica spontanea del midollo spinale [Crepax *et alii* <sup>(19)</sup>]. La mancanza dell'azione tonica inibitrice bulbare determinerebbe quindi, nell'animale spinale, la prevalenza della componente eccitatoria anche nella risposta contralaterale.

Nella Rana operata di recisione del nevrasso rostralmente al mesencefalo, sia nell'animale mesencefalico sia in quello diencefalico, il comportamento dei due muscoli simmetrici è essenzialmente analogo a quello che si riscontra nell'animale spinale. Si deve pertanto ammettere che il mesencefalo rimuove l'azione tonica bulbare, da cui dipenderebbe la prevalenza della componente inibitoria nella risposta del muscolo contralaterale. Il mesencefalo eserciterebbe quindi una inibizione tonica sulla inibizione bulbare, e cioè si avrebbe un processo analogo a quello descritto dal Fano <sup>(21, 22, 23)</sup> nella regolazione

(20) C. ANDREOLI, « Arch. int. Pharmacodyn. », LXXXII, 213 (1950).

(21) G. FANO, « Arch. it. Biol. », III, 365 (1883).

(22) G. FANO, *Saggio sperimentale sul meccanismo dei movimenti volontari nella testuggine palustre* (« *Emys europaea* »). Firenze, « Pubblicazioni del R. Istituto di Studi superiori pratici e di Perfezionamento, Sez. Sci. fis. nat. », 1884.

(23) G. FANO, « Salute », XIX, 129 (1885).



dell'attività automatica della deambulazione nella Testuggine e dal Pupilli <sup>(24, 25, 26)</sup> nella regolazione della cronassia di subordinazione nel Rospo.

Alla esistenza di centri facilitatori dell'attività riflessa spinale, situati nel mesencefalo, hanno dato evidenza le ricerche eseguite di recente dal Bianconi <sup>(14)</sup> sulla Rana. È stato inoltre provato che nello stesso animale il mesencefalo esercita un'azione aumentatrice sull'attività elettrica spinale [Crepax *et alii* <sup>(19)</sup>].

Le osservazioni da noi eseguite sulle Rane diencefaliche e su quelle a sistema nervoso centrale integro, mostrano infine che il cervello anteriore non modifica essenzialmente la regolazione dell'attività riflessa spinale, effettuata dal bulbo e dal mesencefalo.

**Fisiologia.** — *Effetti della polarizzazione del midollo spinale di Rana sulla eccitabilità del N. ischiatico* <sup>(\*)</sup>. Nota di RENZO CANESTRARI e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Köllensperger e Scheminzky <sup>(1)</sup> hanno studiato nella Rana gli effetti del passaggio di una corrente continua che fluisca lungo l'asse longitudinale del corpo: il flusso di una corrente continua ascendente determina la comparsa di spasmi muscolari generalizzati, mentre quando il verso della corrente è discendente, si stabilisce una completa inibizione motoria. Le indagini successive hanno confermato fondamentalmente i risultati di Köllensperger e Scheminzky: nel midollo spinale percorso da una corrente galvanica si osservano, secondo il senso della corrente medesima, opposte modificazioni della eccitabilità diretta [Scheminzky, Fuortes e Köllensperger <sup>(2)</sup>, Sözer <sup>(3)</sup>], della eccitabilità riflessa [Holzer e Scheminzky <sup>(4)</sup>] e della attività elettrica [Bremer <sup>(5,6)</sup>, Aymone Marsan, Fuortes e Marossiero <sup>(7)</sup>].

Noi abbiamo determinato i valori della eccitabilità del N. ischiatico di Rana, avanti e durante il fluire di una corrente continua lungo la linea mediana del dorso, in direzione ascendente ovvero discendente. Sono stati indagati gli effetti di correnti di diversa intensità.

(24) G. C. PUPILLI, « Studi Sassaesi », XII, 659 (1934).

(25) G. C. PUPILLI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », X, 71 (1935).

(26) G. C. PUPILLI, « Arch. it. Biol. », XCIII, 165 (1935).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) F. K. KÖLLENSPERGER u. F. SCHEMINZKY, « Pflüger's Arch. », CCXLI, 38 (1938).

(2) F. SCHEMINZKY, M. G. F. FUORTES u. F. K. KÖLLENSPERGER, « Pflüger's Arch. », CCXLII, 126 (1939).

(3) F. SÖZER, « Arch. int. Physiol. », LX, 472 (1952).

(4) W. HOLZER u. F. SCHEMINZKY, « Z. Biol. », CI, 101 (1953).

(5) F. BREMER, « Arch. int. Physiol. », LI, 41 (1941).

(6) F. BREMER, « Arch. int. Physiol. », LI, 211 (1941).

(7) C. AYMONE MARSAN, M. G. F. FUORTES a. F. MAROSSERO, « J. Physiol. », CXIII,



Le esperienze sono state eseguite su *R. esculenta*, nei mesi di marzo-giugno.

Si è usata la corrente fornita da un generatore a valvole, con grande smorzamento, munito di un potenziometro che permette di regolare la tensione di griglia in modo da ottenere variazioni d'intensità della corrente (pari a 0,01 mA) nel circuito anodico. Il circuito di stimolazione comprende un inversore di polarità: il cursore del potenziometro consente di stabilire il passaggio della corrente continua in modo graduale.

L'animale veniva fissato, in posizione prona, su una tavoletta di sughero. Gli elettrodi erano di Ag-AgCl, tipo Lapicque: uno di essi era posto in corrispondenza della prima vertebra e l'altro in corrispondenza dell'urostilo. Il contatto degli elettrodi con la cute della Rana era assicurato mediante un batufolo di ovatta a superficie leggermente espansa, impregnata di soluzione di NaCl al 0,7%.

La cronassia del N. ischiatico veniva misurata mediante condensatori, con variazioni di capacità di 0,0005  $\mu$ F. La soglia era determinata esplorando, per mezzo di una lente, la risposta del M. gastrocnemio ovvero registrando l'attività elettrica del nervo mediante un oscillografo elettromagnetico a scrittura diretta. Gli elettrodi di stimolazione e quelli di derivazione erano costituiti da fili di Ag-AgCl. Si aveva cura d'impedire l'essiccamento del nervo e del muscolo messi allo scoperto, mantenendoli costantemente in ambiente umido.

L'animale era sottoposto all'azione della corrente continua, fatta fluire in un dato senso: per valori crescenti d'intensità di corrente, si procedeva alle misurazioni della eccitabilità nervosa in funzione del tempo. Al termine di ciascuna misurazione, che veniva effettuata 1 min dopo l'inizio del flusso di corrente, il circuito di stimolazione veniva aperto; tra una misurazione e la successiva passava un intervallo di tempo di 15-20 min.

Allo scopo d'indagare se gli effetti della corrente galvanica sulla eccitabilità del N. ischiatico fossero influenzati dalla presenza dei centri encefalici, un gruppo di esperimenti venne eseguito sull'animale spinale. In questi casi l'esame cronassimetrico, secondo il procedimento dianzi descritto, è stato effettuato almeno 24 h dopo la recisione sottobulbare [cfr. Pupilli<sup>(8)</sup>].

Per escludere infine che il campo elettrico creato dal passaggio della corrente importasse direttamente variazioni della cronassia del nervo esaminato, abbiamo eseguito alcuni esperimenti su Rane, che avevano subito la sezione completa del *Plexus lumbo-sacralis* all'origine.

Le misurazioni cronassiche si riferiscono, per quanto concerne gli effetti della corrente ascendente, a intensità di corrente fino a 0,45 mA; per la corrente discendente, fino a 0,60 mA: per intensità di corrente superiori a tali valori compaiono contrazioni rapide, deboli, irregolari e inefficaci nei muscoli degli arti posteriori [cfr. L. e M. Lapicque<sup>(9)</sup>].

(8) G. C. PUPILLI, « Studi sassaresi », XII, 659 (1934).

(9) L. LAPICQUE et M. LAPICQUE, « C. r. Soc. Biol. », CXXX, 138 (1919).

Gli effetti del fluire di una corrente continua ascendente lungo il dorso dell'animale, sono i seguenti. *a*) La reobase del N. ischiatico si eleva: l'aumento percentuale cresce col crescere dei valori della corrente fino a 0,20 mA, raggiungendo un aumento massimo del 24,5%; per correnti di intensità più grande, fino a 0,45 mA, l'aumento percentuale si fa minore, con l'aumentare della intensità di corrente. *b*) La cronassia si accorcia; l'accorciamento cresce col crescere della intensità di corrente fino a 0,20 mA; per intensità di corrente maggiore, fino a 0,45 mA, l'accorciamento cronassico è praticamente quello medesimo che si osserva per corrente ascendente di 0,20 mA. *c*) I valori del prodotto reobase  $\times$  cronassia subiscono variazioni trascurabili e possono quindi considerarsi praticamente invariati. *d*) I valori del prodotto (reobase)<sup>2</sup>  $\times$  cronassia aumentano col crescere della intensità di corrente fino a 0,30 mA; per corrente di intensità maggiore, fino a 0,45 mA, l'aumento dei valori di tale prodotto si fa minore con l'aumentare della intensità di corrente.

Gli effetti provocati dalla corrente discendente sono i seguenti. *a*) La reobase del N. ischiatico diminuisce col crescere dell'intensità di corrente, più rapidamente dapprima e più lentamente poi. *b*) La cronassia del nervo si allunga; l'allungamento percentuale della cronassia si fa maggiore col crescere della intensità della corrente. *c*) I valori del prodotto reobase  $\times$  cronassia decrescono progressivamente col crescere della intensità di corrente. *d*) I valori del prodotto (reobase)<sup>2</sup>  $\times$  cronassia decrescono; la diminuzione percentuale si fa maggiore col crescere della intensità di corrente fino a 0,20 mA; per intensità maggiori, fino a 0,60 mA, i valori del prodotto sono praticamente invariati rispetto a quelli che si osservano per una corrente discendente pari a 0,20 mA.

Le modificazioni della eccitabilità del N. ischiatico che sono state riscontrate nelle Rane rese spinali da almeno 24 h, sono corrispondenti a quelle che si osservano nell'animale integro.

Negli animali in cui il *Plexus lumbo-sacralis* era stato reciso alla sua origine, i valori cronassici del N. ischiatico, determinati durante il passaggio di correnti ascendenti (fino a 0,45 mA) o di correnti discendenti (fino a 0,60 mA) lungo la linea mediana del dorso dell'animale, non sono modificati rispetto a quelli riscontrati prima del passaggio della corrente galvanica.

I risultati esposti mostrano che il passaggio di una corrente continua ascendente lungo la linea mediana del dorso della Rana, determina aumento della reobase e accorciamento della cronassia del N. ischiatico; all'opposto, per effetto del passaggio di una corrente discendente, la cronassia del nervo si allunga e la reobase si abbassa.

Cardot e Laugier<sup>(10)</sup> hanno descritto modificazioni analoghe della eccitabilità, in funzione del tempo, prodotte nel nervo dall'elettrotono: aumento della reobase e accorciamento della cronassia all'anodo e diminuzione della reobase e allungamento della cronassia al catodo. Nelle condizioni sperimentali

(10) H. CARDOT et H. LAUGIER, «C. r. Soc. Biol.», LXXVI, 249 (1914).

tali delle ricerche da noi compiute, si osservano dunque, secondo che il verso della corrente è ascendente ovvero discendente, quelle variazioni della reobase e della cronassia del nervo che compaiono anche come conseguenza dell'anelettrotono e rispettivamente del catelettrotono.

Quest'analogia di effetti risulta ancor più evidente, se ci si richiama ai dati sperimentali che hanno indotto Monnier<sup>(11)</sup> a formulare il suo schema della eccitazione. Questo A. ha visto che nell'anelettrotono di un tessuto eccitabile il prodotto reobase  $\times$  cronassia rimane invariato e il prodotto (reobase)<sup>2</sup>  $\times$  cronassia aumenta, mentre i valori di questi due prodotti sono diminuiti per effetto del catelettrotono. Le variazioni dei valori dei due prodotti che noi abbiamo riscontrato nel N. ischiatico per effetto del fluire di una corrente ascendente ovvero discendente lungo la linea mediana del dorso della Rana, corrispondono pertanto a quelle che si hanno rispettivamente nell'anelettrotono e nel catelettrotono del nervo.

Le modificazioni del N. ischiatico dianzi descritte non si osservano quando si procede alla recisione del plesso lombo-sacrale alla sua origine: gli effetti osservati dipendono quindi dall'azione del flusso della corrente galvanica negli elementi della sostanza grigia del midollo spinale. Una partecipazione dei centri encefalici nella comparsa dei fenomeni si può escludere, per il fatto che le stesse modificazioni della cronassia del nervo si ritrovano nell'animale integro e in quello spinale.

Il passaggio di una corrente continua lungo il midollo spinale provoca modificazioni notevoli dello stato di attività dei neuroni spinali. Tali modificazioni dipendono dal verso della corrente continua, nel senso che l'attività funzionale ed elettrica dei neuroni è accresciuta dal flusso di una corrente ascendente lungo il midollo spinale ed è invece depressa per azione di una corrente discendente [Scheminzky *et alii*<sup>(2)</sup>, L. e M. Lapique<sup>(3)</sup>, Bremer<sup>(5,6)</sup>, Holzer e Scheminzky<sup>(4)</sup>, Aymone Marsan *et alii*<sup>(7)</sup>, Sözer<sup>(3)</sup>]. Ora, Monnier<sup>(12)</sup> ha mostrato che l'azione dei centri sul nervo motore si esercita nello stesso senso di un anelettrotono del nervo stesso; il quale anelettrotono è caratterizzato come abbiamo precedentemente detto, da modificazioni della eccitabilità corrispondenti a quelle da noi ritrovate nel corso dell'applicazione di una corrente ascendente lungo il dorso dell'animale.

Si può pertanto ritenere che per effetto del passaggio di una corrente continua ascendente lungo la regione vertebrale della Rana, l'azione catelettrotonizzante esercitata dalla corrente medesima sui neuroni spinali ne accresce lo stato di attività; l'aumentata attività dei neuroni determina nel nervo periferico le stesse modificazioni che in questo si verificano nel corso dell'anelettrotono. Nel caso di una corrente discendente, l'azione anelettrotonizzante esercitata sui neuroni spinali importa una depressione della loro attività; e nel nervo periferico compaiono allora modificazioni simili a quelle del catelettrotono.

(11) A. M. MONNIER, *L'excitation électrique des tissus*. Paris, Hermann (1934).

(12) A. M. MONNIER, « Arch. int. Physiol. », XXXVII, 337 (1933).

**Fisiologia.** — *Influenze cerebellari crociate sul tono posturale* (\*).  
 Nota di GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (\*\*)  
 dal Socio G. C. PUPILLI.

Non sono molti i problemi di fisiologia cerebellare sui quali l'accordo fra gli studiosi sembra ormai acquisito, ma tra essi ognuno porrebbe quella che il Luciani <sup>(1)</sup> chiamava la « questione importantissima dell'azione diretta o incrociata del cervelletto ». Spiegato ormai [Chiarugi e Pompeiano <sup>(2)</sup>] il *croisement de faiblesse*, descritto da Flourens negli Uccelli, la concezione di Rolando-Luciani d'una influenza essenzialmente diretta esercitata dal cervelletto sul tono posturale sembra assodata. Non la scuotono gli effetti crociati che si ottengono con esperimenti di stimolazione, giacché essi possono essere spiegati con meccanismi spinali o bulbo-pontini <sup>(3)</sup>, analoghi a quelli che entrano in giuoco nell'innervazione reciproca.

Eppure connessioni cerebellifughe crociate esistono e non sempre un secondo incrociamiento ristabilisce l'omolateralità dei rapporti. Basti ricordare il fascio uncinato di Russell, così esaurientemente studiato dal punto di vista anatomico [cfr. Jansen <sup>(4)</sup>], la cui funzione peraltro ci è del tutto ignota. La sua importanza è attestata dal fatto che ben il 50 % delle connessioni fastigio-bulbari sono crociate [cfr. Jansen <sup>(4)</sup>]. Il risultato principale di queste ricerche è appunto rappresentato dalla dimostrazione che il sistema russelliano esercita un'azione tonica di rinforzo sui meccanismi posturali contralaterali.

In 60 Gatti venne eseguita una decerebrazione pre- o postcolliculare, in narcosi eterica. Le arterie vertebrali non venivano mai compresse nel corso dell'intervento, mentre le arterie carotidi comuni venivano liberate dopo 15-30 minuti. Le vie fastigio-bulbari crociate di Russell venivano interrotte alla loro origine, nella parte caudale del *nucleus fastigii* [cfr. Jansen <sup>(4)</sup>], o in vari punti del loro tragitto, grazie a lesioni elettrolitiche prodotte con elettrodi orientati mediante l'apparecchio di Horsley-Clarke. Il preparato era mantenuto in un'amaca, con il capo rigidamente e simmetricamente fissato nell'apparecchio stereotassico e con le zampe penzoloni. Il tono posturale veniva valutato mediante esame della resistenza alla flessione passiva e i risultati erano spesso documentati con riprese cinematografiche. Ricerche elettromio-

(\*) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) L. LUCIANI, *Il cervelletto*, Firenze, Le Monnier, 1891. Cfr. p. 258.

(2) E. CHIARUGI e O. POMPEIANO, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXX, 690 (1954); «Arch. Sci. biol.», in stampa.

(3) Su questo argomento gli Autori hanno esperimenti in corso.

(4) J. JANSEN, in J. JANSEN a. A. BRODAL, *Aspects of cerebellar anatomy*. Oslo, Johan Grundt Tanum, 1954.



grafiche sono in corso, ma non formano oggetto di questa Nota. L'estensione della lesione veniva controllata su sezioni istologiche seriate del cervelletto e del tronco dell'encefalo, colorate alternativamente coi metodi di Nissl e di Weil.

La distruzione del polo posteriore del nucleo del tetto d'un lato determina netta diminuzione, e talvolta scomparsa, della rigidità da decerebrazione negli arti del lato opposto, mentre l'ipertono estensore aumenta in quelli dello stesso lato. L'aumento ipsilaterale del tono è di solito più evidente negli arti posteriori, perché quivi la rigidità è spontaneamente meno marcata. La scomparsa contralaterale della rigidità s'accompagna, non costantemente, all'insorgenza d'un lieve tono flessore.

I seguenti fatti dimostrano che gli effetti da noi osservati non sono di natura irritativa: *a*) l'atonía contralaterale fu osservata ininterrottamente anche per 24 ore, e cioè fino a quando il preparato decerebrato venne sacrificato, essendo peraltro in ottime condizioni generali; *b*) la stimolazione (300/sec; 1 msec; 0,3-0,5 volta) della parte caudale del *nucleus fastigii* produce effetti opposti (flessione ipsilaterale ed estensione contralaterale); *c*) la lesione successiva della parte omologa del *nucleus fastigii* contralaterale produce, immediatamente e durevolmente, ipertono estensore, esteso agli arti d'ambo i lati e d'intensità estrema.

Si conclude quindi che la parte caudale del *nucleus fastigii* esercita una azione di rinforzo, a carattere tonico, sui meccanismi posturali contralaterali a cui è dovuto la rigidità da decerebrazione. L'apporto fastigiale crociato è necessario al mantenimento della rigidità estensoria, purché però i centri omologhi del lato opposto siano integri. Quando la lesione è bilaterale e simmetrica, i centri tonogeni bulbo-pontini sembrano non richiedere più l'apporto facilitante della porzione caudale del nucleo del tetto: scompare l'asimmetria posturale e il tono si livella a gradi più intensi di rigidità estensoria.

La lesione unilaterale della *pyramis* e dell'*uvula* [lobuli VIII e IX di Larzell<sup>(5)</sup>] produce effetti analoghi alla distruzione elettrolitica del polo posteriore del nucleo del tetto ipsilaterale. La natura non irritativa dei fenomeni prodotti da queste ablazioni cortico-cerebellari è dimostrata *a*) dalla lunga loro persistenza e *b*) dalla possibilità di riprodurli mediante raffreddamento o nembutalizzazíone locale (6%) delle aree in parola.

I seguenti fatti fanno pensare che gli effetti più sopra descritti, corticali e nucleari, siano dovuti alla soppressione dell'influenza tonica esercitata da uno dei due fasci uncinati:

*a*) *pyramis* e *uvula* si proiettano alle parti posteriori del nucleo fastigiale ipsilaterale, da cui prende origine, in gran parte, il fascio di Russell cfr. Jansen<sup>(4)</sup>;

*b*) gli effetti della stimolazione o della distruzione del polo caudale del nucleo del tetto si osservano ancora dopo decerebrazione postcolliculare, che lascia intatto il fascio di Russell ma interrompe le vie efferenti crociate

(5) O. LARSELL, «J. comp. Neurol.», IC, 135 (1953).



che vanno a costituire la componente fastigiale del *brachium conjunctivum* [cfr. Jansen <sup>(4)</sup>];

c) l'asimmetria tonica prodotta dalla lesione del polo posteriore del nucleo del tetto non viene accentuata dall'ablazione delle lamelle ipsilaterali dell'*uvula* e della *pyramis*;

d) l'ablazione delle lamelle degli stessi lobuli, purché eseguita contralateralmente alla prima lesione fastigiale, fa scomparire l'asimmetria e produce rigidità bilaterale. Essa cioè produce gli stessi effetti della distruzione elettrolitica del polo posteriore del nucleo del tetto corrispondente (*vid supra*).

È quindi verosimile che la scarica tonica decorrente lungo il fascio di Russell sia mantenuta o rinforzata da impulsi cortico-nucleari che hanno origine, almeno in parte, nelle lamelle ipsilaterali della *pyramis* e dell'*uvula*.

Restano da pigliare in esame gli effetti da sezione del sistema russelliano eseguita a valle dell'incrociamiento.

Risulta chiaramente dallo studio eseguito da Rasmussen <sup>(6)</sup> sul decorso al Marchi del fascio uncinato nel Gatto che la lesione della parte rostrale del nucleo del tetto deve necessariamente determinare interruzione di gran parte delle fibre di Russell originate nella porzione caudale del nucleo del tetto contralaterale. Se l'interruzione del sistema russelliano viene eseguita a questo livello, e cioè dopo l'incrociamiento, la rigidità estensoria dovrebbe scomparire ipsilateralmente alla lesione. L'esperimento verifica in pieno questa previsione. Una lesione fastigiale unilaterale, comprendente l'intera metà o 2/3 rostrali del nucleo, produce infatti marcata ipotonia estensoria d'entrambi gli arti ipsilaterali, in qualche caso associata a lieve postura flessoria attiva, ed inoltre aumenta la rigidità contralaterale. Anche questa sindrome non è irritativa, come è dimostrato da controlli analoghi a quelli più sopra esposti.

Risulta dunque dai nostri esperimenti che la distruzione della parte rostrale del nucleo del tetto, da cui prende origine la maggior parte delle fibre fastigio-bulbari dirette, produce sul tono posturale effetti diametralmente opposti a quelli legati alla distruzione del polo caudale dello stesso nucleo, le cui vie efferenti sono rappresentate in prevalenza dal fascio uncinato di Russell.

A questo punto della ricerca, nascono due problemi, ai quali sono dedicate ricerche tuttora in corso. Essi si riassumono nelle domande se l'atonía estensoria non costantemente associata a modica postura flessoria attiva che abbiamo visto seguire lesioni rostro-fastigiali ipsilaterali, si appartenga alla spasticità flessoria descritta da Sprague e Chambers <sup>(7)</sup> dopo lesione ipsilaterale di tutto il nucleo del tetto e se questa atonia estensoria sia, in tutto o in parte, l'espressione dell'interruzione delle fibre russelliane nate nel polo posteriore del nucleo del tetto contralaterale. Non abbiamo ancora elemen-

(6) A. T. RASMUSSEN, « J. comp. Neurol. », LVII, 165 (1933).

(7) J. M. SPRAGUE e W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

sufficienti per rispondere al primo quesito, ma è certo che i due fenomeni sono apparentati dallo scomparire dell'atonia quando la lesione viene estesa alle strutture omologhe del tetto contralaterale. Alla soluzione del secondo quesito possono contribuire parzialmente i seguenti dati: *a*) la sindrome d'atonia rostro-fastigiale ipsilaterale non viene modificata dall'ablazione delle lamelle contralaterali della *pyramis* e dell'*uvula* o di una lesione caudo-fastigiale contralaterale; *b*) la postura asimmetrica prodotta da lesione rostro-fastigiale scompare, e subentra rigidità bilaterale, dopo lesione simmetrica della regione omologa rostro-fastigiale. Questi esperimenti dimostrano che nella genesi della sindrome atonica ipsilaterale ha importanza grande, non necessariamente esclusiva, l'interruzione del sistema russelliano, eseguita a valle del suo incrocio.

Le asimmetrie posturali prodotte da lesione della parte caudale del nucleo del tetto non sono abolite dai seguenti interventi, eseguiti singolarmente: *a*) aspirazione di tutto il mesencefalo; *b*) sezione spinale tra  $T_{12}$  e  $L_1$  (effetto Schiff-Sherrington); *c*) ablazione della corteccia del *lobus anterior*. Poiché ciascuno di questi interventi produce estrema rigidità estensoria, appare chiara la differenza con le asimmetrie neocerebellari del Rossi<sup>(8)</sup>, che vengono, com'è noto [Rossi<sup>(8)</sup>, Di Giorgio<sup>(9)</sup>], sommerse dalla rigidità da decerebrazione. Poiché gli interventi descritti nei paragrafi *b*) e *c*) liberano il tono vestibolare da importanti influenze inibitrici [Stella<sup>(10)</sup>], si deve concludere che gli impulsi labirintici non riescono a compensare la mancanza unilaterale di innervazione russelliana. Queste considerazioni danno un'idea dell'importanza quantitativa del fenomeno, suggeriscono esperimenti cronici e pongono il problema dei rapporti fra atonia fastigiale e atonia di Luciani. A questo riguardo sono in corso ricerche di uno di noi [Batini e Pompeiano<sup>(11)</sup>].

A circoscrivere l'aspetto anatomico del problema valgano i seguenti dati. L'atonia crociata *a*) è presente dopo aspirazione bilaterale di tutto il *neocerebellum* e della parte corticale vermiana del *lobus anterior*; *b*) non è legata a lesioni accidentali del tronco dell'encefalo (controlli istologici in serie); *c*) scompare, anche nelle condizioni descritte in *a*), dopo lesione della parte omologa del nucleo del tetto contralaterale.

Una prima rappresentazione, certo assai schematica, dei risultati da noi ottenuti potrebbe essere la seguente. Due sistemi cerebellifughi, fra loro antagonisti, governano le influenze fastigiali sul tono posturale: *a*) un sistema diretto, originantesi soprattutto nelle parti rostrali ed a carattere inibitore, di cui fanno parte le fibre fastigio-bulbari dirette; *b*) un sistema crociato, originantesi soprattutto nella parte caudale ed a carattere facilitante, di cui fa parte il fascio uncinato di Russell.

(8) G. ROSSI, « Arch. Fisiol. », XIX, 391 (1921).

(9) A. M. DI GIORGIO, « Arch. Fisiol. », XLII, 25 (1942).

(10) G. STELLA, « Atti Soc. Med. Chir. Padova », XXIII, 5 (1944).

(11) C. BATINI e O. POMPEIANO, esperimenti in corso.

L'esistenza di vie fastigio-bulbari dirette, ad azione facilitante, non può essere esclusa, ma sarà presa in considerazione solo quando saranno terminate ricerche attualmente in corso.

L'interruzione unilaterale del sistema di Russell, eseguita prima dell'incrocio, determina scomparsa contralaterale della rigidità da decerebrazione, forse per effetto del prevalere dell'azione tonica inibitrice di sistemi, che con altre ricerche stiamo cercando di localizzare. Rimane da spiegare perché la prevalenza dei sistemi inibitori non si ha più quando la lesione diventi bilaterale. Anche su questo argomento sono in corso esperimenti.

**Genetica.** — *Adattamento e incipiente isolamento intraspecifico in un Copepode Harpacticoide della laguna veneta* (\*). Nota di BRUNO BATTAGLIA ed ERMELINDA PULZE, presentata (\*\*) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In una precedente Nota uno di noi <sup>(1)</sup> aveva messo in evidenza l'interesse presentato dall'ambiente lagunare per ciò che concerne i processi di adattamento della sua fauna, e le possibilità d'impiego offerte, specialmente dai componenti del benthos, per ricerche genetico-evolutive.

Una specie dei cui fenomeni adattativi abbiamo già avuto occasione di occuparci <sup>(2)</sup> è il Copepode Harpacticoide *Tisbe reticulata* Bocquet che, per molti aspetti (rapido ciclo vitale, facile allevabilità, ecc.), costituisce un ottimo materiale da laboratorio.

Da alcuni mesi abbiamo in allevamento, oltre alla *Tisbe* di Chioggia, anche un ceppo di *Tisbe reticulata* proveniente da Roscoff. Disponendo in tal modo di due ceppi di *Tisbe* di diversa origine, ci è stato possibile eseguire un confronto che consentisse di mettere in evidenza eventuali differenze razziali tra i rappresentanti delle due popolazioni.

L'analisi morfologica non ha messo in rilievo differenze significative. Non si esclude però che queste possano venire messe in evidenza da analisi ulteriori condotte al livello biometrico, come è già stato osservato in altri Copepodi <sup>(3)</sup>.

Le sole differenze facilmente apprezzabili sono quelle relative al tipo di pigmentazione, che già di per sé, essendo dimostrato il loro determinismo genotipico, stanno ad indicarci incipienti divergenze razziali.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia e Anatomia comp. dell'Università di Padova e la Stazione Idrobiologica di Chioggia, con contributi del Centro di Studi Talassografici del C.N.R.

Gli esemplari di Roscoff ci sono stati gentilmente forniti dal dott. B. Bozic che qui cogliamo l'occasione per ringraziare vivamente.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) B. BATTAGLIA, « Rapp. et Proc. – Verb. des Réunions de la Comm. Intern. Expl. Scient. Mer Mediter. », XII, 177 (1954).

(2) B. BATTAGLIA, « Bollet. di Zool. », 21, 199 (1954).

(3) B. BATTAGLIA, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », XXV, 112 (1954).

Più interessanti, perché fornite di diretto valore adattivo, sono alcune differenze fisiologiche che esistono tra i due ceppi. Secondo le affermazioni del Bocquet <sup>(4)</sup>, la *Tisbe reticulata* di Roscoff è notevolmente sensibile alle variazioni di salinità. Questa sensibilità non è stata invece riscontrata per la *Tisbe* lagunare, la quale vive in un ambiente particolarmente variabile anche per quanto riguarda la concentrazione salina delle acque. Nella stazione lagunare da cui abbiamo prelevato la *Tisbe* che abbiamo in allevamento, non si osservano generalmente concentrazioni che superino il 35 ‰, ma non sono infrequenti diluizioni anche assai forti che mai si verificano in un ambiente tipicamente marino.

Abbiamo pertanto voluto confrontare le capacità degli individui dei due ceppi di tollerare salinità ridotte. L'esperimento è stato condotto con la seguente semplice tecnica: N. 200 ♀♀ ovigere della popolazione lagunare (Chioggia) e della popolazione di Roscoff sono state poste in recipienti contenenti acqua di mare a due diverse salinità (rispettivamente 35 ‰ e 23,3 ‰) mantenendo esattamente identiche tutte le altre condizioni (quantità d'acqua e d'alimento, temperatura, illuminazione, ecc.) Si è tenuto conto della mortalità di queste femmine ed anche della fecondità, computando in questo caso il numero di individui figli trovati nei recipienti al 18° giorno dall'inizio dell'esperimento.

I risultati, riassunti nelle tabelle I e II, ci indicano che gli esemplari di Chioggia non risentono alcun effetto negativo se allevati in acqua alla concentrazione del 23,3 ‰, mentre gli esemplari di Roscoff rispondono alla bassa salinità con una elevata mortalità ed una fecondità estremamente ridotta.

TABELLA I.

*Numero (in ‰) di ♀♀ morte entro il 10° giorno dall'inizio dell'esperimento.*

Ceppo	Sal. 35 ‰	Sal. 23,3 ‰
Chioggia . . . . .	6,66	8,00
Roscoff . . . . .	24,00	56,00

Tra i fenotipi di Chioggia sono state riscontrate alcune differenze nella fecondità che si possono attribuire al fatto, già altrove sottolineato, che le diverse forme sono probabilmente dotate di diversi coefficienti adattativi.

Stabilita l'esistenza delle differenti capacità di adattamento delle due popolazioni, abbiamo eseguito alcuni incroci tra esemplari di Chioggia e di Roscoff, con lo scopo di accertare se il differenziamento razziale, constatabile in base alle divergenze di caratteri fisiologici, quali la capacità di tollerare

(4) CH. BOCQUET, « Arch. de Zool. Exp. et Gén. », 87, 335 (1951).



diverse salinità, si riflettesse anche in altri caratteri come fertilità (numero di incroci tentati numero di incroci con prole) e fecondità.

TABELLA II.

*Fecondità delle ♀♀ di Chioggia e di Roscoff allevate a due diverse salinità.*

M = numero medio di figli trovati nei recipienti al 18° giorno dall'inizio dell'esperimento.

		Sal. 35 ‰	Sal. 23,3 ‰
Ceppo	Fenotipo	M	M
Chioggia . . . .	«Maculata»	75,20	64,40
	«Violacea»	153,20	117,80
	«Trifasciata»	154,60	201,20
	Media di M = 127,66		127,80
Roscoff . . . .	«Maculata»	203,00	14,20

I risultati dei 70 incroci eseguiti hanno messo in evidenza i fatti seguenti:

1° Nell'incrocio tra esemplari di Chioggia la percentuale degl'incroci fertili è del 60 ‰, mentre negl'incroci tra individui di diversa origine (Chioggia × Roscoff, indipendentemente dal sesso) questo valore scende al 35 ‰;

2° la fecondità (vedi fig. 1), espressa come numero medio di individui della  $F_1$  per recipiente, è lievemente più alta negli incroci Chioggia × Chioggia. La differenza osservata potrebbe tuttavia non essere significativa. Altamente significativa è invece la differenza nel rapporto-sessi tra i due tipi di incrocio. Negli incroci Chioggia × Roscoff il numero di ♀♀ della  $F_1$  è assai più basso, relativamente al numero dei ♂♂, che negli incroci Chioggia × Chioggia;

3° nella  $F_2$  degli incroci Chioggia × Chioggia abbiamo una riduzione nel numero di individui deposti, minore comunque della riduzione osservata nella  $F_2$  degli incroci Chioggia × Roscoff.

Il fatto più saliente, nel confronto tra i due tipi di incrocio, è dato dalla imponente alterazione del rapporto-sessi riscontrato nella  $F_1$  degli incroci Chioggia × Roscoff. Fenomeni simili sono stati riscontrati da altri Autori su materiale diverso, in incroci interspecifici o tra due razze <sup>(5)</sup>. La ridotta fertilità e gli squilibri così forti del rapporto-sessi, indizi di una condizione di

(5) J. B. S. HALDANE, « J. of Genetics », 12, 101 (1922).



lieve incompatibilità tra i due ceppi, stanno ad indicarci l'entrata in funzione di un meccanismo d'isolamento che è tuttavia ai suoi primissimi stadi.

Circa la modalità con cui questo incipiente isolamento è venuto ad instaurarsi, vi sono due spiegazioni possibili. Può darsi che esso sia il risultato della semplice distanza geografica tra le due popolazioni. L'altra alternativa è data dalla possibilità che i meccanismi di isolamento siano sorti come conseguenza dei fenomeni adattativi, nel senso che le divergenze ecologiche tra gli ambienti ospitanti le due popolazioni sono tali da determinare in queste ultime, per selezione, l'accumulo di considerevoli diversità genetiche. Il loro incrocio mette allora in evidenza un certo grado di incompatibilità tra i genomi delle due forme parenti che ha come primo effetto l'alterazione del rapporto-sessi. Il problema delle cause di quest'interessante fenomeno, verrà ripreso in esame e sviluppato in un prossimo lavoro.

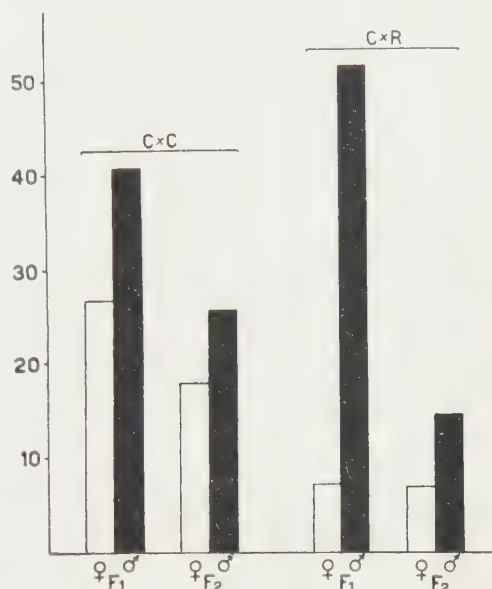


Fig. 1. - Sulle ordinate, il numero medio di individui per recipiente. (Ulteriori spiegazioni nel testo).

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Socio Mario Giacomo Levi

Tenuta (\*) dal Socio GIULIO NATTA.

Il giorno 9 dicembre 1954 il Prof. Mario Giacomo Levi ha lasciato la Sua vita terrena, serenamente trascorsa sino alle ultime ore, in cui la luce dello sguardo e le forze dell'animo splendevano ancora immutate, malgrado il lento degradare delle forze fisiche minate da un male inesorabile.

Per chi ha avuto come me la fortuna di essergli vicino nel periodo in cui Egli era maturo di un'esperienza accumulata in una vita disinteressatamente dedicata al lavoro ed al Suo paese, Egli è stato una guida sicura, un consigliere paterno e sempre meravigliosamente sereno nel Suo giudizio. Anche chi l'ha conosciuto appena non può non essere stato conquistato dalle Sue doti

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

spirituali; non può non averne apprezzato la grandezza dell'animo, la larghezza delle visioni, l'equilibrio, l'obiettività di giudizio, il disinteresse più assoluto, il complesso insomma di quei valori umani che pongono un uomo al di fuori ed al disopra dei comuni mortali.

Desidero quindi ricordare il prof. Levi oltre che come scienziato e grande didatta, come uomo di eccezionale equilibrio e bontà.

Parlerò quindi brevemente delle tappe decisive della Sua rapida e brillante carriera perché questa è già stata dettagliatamente descritta dal prof. Coppadoro in un articolo da lui pubblicato sulla *Chimica e l'Industria* nel gennaio di quest'anno.

Compiuti gli studi universitari a Padova, ove era nato il 16 aprile 1878, Egli si laureò nel 1900 in *Chimica pura* nell'Istituto Chimico diretto dal prof. R. Nasini, presso il quale già dal terzo anno era stato accolto come allievo interno. Subito dopo la laurea conseguita con la lode, divenne assistente nello stesso Istituto.

Nel periodo patavino collaborò con G. Carrara, allora assistente del Nasini, in lavori di elettrochimica e frequentò nel 1902-1903 il Politecnico di Karlsruhe con una borsa di studio ministeriale. Ivi collaborò ai lavori classici e fondamentali del prof. Le Blanc sui fenomeni di passività del nichel metallico.

Conseguita nel 1903 la libera docenza tenne per incarico l'insegnamento di elettrochimica all'Università di Padova sino al 1906, anno in cui, in seguito al trasferimento del Suo maestro a Pisa, lo seguì come aiuto in quella città, ove ebbe l'incarico dell'insegnamento della chimica applicata. Già in quella epoca, sebbene i Suoi lavori fossero principalmente rivolti al campo elettrochimico, cominciò a collaborare col Suo maestro nelle ricerche sui prodotti naturali connessi con attività endogene del nostro paese ed in particolare sulla radioattività dei soffioni boraciferi in Toscana. Collaborò inoltre col prof. R. Nasini nelle ricerche sulla radioattività di nostri minerali e di nostre rocce di acque e di gas naturali e sulle indagini chimico-fisiche di numerose nostre acque minerali.

Nel periodo toscano appare naturale come Egli fosse stato particolarmente attratto dai fenomeni connessi con le manifestazioni endogene di Larderello, nello studio della composizione dei gas e vapori contenuti nei soffioni boraciferi e dello sfruttamento di tali soffioni per la produzione industriale del borace.

Quando nel 1909 vinse il concorso in base al quale venne nominato direttamente, senza trascorrere il periodo di straordinariato, Professore ordinario di *Chimica tecnologica* nella Scuola di Ingegneria dell'Università di Palermo, rivolse la Sua attenzione alle risorse minerarie e chimiche della Sicilia, ed in particolare si dedicò allo studio analitico ed all'applicazione degli zolfi greggi all'utilizzazione dei sali potassici e del bromo. Fondò l'Istituto di *Chimica tecnologica* e per primo diresse l'Istituto superiore commerciale e coloniale fondato nel 1918 in tale città.

Anche a Palermo, come ovunque, la Sua personalità aveva affascinato l'ambiente universitario e la Sua chiamata all'Università di Bologna nel 1920

a coprire la Cattedra di Chimica applicata nella facoltà di Ingegneria lasciò molto rimpianto all'Ateneo palermitano. Già nella Sua residenza in Sicilia era maturata in Lui la tendenza ad occuparsi del problema dei combustibili, avendo partecipato al Consiglio di Amministrazione dell'Officina Comunale dei gas, carica che Gli fu affidata analogamente a Bologna.

Durante il periodo bolognese, dal 1920 al 1926 indirizzò la massima parte del lavoro del Suo Istituto presso la Scuola Superiore di Chimica Industriale da Lui fondata nel 1922, verso ricerche nel campo dei combustibili, scegliendo questi come principale argomento del suo lavoro. Già prima di allora vasta ed assai apprezzata era stata la Sua opera di consulenza presso i ministeri ed in particolare presso quello dell'Industria, tanto che il Ministero dell'Economia Nazionale istituì presso il Suo Laboratorio nel 1926 una sezione di studi sui combustibili.

Di speciale importanza furono infatti le ricerche sui combustibili liquidi e gassosi. Egli segnalò le particolari composizioni di molti nostri gas naturali, estremamente puri e secchi, e di nostri combustibili liquidi, estremamente leggeri, intuendo che le manifestazioni più superficiali, di cui allora si iniziava un modesto sfruttamento, dovevano rappresentare la dimostrazione dell'esistenza di ben più vasti giacimenti che furono individuati solo molto più tardi ed in questi ultimi anni. A tali studi sulle materie prime nazionali Levi giunse gradatamente attraverso un naturale sviluppo dei Suoi lavori iniziati in gioventù.

Particolare attenzione va rivolta all'attività di ricerca del prof. Levi al Politecnico di Milano ove fu chiamato nel 1927.

Il Suo predecessore all'insegnamento della chimica industriale era stato Ettore Molinari, uomo enciclopedico, di vasta cultura, fra i primi che seppero inquadrare i problemi della chimica industriale nelle loro basi economiche. Molinari visse in un periodo storico in cui il progresso nel campo tecnico-scientifico era dovuto prevalentemente all'opera individuale di singoli uomini, di scienziati, di precursori isolati. Successogli alla cattedra, il prof. Levi comprese subito la necessità di organizzare la ricerca sulle basi di una collaborazione fra molti ricercatori e cercò di instaurare a Milano un grande Laboratorio, dotandolo di svariate attrezzature e soprattutto di un numeroso gruppo di sperimentatori. Fu questo concetto fondamentale che Lo spinse a creare tale Laboratorio, convinto che gran parte del progresso della scienza e della tecnica fosse dovuto all'opera faticosa di molti, al lavoro sistematico e collettivo e che più non bastasse l'opera isolata del singolo individuo.

Il Suo nuovo Istituto al Politecnico di Milano si propose svariati compiti di vasto interesse nazionale. In esso trasferì da Bologna la Sezione dei Combustibili per la quale costruì una degna sede in un nuovo edificio a lato dell'Istituto, che fornì di apparecchiature e di mezzi.

In un periodo in cui l'Italia importava dall'estero tutto il fabbisogno di combustibili, di fronte al contrasto tra lo scetticismo di alcuni e l'ottimismo di altri sull'importanza delle risorse italiane, il prof. Levi organizzò uno studio sistematico di tutte le nostre risorse e delle loro possibilità di impiego. Il

risultato di tale lavoro sistematico è per la massima parte raccolto nei cinque volumi « Studi e Ricerche sui Combustibili » pubblicati nel decennio 1927-1937.

Il lavoro della Sezione Combustibili non si limitò all'analisi alla caratterizzazione dei combustibili nazionali, ma affrontò lo studio di tutte le loro possibili applicazioni pratiche anche come materie prime per l'industria chimica. Studiò le nostre ligniti, le nostre rocce asfaltiche ed i loro prodotti di distillazione primaria, la gassificazione per la produzione di gas di sintesi per l'idrogenazione delle ligniti e dei catrami, la sintesi degli idrocarburi e la loro idrogenazione. Altre numerose ricerche riguardano la produzione ed utilizzazione del gas illuminante, del gas di cokeria, dei gas di piroschissione e soprattutto quella dei gas naturali di cui in quell'epoca ancora modeste sebbene diffuse erano le manifestazioni in Italia.

Tali ricerche svolte nell'Istituto di Chimica Industriale portarono a diverse applicazioni pratiche, ad impianti per idrogenazioni catalitiche della naltalina a tetralina e decalina, ad impianti per la produzione e rigenerazione di olii lubrificanti, per la produzione di emulsioni bituminose ad usi stradali, per la produzione di alcoli superiori per idrogenazione di acidi grassi: procedimento quest'ultimo che ebbe anche applicazioni all'estero. Particolare oggetto di studi fu il petrolio albanese di Davoli che doveva poi alimentare le raffinerie di Bari.

Proprio nel momento in cui la Sezione Combustibili da Lui fondata aveva raggiunto notevole sviluppo ed Egli vedeva realizzarsi e concretarsi la Sua aspirazione di disporre di un grande Istituto di ricerche, Lo colpirono le leggi razziali del 1938 che interruppero bruscamente la Sua opera nel momento in cui avrebbe potuto dare maggiori frutti.

Con l'allontanamento del prof. Levi la Sezione Combustibili, ricca di attrezzature raccolte per merito del prof. Levi, venne scissa dall'Istituto di Chimica Industriale. Durante la guerra Egli si rifugiò in Svizzera dove, sempre instancabile maestro anche nei momenti più difficili, riprese l'opera di insegnamento svolgendo nel 1944-45 un corso di Chimica Industriale per gli allievi ingegneri italiani, come Lui in esilio, ed un corso sull'industria del petrolio e dell'azoto per gli studenti di chimica dell'Università di Losanna.

L'amarezza del distacco dal Politecnico e le difficoltà degli anni trascorsi all'estero non riuscirono ad inasprire il Suo carattere profondamente buono e generoso e, tornato nel 1945 in Italia, non serbò nessun rancore e fu anzi prodigo di paterno aiuto e preziosi consigli ai più giovani di Lui, che Lo avevano sostituito nel periodo della Sua assenza.

Durante la Sua lontananza le ricerche sui combustibili venivano continue presso la Sezione sperimentale dei Combustibili, mentre l'Istituto di Chimica Industriale si era rivolto verso ricerche nel campo delle sintesi organiche. Il prof. Levi al Suo ritorno, come Direttore dell'Istituto di Chimica Industriale, diede il Suo appoggio illuminato e sapiente ai nuovi indirizzi dell'Istituto, ed un impulso notevole ai lavori, trasfondendo nei collaboratori il Suo entusiasmo ed il Suo sereno ottimismo.



Contribuì notevolmente a ritrovare i mezzi necessari per la ricostituzione delle apparecchiature dell'Istituto di Chimica Industriale che, in seguito al distacco della Sezione Combustibili ed alle difficoltà della guerra, era rimasto impoverito.

L'accresciuta e rinnovata possibilità di mezzi di ricerche dell'Istituto di Chimica Industriale fu dovuto in massima parte all'opera disinteressata e fattiva del prof. Levi che si assunse gli oneri e le responsabilità gravi della direzione del grande Istituto, lasciando ai più giovani la massima libertà d'iniziativa, pronto sempre a concedere aiuto ed appoggio.

Numerosi sono gli incarichi che il prof. Levi ebbe in campi diversi connessi con la Sua specializzazione nel campo dei combustibili. Fece parte dal 1926 del Consiglio di Amministrazione dell'Associazione Nazionale per il Controllo della Combustione di cui nel 1933 fu nominato membro del Consiglio Tecnico. Fu membro del Comitato tecnico per la disciplina petrolifera, e del Consiglio Superiore delle Miniere, consulente per 30 anni del Ministero dell'Industria nel campo dell'industria chimica e dei combustibili, Presidente del Comitato per le ricerche petrolifere in Alta Italia, del Consiglio Superiore delle Miniere. Dal 1945 al 1953 fu Presidente dell'Azienda Carboni Italiani e promotore di iniziative per lo sfruttamento chimico del Carbone del Sulcis.

Fu membro del Comitato Nazionale per la Chimica presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche, e direttore del Centro di Chimica Industriale del C.N.R. presso il Politecnico di Milano.

La Sua apprezzata opera nel campo della ricerca scientifica Gli valse numerosi riconoscimenti in Italia ed all'estero dove fece parte di numerose Accademie Scientifiche. Fu nominato Socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei nel 1923, Socio nazionale nel 1947. Fu Socio inoltre della Società delle Scienze naturali di Palermo, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, dell'Istituto Veneto di Scienze, membro effettivo dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. All'estero fu nominato membro di onore della Société de Chimie Industrielle di Parigi e della Society of Chemical Industry di Londra. Fu eletto Presidente della Soc. Chimica Italiana di chimica nel 1949 nella quale infuse il Suo spirito di cordiale collaborazione, e presiedette con grande prestigio uno dei più riusciti Congressi Nazionali di Chimica, quello del 1950 a Milano.

Per l'opera appassionata da Lui svolta per la Sua città di adozione, sia come didatta nella formazione di generazioni di ingegneri, sia nel campo della ricerca e nell'industria, ricevette nel 1953 un segno di riconoscimento con il conferimento della medaglia d'oro di benemerenda da parte del Comune di Milano.

Desidero ancora ricordare, ed in modo particolare, l'attività di grande didatta, oltre che di grande organizzatore, di M. G. Levi.

Convinto dell'alta funzione, direi della missione, del professore universitario non solo per la formazione tecnica dei giovani, ma anche per la loro formazione spirituale, Egli considerò fondamentale tenere corsi di lezioni preparati con molta accuratezza. Oratore brillante e facile sapeva col Suo fascino



personale conquistare e interessare l'uditorio dei giovani studenti che accorrevano in gran numero alle Sue lezioni, pur appartenendo per la massima parte alle specializzazioni non chimiche della Scuola di ingegneria.

Accadeva molto spesso, cosa veramente insolita per le fredde aule della Scuola di ingegneria, che le Sue lezioni suscitassero entusiasmi ed un caldo consenso di applausi.

Oltre alle lezioni di chimica industriale svolse un'apprezzata attività didattica nelle scuole di perfezionamento in termotecnica ed in quella di ingegneria gasistica, fondata nel 1927 presso il Politecnico di Milano.

La Sua comunicativa era l'espressione della Sua indole comprensiva e benevola che Lo rendeva amato dagli allievi, amico di tutti e particolarmente caro agli amici che potevano rivolgersi a Lui in qualunque evenienza, sicuri di trovare aiuto e comprensione.

La Sua nobile figura moveva alla confidenza; la Sua parola convincente, la Sua cordialità avevano saputo creare nell'Istituto un'atmosfera di armonia e di serena fiducia nel lavoro.

È per questo che il vuoto da Lui lasciato è incolmabile ma il ricordo permanece vivissimo in coloro che Gli furono vicini e che ora più che mai valutano quanto grande sia stata la Sua perdita e traggono dalla memoria Sua, l'esempio per continuare, sia pure più modestamente, ma con la stessa fede, la Sua illuminata opera.

#### NOTE BIOGRAFICHE

Nato a Padova il 16 aprile 1878.

Morto a Milano il 9 dicembre 1954.

Laureato in Chimica a Padova nel 1900 con 110/110 lode.

Assistente nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Padova dal 1900 al 1906.

Vincitore di una Borsa Ministeriale per perfezionamento all'estero nel 1902.

Libero Docente in Chimica Generale nel 1903.

Incaricato di Elettrochimica dal 1903 al 1906.

Aiuto nell'Istituto di Chimica Generale di Pisa dal 1906 al 1909.

Professore ordinario di Chimica Tecnologica alla Scuola Ingegneri di Palermo dal 1910 al 1920.

Incaricato di Chimica Analitica dal 1910 al 1920 a Palermo.

Professore ordinario di Chimica Applicata alla Scuola Ingegneri di Bologna dal 1920 al 1927; incaricato di Chimica Industriale, fondatore e Direttore della Scuola Superiore di Chimica Industriale di Bologna dal 1922 al 1927.

Membro del Consiglio Superiore delle Miniere dal 1927.

Fondatore e Primo Direttore della Stazione Sperimentale per i Combustibili (dalla origine 1926).

Professore ordinario di Chimica Industriale e Direttore dell'Istituto di Chimica Industriale dal 1927 al 1938 e dal 1945 al 1953 al Politecnico di Milano.

Fondatore e Direttore dei Corsi di Perfezionamento per l'Industria del Gas e di Termotecnica (1927-1938).

Incaricato dell'insegnamento di Chimica Industriale a Losanna per gli studenti Italiani rifugiati nel 1944-1945.

Membro del Comitato Nazionale Chimico presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Presidente della Stazione Sperimentale per i Combustibili (1945-1954).  
Presidente della Società Chimica Italiana (1949-1954).  
Socio Corrispondente (1923) e poi Nazionale della Accademia dei Lincei (1947).  
Socio dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.  
Socio della Società di Scienze Naturali di Palermo.  
Socio onorario della Accademia delle Scienze di Bologna.  
Membro d'onore della Chemical Society di Londra.  
Membro d'onore della Société de Chimie Industrielle.

## PUBBLICAZIONI

1. - *Sopra l'elettrostrizione degli ioni in solventi organici* (con G. CARRARA), «Gazzetta Chimica Italiana», 30, II, 197-217 (1900).
2. - *Contributo allo studio della dissociazione in soluzioni colloidali*, Ibidem, 30, II, 64-70 (1900).
3. - *Sul potere rotatorio del quarzo alla temperatura dell'aria liquida*, «Atti R. Istituto Veneto» (1901).
4. - *Sull'energia basica dell'ossido di argento in soluzione*, «Gazzetta Chimica Italiana», 31, II, 1-3 (1901).
5. - *Assorbimento dei gas in solventi organici ed in soluzioni di solventi organici*, Ibidem, 31, II, 513-41 (1901).
6. - *Sui coefficienti di temperatura della conducibilità elettrica delle soluzioni in acqua e solventi organici. Influenza della sopraffusione e del massimo di densità* (con G. CARRARA), «Gazzetta Chimica Italiana», 32, II, 36-53 (1902).
7. - *Sopra l'acido fosfomolibdico* (con E. SPELTA), «Gazzetta Chimica Italiana», 33, 207-226 (1903).
8. - *Contributo allo studio della preparazione elettrolitica dei persolfati*, «Z. f. Elektrochemie», 9, 427-28 (1903), «Gazzetta Chimica Italiana», 33, II, 81-89 (1903).
9. - *L'insegnamento della chimica nei politecnici tedeschi con speciale riguardo agli insegnamenti della chimica tecnologica e dell'elettrochimica*, «Industria Chimica», 1904.
10. - *Alcune elettrolisi in acetone ed in piridina* (con M. VOGHERA), «Gazzetta Chimica Italiana», 35, I, 277-90 (1905).
11. - *Sopra la passività del nichel*, «Gazzetta Chimica Italiana», 35, I, 391-405 (1905).
12. - *La funzione del catalizzatore nel processo Deacon per la preparazione del cloro* (con V. BETTONI). Nota I, «Gazzetta Chimica Italiana», 35, I, 320-42 (1905).
13. - *Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti* (con M. VOGHERA), «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 14, II, 433-43 (1905); ibidem, 15, I, 322-28 (1906); ibidem, 15, I, 363-69 (1906); «Gazzetta Chimica Italiana», 36, II, 531-57 (1906).
14. - *Sulla radioattività dei soffioni boraciferi della Toscana e sulla quantità di emanazione in essi contenuta* (in collaborazione con R. NASINI e F. ANDERLINI), «Gazzetta Chimica Italiana», 37, I, 218-26 (1907); «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 14, II, 70-6 (1905).
15. - *Ulteriori ricerche sopra la funzione del catalizzatore nel processo Deacon* (con M. VOGHERA). Nota II, «Gazzetta Chimica Italiana», 36, I, 513-34 (1906).
16. - *Radioattività della sorgente di Fiuggi presso Anticoli* (con R. NASINI) «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 15, I, 307-8 (1906).
17. - *Radioattività di alcuni prodotti vulcanici dell'ultima eruzione del Vesuvio (aprile 1906) e confronto con quelle di materiali più antichi* (con R. NASINI), «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 15, II, 391-97 (1906).
18. - *Sopra la composizione dei persolfati* (con E. MIGLIORINI), «Gazzetta Chimica Italiana», 36, II, 599-619 (1906).

19. - *Sul potere rotatorio del quarzo alla temperatura dell'aria liquida a proposito di una recente memoria del Dott. U. Panichi*, «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 15, II, 492-93 (1906).
20. - *Ossidazioni elettrolitiche in presenza di fluorioni* (con F. AGENO), Ibidem, 549-56 (1906); 615-20 (1906) e «Gazzetta Chimica Italiana», 37, I, 368-80 (1907).
21. - *Sopra l'ossidazione dell'ammoniaca nel persolfato ammonico* (con E. MIGLIORINI), «Gazzetta Chimica Italiana», 36, II, 599 (1906).
22. - *Sulla preparazione dell'acido cloridrico per sintesi degli elementi* (con E. MIGLIORINI), Ibidem, 37, II, 122-34 (1907).
23. - *La fabbricazione tecnica del borace*, Ibidem, 37, II, 562-77 (1907).
24. - *Recensione di lavori italiani per il Phisikalisch-Chemisches Central Blatt durante gli anni 1904-1906*.
25. - *Studi chimico-fisici sulla sorgente di Fiuggi* (con R. NASINI), «Gazzetta Chimica Italiana», 38, I, 190-216 (1908).
26. - *Azione dei metalli sopra le soluzioni acquose dei persolfati* (con E. MIGLIORINI e G. ERCOLINI), Ibidem, 38, I, 583-602 (1908).
27. - *Sopra l'ozonizzazione dell'aria per azione dei sali e dell'emanazione di radio* (con R. NASINI), «Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 17, II, 46-49 (1908) e «Gazzetta Chimica Italiana», 38, II, 615-18 (1908).
28. - *Comparsa della radioattività in materiali attivi vulcanici dell'ultima grande eruzione vesuviana* (con R. NASINI), «Atti Rend. Acc. Lincei», Roma [5], 17, II, 435-37 (1908).
29. - *Radioattività di rocce e di altro materiale dell'isola d'Ischia* (con R. NASINI), Ibidem, Roma [5], 17, II, 432-34 (1908).
30. - *Radioattività di alcune emanazioni gassose italiane* (con R. NASINI), Ibidem [5], 17, II, 551-53 (1908).
31. - *Sopra alcuni borati elettrolitici* (con S. CASTELLANI), «Atti Rend. Accad. Lincei», Roma [5], 17, II, 613-17 (1908).
32. - *Sopra alcune reazioni elettrolitiche provocate da ioni di zolfo* (con E. MIGLIORINI), «Gazzetta Chimica Italiana», 89, I, 110-120 (1909).
33. - *Indagini chimico-fisiche e analisi dell'acqua ferrico-arsenicale di Roncigno* (con R. NASINI e F. AGENO), Ibidem, 39, II, 481-512 (1909).
34. - *La reazione tra cloruro sodico ed acido borico e la sua applicazione tecnica* (lavoro premiato dalla Commissione del VII Congresso Internazionale di Chimica Applicata), «Atti del VII Congresso di Chimica Applicata», Londra 1909.
35. - *Nuovi studi sulla preparazione tecnica del borace* (con S. CASTELLANI), «Gazzetta Chimica Italiana», 40, I, 138-76 (1910).
36. - *Sopra la radioattività di prodotti italiani* (con R. NASINI), Ibidem, 40, II, 101-22 (1910).
37. - *Nuovi studi sulla preparazione del borace* (con O. GARAVINI), Ibidem, 41, I, 756-81 (1911).
38. - *Brevetto riguardante un metodo di fabbricazione elettrolitica del borace*, N. 81357.
39. - *Brevetto di apparecchio per fabbricare acido cloridrico puro per sintesi* (con E. MIGLIORINI), N. 85175.
40. - *Corso di Chimica Tecnologica*, vol. I, 1910-1911, Palermo, Tipografia Gazzetta Commerciale.
41. - *Corso di Chimica Tecnologica*, vol. II, 1911-1912, Palermo, Tipografia G. Castiglia.
42. - *Corso di Chimica Tecnologica*, vol. III, 1912-1913, Palermo, Tipografia Colonia S. Martino.
43. - *Considerazioni sopra l'insegnamento della Chimica negli Istituti superiori con speciale riguardo a quello della Chimica Tecnologica*, Torino, «Industria Chimica», 1913.
44. - *Sopra la decomposizione dei formiati in relazione alla preparazione tecnica dell'idrogeno* (con A. PIVA), «Annali di Chimica Applicata», 1, 1-24 (1914).
45. - *Sui metodi di analisi degli zolfi*, Ibidem, 2, I, 9-31 (1914) e 3, 9-31 (1915).
46. - *Le industrie italiane minerarie e chimiche dei prodotti inorganici*, Ibidem, 5, 142-60 (1916).

47. - *Relazione sulle principali officine da gas d'Italia: confronti e proposte per quella di Palermo* (con E. MANZELLA), Palermo, 1916.
48. - *Ulteriori ricerche intorno al problema dell'idrogeno dai formiati e dall'ossido di carbonio* (con A. PIVA), «Annali di Chimica Applicata», 5, 271-301 (1916).
49. - *Zolfi grezzi per la lotta contro l'oidio*, «La Viticoltura moderna», Palermo 1917.
50. - *Per l'industria dei sali potassici e del bromo*, «Atti Comitato Industriale Chimico presso il Ministero dell'Industria», 1917.
51. - *Per l'industria dei sali potassici e del bromo*, Ibidem.
52. - *Per l'inaugurazione dell'Istituto Superiore Commerciale Coloniale di Palermo*, Anno I, 1920.
53. - *Per l'inaugurazione dell'Istituto Superiore Commerciale Coloniale di Palermo*, Anno II, 1920.
54. - *Inaugurandosi a Bologna la Scuola Superiore di Chimica Industriale. Discorso inaugurale*, Bologna, 1922.
55. - *Sopra la formazione di idrocarburi da ossido di carbonio e da formiati*, «Giornale di Chimica Industriale ed Applicata», 4, 302 (1922).
56. - *Il Congresso e l'Esposizione Internazionale dei combustibili liquidi di Parigi. - Note, impressioni, considerazioni*, 4-573 (1922).
57. - *Gassificazione e distillazione dei combustibili* (con D. MENEGHINI) - Volume: *Relazione e Studi del Comitato Tecnico per l'utilizzazione dei combustibili nazionali*, Ministero Agricoltura, Roma 1923.
58. - *Contributi al problema della fabbricazione della barite dal carbone di bario* (con R. NASINI), «Atti I Congresso Nazionale di Chimica pura e applicata», 1923, 278-82, Bologna.
59. - *Distillazione a bassa temperatura di combustibili nazionali* (con C. PADOVANI), «Atti I Congresso Nazionale di Chimica», 1923, 249-56, Bologna.
60. - *Il problema italiano dei combustibili*, Ibidem, Roma 1923.
61. - *La questione del carburante in relazione con le nostre risorse di combustibili nazionali*, «Atti del Congresso Nazionale di Chimica Industriale», 1924, 164-71, Bologna.
62. - *Sul processo Bergius per l'idrogenazione di olii pesanti*, «L'Industria», vol. 38, n. 13 (1924).
63. - *Studi e ricerche sui combustibili italiani. Nota I* (con C. PADOVANI), «Annali di chimica applicata», 14, 315-59 (1924).
64. - *Sull'aumento di resistenza dei conglomerati cementizi per trattamento con zolfo fuso* (con A. TERNI), «Atti II Congresso di Chimica pura e applicata», Palermo, 797-809 (1926).
65. - *Studi e ricerche sulle ligniti di Valdarno* (con C. PADOVANI), Ibidem, Palermo, 556-600 (1926).
66. - *Sull'ottenimento di carburanti da olii e petroli densi italiani* (con C. PADOVANI e A. AMATI). Ibidem, 530-55 (1926).
67. - *Il problema italiano dei combustibili*, «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», Bologna 1926.
68. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. I, «Associazione Italiana di Chimica», Roma, 1927.
69. - *Studio sulla lignite di Ribolla* (con C. PADOVANI), «Annali di Chimica Applicata», 17, 491-512 (1927).
70. - *Notizie sullo stato attuale degli studi sui combustibili in Germania e in Francia* (con C. PADOVANI), «Giornale di Chimica Industriale e Applicata», 9, 411-19 1927.
71. - *L'Istituto di Chimica Industriale del nuovo Politecnico di Milano*, «Industria Mineraria», 1927.
72. - *Studio sul carbone dell'Arsa* (con C. PADOVANI), «Annali di Chimica Applicata», 18, 245-72 (1928).
73. - *Lo stato attuale del problema dei combustibili*, «Giornale di Chimica Industriale ed Applicata», Anno 9, 143-485 (1928).
74. - *Poche parole sul problema dei carburanti in Italia*, «Atti Congresso Mondiale dell'automobile», Roma, 1928.



75. - *La scuola per l'industria del gas nel Politecnico di Milano*, « Industria Gas e acquedotti », anno XVII, n. 11, novembre 1928.
76. - *Fuel research and fuel economy in Italy* (con C. PADOVANI), Trans Fuel conference, « Congresso mondiale dell'energia », Londra, 1928, 1, 192-98 (1929).
77. - *Lo sviluppo degli studi sui combustibili*, « Atti III Congresso Nazionale di Chimica pura e applicata », 171-88 (1930).
78. - *Studi e ricerche sopra i gas naturali italiani* (con C. PADOVANI), Ibidem, 688-717 (1930).
79. - *Sintesi di idrocarburi a pressione ordinaria da miscele di ossido di carbonio e di idrogeno* (con C. PADOVANI e M. BUSI), Ibidem, 718-29 (1930).
80. - *Confronto nel comportamento all'azione termica delle rocce di Ragusa e di quelle dell'Abruzzo* (con G. COLLINA), Ibidem, 740-52 (1930).
81. - *Ricerche sull'agglomerazione dei combustibili* (con C. PADOVANI e F. CARDIA), Ibidem, 753-66 (1930).
82. - *Ricerche sopra il catrame primario industriale della lignite di Valdarno* (con C. PADOVANI e I. UBALDINI), Ibidem, 767-77 (1930).
83. - *Sull'idrogenazione dei combustibili* (con C. PADOVANI e A. MARIOTTI), « Annali di Chimica Applicata », 20, 361-404 (1930).
84. - *Études sur les combustibles en Italie*, « Chimie et Industries », 23, 811-24 (1930).
85. - *Studien über die Italienischen Brennstoffe* (con C. PADOVANI), « II Conferenza mondiale dell'energia », Berlino, 6, 36-59 (1930).
86. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. II, Roma 1930.
87. - *Studi e ricerche sui gas naturali italiani. II* (con C. PADOVANI e M. BUSI), « Annali di Chimica Applicata », 21, 245-58 (1931).
88. - *Studi e ricerche sui gas naturali italiani. III* (con C. PADOVANI e M. BUSI), Ibidem, 22, 380-392 (1932).
89. - *Esperienze di cracking e di idrogenazione catalitica sull'olio di Ragusa in apparecchio a funzionamento continuo* (con C. PADOVANI e A. MARIOTTI), Ibidem, 22, 157-75 (1932).
90. - *Distillazione sottopressione di combustibili italiani solidi a bassa temperatura* (con I. UBALDINI), Ibidem, 22, 329-40 (1932).
91. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. III, Roma (1930-1931).
92. - *Studi sui gas naturali italiani* (con C. PADOVANI e M. BUSI), « Annali di Chimica Applicata », 22, 380-92 (1932).
93. - *Un decennio di attività italiana nel campo dei combustibili*, « L'industria Chimica », « Il notiziario chimico industriale », fasc. 10 (1932).
94. - *Due grandi problemi che si assomigliano - Azoto e Petrolio*, « Rivista Realtà », 1932.
95. - *Il problema dei surrogati del petrolio*, Ibidem.
96. - RAFFAELLO NASINI, *Commemorazione*, « Gazzetta Chimica Italiana », 62, 727-45 (1932).
97. - *Gas rari e radioattività in emanazioni idrocarburate italiane* (con A. NASINI e P. DE CORI), Ibidem, 62, 799-821 (1932).
98. - *Esempio di lavorazione di un residuo di petrolio* (con I. UBALDINI e A. MARIOTTI), « Giornale asfalti, bitumi, catrami », 1932.
99. - *Studi sulle emulsioni bituminose*. Nota preliminare. Istituto Ind. per Combustibili. « Politecnico », 4, 147-55 (1932).
100. - *I gas naturali combustibili* (con C. PADOVANI), « La Ricerca Scientifica », 1932.
101. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. IV, Roma, 1932-33.
102. - *Ricerche sull'azione del cloruro di alluminio anidro su olii minerali* (con A. MARIOTTI e CIARROCCHI), « Rivista del Petrolio », 1933.
103. - *Un decennio di studi e ricerche nel campo dei combustibili*, « Studi e ricerche sui combustibili », vol. IV (1934), 1-9.
104. - *Brevetto sulla rigenerazione dei lubrificanti usati con cloruro di alluminio* (con A. MARIOTTI e I. CIARROCCHI). Brit. 413.537, 19 luglio 1934; Fr. 771.083, 29 settembre 1934; U.S.A. 2.106.010, 18 gennaio 1938.
105. - *Studi sulle emulsioni bituminose*, « Annali dei Lavori Pubblici », 1934.



106. - *Notizie e considerazioni sul problema della rigenerazione dei lubrificanti usati* (con A. MARIOTTI), « Il Calore », 4, 105-110 (1935).
107. - *La scuola per l'industria del gas nel Politecnico di Milano e la sua attrezzatura tecnica*, Periodico « Acqua e gas », anno 24, n. 3, marzo 1935.
108. - *Petrolio* (con C. PADOVANI), « Enciclopedia Treccani », 1935.
109. - *Ricerche sul comportamento dei gas in tubi in cemento-amianto* (con G. MONTI), « Acqua e Gas », 24, 250-69 1935.
110. - *Studi sul petrolio albanese* (con A. MARIOTTI), 1935.
111. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. V, Roma, 34-35.
112. - *Lo sviluppo dell'idrogenazione ad alta pressione* (con C. PADOVANI), « Atti V Congr. Naz. Chimica Pura e Applicata », Roma, 1935. Parte II, 788-97 (1936).
113. - *La mostra del carburante alla Fiera di Padova*, 1936.
114. - *Estrazione con solventi di ligniti e carboni italiani e idrogenazione degli estratti* (con E. DE BARTHOLOMEIS e F. MAGALDI), « Atti III Congresso Internazionale del Carbonio Carburante », Studi ric. Comb., 7, 22-31 (1936).
115. - *Il problema dei combustibili visto dopo le sanzioni*, « Istituto Nazionale delle Assicurazioni », 1937.
116. - *Ricerche sperimentali sui petroli dell'Irak* (con A. MARIOTTI e E. DE BARTHOLOMEIS), « Rivista Italiana del Petrolio », 5, 3-7 (1937).
117. - *Materiaux utilisés pour les canalisation* (con G. GIORDANI, G. MONTI e B. DEMCENCO), « Congresso Internazionale del Gas », Parigi, 1937.
118. - *Studio sui carburanti liquidi a base di alcool e di etere* (con S. BAYAN), Ibidem, « Studi ricerche Comb. », 6, 275-97 (1936-37).
119. - *Autarchia dei combustibili e dei carburanti*, « Il Calore », N. 11, 317-323 (1937).
120. - *Studi e ricerche sui combustibili*, vol. VI, Roma, 1938.
121. - *Echi del X Congresso Internazionale di Chimica in Roma*, « Il Calore », 1938.
122. - *Gas naturali combustibili in Italia e relative possibilità di sfruttamento* (con C. PADOVANI), « La Ricerca Scientifica », 1938.
123. - *Combustibili italiani solidi* (con H. WINTER) « Brennstoff. Chemie », 20, 144-7 (1939).
124. - *Aspetti tecnici ed umani di due grandi problemi chimici*, « Campo Universitario Italiano » Losanna, 1944.
125. - *L'industria chimica italiana e le possibilità del suo avvenire*. « Campo Universitario Italiano », Losanna, 1945; « Giorn. La Chimica e l'Industria », 1945.
126. - *Il Centro Studi di Chimica Industriale nel 1946*, « Rivista Scientifica 1947 », Id. Id. per il 1947 e 1948 e 1949, 1950, 1951, 1952.
127. - *L'industria chimica italiana e la sua ricostruzione*, « Atti Congresso per la Ricostruzione », Milano, 1946.
128. - *Il problema del Carbone Sulcis ed il progetto di una fabbrica di azotati sintetici in Sardegna*, « La rivista dei Combustibili », vol. III, fasc. 9 (settembre 1949).
129. - *L'Acc. Naz. dei Lincei: la sua storia, la sua vita*, « Realtà Nuova », febbraio 1950, p. 101.
130. - *Allocuzione inaugurale del VI Congresso Nazionale di Chimica*, Milano, 1950.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che i Colleghi Bonino, Cambi, De Marchi e Perucca, impossibilitati ad intervenire alla commemorazione del compianto Socio M. G. Levi, che avrà luogo nella presente seduta, hanno inviato messaggi di adesione, così come hanno fatto anche numerosi amici e discepoli dello Scienziato scomparso.

Il prof. Giordani dà poi la parola al Socio Giulio Natta che rievoca con commosse parole la figura e l'opera di M. G. Levi.

Il Presidente ringrazia il prof. Natta per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio M. G. Levi, presenti alla commemorazione, la espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso Collega.

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia, pervenuta indirettamente all'Accademia soltanto oggi, della morte, del Socio Nazionale Achille Russo, della Categoria V (Sezione Zoologia) e del Socio Nazionale Oscar Scarpa, della Categoria III (Sezione Chimica) e invia alla memoria dei due illustri Colleghi scomparsi il reverente saluto dell'Accademia e suo personale.

Invita quindi la Classe a designare i Colleghi che dovranno commemorare i due Soci scomparsi.

La Classe designa, per la commemorazione del prof. A. Russo il Socio Pierantoni o, in caso di sua impossibilità, il Collega Cotronei e, per la commemorazione del prof. Scarpa, lo stesso Presidente Giordani.

Il Presidente, dopo avere ricordato di essere stato allievo dello Scarpa, quando questi insegnava chimica-fisica nella Università di Napoli e di averne apprezzato le elette doti di mente e di cuore, dichiara di essere ben lieto di accettare l'incarico.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Chiarugi presenta il volume X, in due parti, di « Webbia », raccolta di scritti botanici edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze, nella quale figurano importanti studi dei proff. G. Zodda, G. Sarfatti, M. Servit, R.E.G. Pichi Sermolli, G. Moggi e G. Piovano. Di tali lavori il Socio Chiarugi segnala, in particolare, quello dello Zodda sulla flora vascolare della provincia di Teramo, che contiene, oltre alle antiche conoscenze floristiche su questo territorio, i notevoli risultati delle ricerche eseguite dall'Autore, per circa un ventennio, nelle varie zone altitudinali, dalla marittima all'alpina, del versante adriatico del Gran Sasso d'Italia; illustra poi lo studio del Moggi sulla flora del Monte Alburno (Appennino Lucano), che dimostra come tale flora abbia un carattere prevalentemente mediterraneo.

leggermente alterato dalla presenza di specie continentali centro-europee, con un notevole influsso di elementi orientali (balcanici), che sta a dimostrare quanto accentuato sia il legame floristico delle regioni mediterranee d'Italia con la penisola balcanica e come nei massicci montuosi dell'Italia meridionale si ritrovino testimonianze delle molteplici correnti floristiche che nel passato geologico hanno popolato le terre circummediterranee. Il Socio Chiarugi presenta poi il volume VI di «Caryologia», nel quale sono pubblicati risultati di ricerche originali di citologia, di cito-sistematica e di genetica su piante e animali; e, a nome anche del Collega Montalenti, presenta inoltre la parte I del Supplemento al citato volume, contenente gli Atti del IX Congresso Internazionale di Genetica, svoltosi a Bellagio (Como) dal 24 al 31 agosto 1953, che ebbe un notevole successo, sia per la partecipazione di ben 863 studiosi rappresentanti 39 nazioni, sia per il numero considerevole delle comunicazioni e relazioni scientifiche che raggiunsero un totale di 380. La prima parte del Supplemento, che comprende le relazioni, è stata pubblicata grazie al generoso contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, al quale il Socio Chiarugi desidera esprimere la sua gratitudine, anche a nome del Comitato organizzatore del Congresso.

Il predetto Socio presenta, infine, un suo lavoro, estratto dal «Nuovo Giornale Botanico Italiano» n. s., vol. LX, n. 4, dal titolo «Le date di fondazione dei primi Orti Botanici del mondo» e lo illustra, mettendo in evidenza che, per quanto concerne la vecchia e dibattuta questione della priorità di fondazione tra gli Orti di Pisa e quello di Padova, si può ormai affermare, sulla scorta dei documenti d'archivio e con la valutazione critica degli argomenti dell'antica polemica circa la loro esatta cronologia, che l'Orto Botanico accademico più antico è quello di Pisa, che risale all'estate del 1543, mentre quello di Padova fu fondato il 7 luglio 1545. Seguono gli Orti Botanici di Firenze (1° dicembre 1545) e di Bologna (1568).

La creazione dell'Orto Botanico Pisano a servizio dell'insegnamento è una delle grandi benemeritenze della Casa dei Medici e precisamente di Cosimo de' Medici; alla stessa dinastia si deve anche, per opera di Giovanni de' Medici (Leone X) fin dal 1513 a Roma, l'istituzione dell'insegnamento dei Semplici (Lectura Simplicium o Materia Medicinale), separata dagli altri insegnamenti della medicina, cioè l'istituzione di una cattedra di storia naturale dei medicamenti, da cui, per successive dicotomie, sono derivate in molte università (Pisa, Padova, ecc.), le cattedre pertinenti ai vari rami della Storia Naturale e della Materia Medica.

Il Socio Chiarugi conclude, mettendo in evidenza che le due idee basilari che costituirono la premessa per lo sviluppo della moderna Botanica sono glorie esclusive di quella dinastia illuminata, che nel mondo occidentale fece di Firenze l'erede di Atene.

Il Socio Puntoni presenta il 3° e il 4° volume degli Atti del VI Congresso Internazionale di Microbiologia, svoltosi a Roma dal 6 al 12 settembre 1953, che raggruppano rispettivamente le Sezioni 8ª, 9ª e 10ª (virus degli

animali -- virus dei vegetali -- batteriofagi) e 11<sup>a</sup> e 12<sup>a</sup> (Rickettsiae -- Schizomiceti).

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato le opere in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in dono all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Severi, Cassinis, Tonzig, Segre, Armellini, Pupilli, D'Ancona, Fantappiè e Pensa.

Il Socio Zagar presenta una Memoria di M. Hack, dal titolo « Studio dell'atmosfera della cefeide F. F. Aquilae ».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso prof. Zagar e dal Socio Abetti.

La Memoria sarà sottoposta al Consiglio di Presidenza per l'approvazione della spesa.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

FANTAPPIÈ L. -- Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota II.

CAPUTO M. -- Sulla legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi dovuti all'imperfetto allineamento delle spranghe (pres. dal Socio G. CASSINIS).

FORTINI T. -- Sopra la BM Orionis (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

MARRÈ E. e ARRIGONI O. -- Ulteriori ricerche sull'azione inibente dell'auxina nei confronti dell'ossidasi dell'acido ascorbico (pres. dal Socio S. TONZIG).

ZORZOLI G. C. -- Ricerche istochimiche sul pigmento delle cellule nervose del « Talamus opticus » di uomo (pres. dal Socio A. PENSA).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 16 aprile 1955.

- AIAZZI-MANCINI Mario e PEPEU Giancarlo. — *Studio tossicologico del Parathion presente nell'olio di oliva di uso alimentare*. Rassegna critica e ricerche sperimentali. Estr. da «Archivio Italiano di Scienze Farmacologiche», s. 3<sup>a</sup>, vol. V.
- BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F. — *Progress report, Seismological Laboratory, California Institute of Technology*, 1953. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXV, 1954, n. 6.
- CHAIN Ernest Boris. — *Otto lezioni di introduzione al metabolismo intermedio dei carboidrati*. Roma, Fondazione Emanuele Paternò, 1954. Pp. 126, in-8°, con figg. (Istituto Superiore di Sanità).
- CHIARUGI Alberto. — *Le date di fondazione dei primi Orti Botanici del mondo: Pisa (estate 1543); Padova (7 luglio 1545); Firenze (1 dicembre 1545)*. Estr. da «Nuovo Giornale Botanico Italiano», n. s., vol. LX, 1953, n. 4.
- CONGRESSO (IX) INTERNAZIONALE DI GENETICA. BELLAGIO (COMO), 24-31 AGOSTO 1953. — *Atti*. P. I. Firenze, Officina Tipografia Fiorentina, 1954, Pp. 619-IX, in-8°, con figg. e tavv. (Supplemento al vol. VI di «Caryologia»).
- CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. — *Relazioni*. Roma, Fondazione Emanuele Paternò, 1953. Voll. 6, in-8°, con figg. (Supplemento ai «Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità»).
- CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. ROMA, 6-12 SETTEMBRE 1953. — *Atti*. Vol. III, sezioni VIII-X, nn. 1-162; vol. IV, sezioni XI-XII, nn. 1-110. Roma, 1955. Voll. 2, in-8°, con figg.
- DIX Hewitt C. — *The method of Cagniard in seismic pulse problems*. Estr. da «Geophysics», vol. XIX, 1954, n. 4.
- GUTENBERG Beno. — *Effects of low-velocity layers*. Estr. da «Geofisica Pura e Applicata», vol. XXVIII, 1954.
- *Postglacial uplift in the Great Lakes Region*. Estr. da «Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie», serie A, vol. VII, 1954.
- GUTENBERG BENO. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- LANDINI Adelmo. — *Marconi sulle vie dell'etere*. La storica impresa narrata dall'Ufficiale Marconista dell'Elettra. Torino, Soc. Ed. Internaz., 1955. Pp. 148, in-8°, con tavv.
- Materiały z Konferencji Fizyków w Spale*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954. Pp. 366, in-8°.
- PEPEU Giancarlo. — Vedi: AIAZZI-MANCINI Mario e PEPEU Giancarlo.
- RICHTER C. F. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- SANDRINI Corrado. — *Prima sintesi per una analisi generale*. Venezia, Istit. Tipogr. Editor., 1954. Pp. 39, in-8°.
- TIMOSHENKO Stephen P. — *The collected papers*. London - New York - Toronto, McGraw-Hill publishing Company Ltd., 1953. Pp. xxv-642, in-8°, con figg.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *Le cause tettoniche del glacialismo*. Appendice alla Memoria: «La causa prima che fu comune a tutte le Ère Glaciali». Randazzo, Arti Grafiche Palermo e figli, 1955. Pp. 23, in-4°.
- Webbia*. Raccolta di scritti botanici. Vol. X, 1954-55.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta dell'11 maggio 1955*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geometria algebrica.** — *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali.* Nota<sup>(\*)</sup> del Socio FRANCESCO SEVERI.

1. Continuando l'argomento della precedente Nota<sup>(\*)</sup>, di cui conservo le notazioni, m'occupo ora delle equivalenze razionali, rinviando per altre specie di equivalenza alle mie Lezioni di quest'anno e alla mia Memoria dei *Commentarii helvetici*, 1948 (entrambe citate nella Nota precedente). Tre sono le possibili definizioni delle equivalenze razionali, analoghe alle  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) dell'equivalenza algebrica, considerate nella Nota precedente; e cioè:

$\alpha'$ ) Due varietà (pure, effettive o virtuali)  $\infty^k$ ,  $A$ ,  $B$ , diconsi *razionalmente equivalenti* (e si scrive  $A \equiv B$ ) se  $A - B$  uguaglia la differenza di due varietà d'un medesimo sistema razionale<sup>(2)</sup>.

A norma della  $\alpha'$ ) due varietà  $A$ ,  $B$  d'un medesimo sistema razionale son razionalmente equivalenti. Questo particolare legame d'equivalenza razionale lo indicheremo col segno  $|$ . Scriveremo cioè  $A | B$ .

$\beta'$ ) Due varietà  $A$ ,  $B$  (effettive o virtuali), sopra  $M_r$ , diconsi *razionalmente equivalenti*, se  $A | B$  oppure se  $A + C | B + C$ , ove  $C$  sia una conveniente varietà  $\infty^k$  (effettiva o virtuale).

(\*) Presentata nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche* (questi « Rendiconti », seduta del 16 aprile 1955).

(2) Un sistema razionale di varietà virtuali è la somma algebrica d'un numero finito di sistemi razionali di varietà effettive. Esso è birazionalmente equivalente al prodotto di questi, epperò è razionale.

$\gamma')$  Le varietà virtuali  $A, B$  diconsi razionalmente equivalenti se fra le differenze di varietà effettive ad esse uguali ve ne sono due,  $A = A_1 - A_2$ ,  $B = B_1 - B_2$ , tali che  $A_1 \mid B_1$ ;  $A_2 \mid B_2$ .

La  $\alpha')$  è contenuta nella mia Memoria dei «Commentarii helvetici», 1948, citata nella Nota precedente. Non avevo però ancora osservato, nel 1948, l'equivalenza della  $\beta')$  alla  $\alpha')$  (cosicché potevo ritenere che si trattasse d'un tipo più ristretto d'equivalenza).

La dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni  $\alpha'), \beta'), \gamma')$  è del tutto simile a quella dell'equivalenza delle definizioni  $\alpha), \beta), \gamma)$  (contenuta nella Nota precedente) e si ottiene sostituendo alla considerazione dei sistemi algebrici irriducibili quella dei sistemi razionali. Basta tener conto esplicito che il sistema in cui può variare la varietà  $N$ , là considerata, è razionale (mentre per la conclusione della Nota precedente bastava tener conto della algebricità e irriducibilità di tale sistema).

Le varietà singole di  $M_r$  vanno considerate quali *sistemi razionali*  $\infty^0$ . Se s'assume  $\alpha')$  per definizione, le  $\beta'), \gamma')$  divengono teoremi (condizioni necessarie e sufficienti).

OSSERVAZIONE. - Si potrebbe anche considerare un'equivalenza unirazionale, sostituendo *mutatis mutandis*, ai sistemi razionali, sopra usati, i sistemi unirazionali. Non ne vale però la pena, perché risulterà dal seguito che l'equivalenza unirazionale è una relazione identica all'equivalenza razionale. Che poi esistano sopra ogni  $M_r$  sistemi razionali (e unirazionali) di sottovarietà di dimensione  $k$  qualunque, risulterà tra breve. Sicché il tipo d'equivalenza definito può considerarsi sopra ogni varietà e per qualunque  $k$ , come accadeva dell'equivalenza algebrica.

2. Le definizioni precedenti (esposte nelle citate Lezioni) costituiscono il punto culminante di laboriose ricerche pubblicate dall'Autore sull'argomento in oltre un ventennio (dal 1925 al 1948) <sup>(3)</sup>. Tali ricerche si sono gradualmente avvicinate alla odierna definizione di equivalenza razionale (sotto una delle tre forme indicate), che, dopo tanti tentativi e esperienze, apparisce ora naturale e semplice; ma che l'Autore faticò molto a rintracciare in un terreno completamente nuovo e pieno d'insidie <sup>(4)</sup>.

La difficoltà principale, oppostasi per tanti anni alla formulazione della più opportuna definizione, è questa. Quando, sopra una varietà irriducibile  $M_r$ , si passa dalla geometria delle trasformazioni birazionali, operante soltanto sulle sottovarietà  $\infty^{r-1}$ , cioè sulle singole funzioni razionali del punto di  $M_r$ , alla geometria delle sottovarietà  $\infty^k$  ( $0 \leq k \leq r-2$ ), si capisce *a priori* che debbano in qualche modo intervenire, per costruire una teoria ad

(3) Ved. le citazioni di questi lavori alle pp. 44-45 del mio Trattato *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche tra varietà algebriche* (Lezioni raccolte da F. COFFA ed E. MARTINELLI, vol. I, Ed. Cremonese, Roma, 1942). I lavori posteriori sono citati per esempio nelle mie Lezioni litografate, cui ho alluso nella precedente Nota.

(4) A proposito delle difficoltà cui s'accenna, il prof. HODGE («Convegno Volta», Reale Accademia d'Italia, 1939) scrisse quanto segue: «The introduction of the theory of systems of equivalence by Professor Severi has provided a weapon of great power for the investigation of the algebro-geometric properties of algebraic surfaces and varieties of higher dimensions... But the difficult of formulating a suitable definition of the generalised equivalence relation, which preserves the essential properties of being symmetric, reflexive and transitive, is very considerable and the painstaking researches of Severi are among the most important contributions made to Geometry in recent years».

guata al compito, i gruppi di  $r - k$  funzioni razionali (invece delle funzioni razionali singole) e gl'invarianti birazionali ad essi inerenti.

Il guaio è che l'insieme dei sistemi (razionali) di varietà di livello delle  $(r - k)$ -ple di funzioni razionali del punto di  $M_r$ , non è un gruppo, perché, non appena  $k < r - 1$ , la somma di due tali sistemi non soltanto non costituisce, com'è ovvio, un sistema analogo; ma non è neppure contenuta totalmente in un simile sistema. Nella fase costruttiva della teoria posi la questione di sapere se effettivamente doveva escludersi in generale, com'io reputavo fin d'allora, la possibilità che la somma di due sistemi di livello appartenesse sempre totalmente ad un sistema analogo <sup>(5)</sup>. La risposta fu dipoi data, soltanto per le serie di gruppi di punti d'una superficie ( $k = 0, r = 2$ ) da Morin, il quale provò che il fatto accennato si verifica *sempre* e soltanto sulle superficie razionali e su quelle birazionalmente equivalenti alle rigate. Il problema generale è per ora insoluto; ma la risposta negativa è certa (cioè il fatto potrà al più verificarsi solamente per classi particolari di varietà, e varrebbe la pena di determinarle per ogni valore di  $k$  o di escluderne l'esistenza).

A malgrado di ciò, una teoria che, per una fissata dimensione  $k < r - 1$ , trascurasse i sistemi di varietà  $\infty^k$  di livello per  $(r - k)$ -ple di funzioni razionali, sarebbe scarsamente produttiva.

Occorre dunque ricercare se e quali rapporti possano intercedere fra tali sistemi (che sono sistemi razionali particolari) e i sistemi razionali, comunque presi su  $M_r$ . I sistemi razionali si presentano naturalmente come il fulcro della teoria, perché così accade già nel caso più semplice  $k = r - 1$ , in quanto un sistema razionale consta senz'altro delle varietà di livello d'una funzione razionale. Vano poi sarebbe di tentare di fondare la teoria addirittura sopra presunti sistemi *lineari* <sup>(6)</sup> di varietà  $\infty^k$ , perché per  $k < r - 1$  tali sistemi *non esistono* in generale. Basta a provarlo il fatto che già in un  $S_r$  la grassmanniana degli  $S_k$  ( $k < r - 1$ ) è un sistema *completo* non lineare di spazi  $S_k$ . È probabile che, ove si possano considerare sopra una  $M_r$  sistemi lineari di varietà  $\infty^k$  con  $0 \leq k < r - 1$ , la  $M_r$  sia di quelle varietà in cui simultaneamente accade che la somma di due sistemi di varietà di livello è contenuta totalmente in un sistema analogo (sono tali per esempio le varietà razionali per  $k = 0$ , ma non per  $0 < k < r - 1$ ).

Un'altra difficoltà di fondo si presenta per ottenere che i sistemi di varietà di livello delle  $(r - k)$ -ple di funzioni razionali possano divenire elementi geometrici d'una teoria fruttuosa. Data ad arbitrio una  $(r - k)$ -pla di funzioni razionali  $\varphi_i$  del punto di  $M_r$ , non sempre le equazioni  $\varphi_i = \text{cost.}$  ( $i = 1, 2, \dots, r - k$ ), sono atte a definire, per ogni gruppo di valori delle costanti, una varietà  $\infty^k$ . Può invero accadere benissimo che gli zeri comuni alle predette equazioni si distribuiscano in varietà algebriche, tra le quali ve ne siano di quelle di dimensioni  $> k$ .

In tal caso alla  $(r - k)$ -pla considerata di funzioni non può *a priori* associarsi un sistema (razionale) di varietà  $\infty^k$ , di livello per le funzioni stesse; ma tuttavia a posteriori quest'associazione può esser compiuta con una considerazione che, in una forma o in un'altra, riducesi ad un processo di limite. Di ciò passiamo ad occuparci.

3. Ecco come ho proceduto in proposito nelle mie Lezioni di quest'anno <sup>(7)</sup>.

(5) Ved. il mio volume citato, *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., pp. 37-38-39.

(6) Ricordo che una *varietà lineare* è una varietà non singolare birazionalmente equivalente senza eccezioni ad uno spazio lineare.

(7) Ma prima ancora ricorderò che la questione ultimamente accennata è risolta dalla definizione generale da me data (fin dal 1933) del simbolo d'intersezione virtuale di due o più varietà entro una  $M_r$  ambiente (che d'ora in poi bisogna supporre non singolare!), nella Memoria, *Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie* («Abhand.» di Amburgo, 1933). Ved. anche il volume *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc., pp. 7-8-13-14-15. La questione è stata ancor più ampiamente trattata in una mia Memoria in corso di stampa dal

Consideriamo all'uopo nello spazio lineare  $S_d$  di  $M_r$  i sistemi lineari di tutte le forme degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$ <sup>(8)</sup> e le varietà  $W$  comuni a  $d-l$  forme prese genericamente (una per ciascuno) nei detti sistemi. Si stabilisce (sul fondamento di classici teoremi di Bertini, relativi ai sistemi lineari di forme<sup>(9)</sup>, trasportati ai sistemi lineari d'ipersuperficie sopra una varietà algebrica irriducibile<sup>(10)</sup>), che  $W$  è irriducibile (semplice) non singolare e che ha la dimensione  $l$  e non maggiore.

Invero, una generica forma  $F^1$  d'ordine  $m_1$  è irriducibile non singolare<sup>(11)</sup> e su essa il sistema delle forme di ordine  $m_2$  sega un sistema lineare di varietà  $\infty^{d-2}$ , la cui varietà generica  $F^{12}$  è non singolare, irriducibile (semplice). Sulla generica  $F^{12}$  il sistema delle forme d'ordine  $m_3$  sega un sistema lineare di varietà  $\infty^{d-3}$ , la cui generica  $F^{123}$  è non singolare, irriducibile (semplice); e così via.

Il sistema  $\Sigma$  delle  $W_l$  è ovviamente algebrico e irriducibile, anzi unirazionale, perché una sua generica varietà è razionalmente individuata dai parametri lineari corrispondenti alle singole forme che in essa s'intersecano (semplicemente). Si verifica di più (e lo vedremo subito) che  $\Sigma$  è un *sistema razionale*.

Supponiamo all'uopo dimostrata, per un dato  $d-l \geq 2$ , l'esistenza di  $d-l$  sistemi lineari di forme degli ordini rispettivi  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$  che diano, per intersezione, il sistema  $\Sigma$ , in guisa che la generica varietà  $W_l$  di  $\Sigma$  individui una  $(d-l)$ -pla di forme tolte da quei sistemi (una per ciascuno), le quali s'intersechino (semplicemente) lungo  $W_l$ . Sicché, così stando le cose,  $\Sigma$  è razionale, essendo birazionalmente equivalente al prodotto di quei  $d-l$  sistemi lineari.

Dimostreremo nel fatto che il teorema predetto è vero per  $d-l=2$  e lo dedurremo poi per induzione da  $d-l$  e  $d-l+1$ .

Prima di ciò osserviamo che due generiche  $W_l$ , in quanto intersezioni di due  $(d-l)$ -ple generiche di forme degli ordini rispettivi  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$ , interferiscono secondo una varietà di dimensione  $d-2$  ( $d-l$ ) e non maggiore, se  $2l \geq d$  o non hanno alcun punto comune, se  $2l < d$ ; e ciò perché le  $2(d-l)$  forme di quelle  $(d-l)$ -ple sono, in ultima analisi,  $2(d-l)$  forme generiche degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$ ;  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$  di  $S_d$ . Siccome inoltre  $d-l \geq 2$ , epperò  $d-l > 1$ , risulta sempre  $l-1 > 2l-d$  e dunque due generiche  $W_l$  non possono mai avere in comune una varietà  $\infty^{l-1}$ .

titolo, *On the symbol of virtual intersection of algebraic varieties*. Nel caso dell'intersezione di più ipersuperficie (che è quello che interessa nel testo) e ai fini della equivalenza razionale, la questione era stata risolta, da un punto di vista più aderente a quello della mia Memoria del 1933, nel n. 41 (pp. 73-74-78) del volume *Serie, sistemi d'equivalenza*, ecc.

(8) Se una  $m$  compare più volte, in questa successione, il corrispondente sistema deve esser considerato altrettante volte, come se si trattasse di tanti sistemi lineari distinti.

(9) *Introduzione*, 2<sup>a</sup> ed., p. 269 e p. 265.

(10) Ved. la mia Nota *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* («Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», 1906).

(11) Ciò risulta da uno degli invocati teoremi di Bertini o dal fatto che tale è la particolare forma  $x_0^m + x_1^m + \dots + x_d^m = 0$  ( $x_0, x_1, \dots, x_d$  coordinate omogenee).



Ciò premesso, sia  $d-l=2$  ed  $F^1, F^2$  sieno due generiche forme degli ordini rispettivi  $m_1, m_2$ . Si può determinare un sistema lineare  $|F^2|$  di forme di ordine  $m_2$ , che stacchino su  $F^1$  lo stesso sistema lineare, che vi staccano tutte le forme di ordine  $m_2$ ; ed un sistema lineare  $|F^1|$  di forme d'ordine  $m_1$ , che stacchino su  $F^2$  lo stesso sistema lineare che vi staccano tutte le forme di ordine  $m_1$ . I due sistemi fissati godono allora delle stesse proprietà rispetto a due altre generiche forme di ordini rispettivi  $m_1$  ed  $m_2$  e quindi l'intersezione dei due sistemi (cioè delle coppie delle loro forme) genera lo stesso sistema, che è generato da tutte le coppie di forme degli ordini  $m_1, m_2$ . Infatti, se  $F^{12}$  è comune alle forme generiche  $\bar{F}^1, \bar{F}^2$  degli ordini  $m_1, m_2$ , poiché su  $\bar{F}^1$  le forme di  $|F^2|$  segano lo stesso sistema che vi segano tutte le forme d'ordine  $m_2$ , così per  $F^{12}$  passa una  $F^2$ ; e similmente vi passa una  $F^1$ .

Designate con  $t_1, t_2$  le dimensioni di  $|F^1|, |F^2|$ , la dimensione di  $\Sigma$  risulta dunque  $t_1 + t_2$  e gli elementi (varietà  $\infty^{d-2}$ ) di  $\Sigma$  sono in corrispondenza birazionale senza eccezioni col prodotto  $|F^1| \times |F^2|$ , perché già la varietà  $F^{12}$ , intersezione semplice delle  $F^1, F^2$  da cui siamo partiti, individua la coppia  $F^1, F^2$ , in quanto per essa passa una sola forma di  $|F^1|$  ed una sola di  $|F^2|$ . Epperò lo stesso vale per la varietà determinata da una coppia generica.

Il teorema è dunque vero per  $d-l=2$ . Ammettiamolo ora vero per  $d-l$  forme e indichiamo con  $W_l$  la varietà (irriducibile, semplice,  $\infty^l$ ) comune da una  $(d-l)$ -pla di forme degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$ . Diciamo  $|F^1|, |F^2|, \dots, |F^{d-l}|$  i sistemi lineari di cui il teorema ammesso afferma l'esistenza. Si consideri il sistema lineare segato sopra una generica  $W_l$  dal sistema lineare delle forme di ordine  $m_{d-l+1}$  e dicasi  $V_{l-1}$  la varietà generica di questo sistema. Essa, per i teoremi ricordati, è semplice, non singolare, irriducibile. Inoltre, come si è sopra avvertito, essa non è contenuta in nessun'altra  $W_l$ .

Le  $V_{l-1}$  della considerata  $W_l$  si possono inoltre immaginare segate tutte quante su  $W_l$  da un conveniente sistema lineare  $|F^{d-l+1}|$  di forme d'ordine  $m_{d-l+1}$ , cosicché per ogni  $V_{l-1}$  di  $W_l$  passa una sola  $F^{d-l+1}$ . Se poi consideriamo il sistema  $\Sigma'$  di tutte le  $V_{l-1}$  intersezioni di  $(d-l+1)$ -ple degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l+1}$ , si conclude che una generica  $V_{l-1}$  sta in una sola  $W_l$  e individua una  $F^{d-l+1}$ . La  $W_l$  a sua volta individua una  $(d-l)$ -pla  $F^1, F^2, \dots, F^{d-l}$  dei sistemi  $|F^1|, |F^2|, \dots, |F^{d-l}|$ ; sicché  $V_{l-1}$  individua la  $(d-l+1)$ -pla  $F^1, F^2, \dots, F^{d-l}, F^{d-l+1}$  dei sistemi  $|F^1|, |F^2|, \dots, |F^{d-l+1}|$ . Il teorema è pertanto dimostrato.

4. Il sistema razionale (delle  $W_l$  o delle  $V_{l-1}$ ) rientra fra quelli che (molti anni or sono) abbiamo chiamato *sistemi elementari* <sup>(12)</sup>, considerandoli però in una più generale accezione, di cui subito diremo. Qui si tratta d'un

(12) Ved. le *Serie d'equivalenza*, Cap. III, § 3 da p. 69 in poi; Cap. IV, § 3 da p. 11 in poi e le mie Memorie anteriori nel volume citato. Ved. altresì la Memoria dei «*Commentarii mathematici helvetici*», 1948, ove la teoria è riassunta.

particolare sistema elementare dello spazio lineare  $S_d$ . Ma questo sistema dà luogo ad un sistema elementare sopra  $M_r$ , nel modo che passiamo ad indicare.

Supposto  $d - l = r - k$ , consideriamo l'intersezione  $\infty^k$  d'una generica  $W_l$  con  $M_r$ . È una varietà semplice, irriducibile non singolare. Invero, i sistemi  $|F^1|, |F^2|, \dots, |F^{r-k}|$  posson essere scelti in  $S_d$  in modo che sieno soddisfatte le condizioni precedenti e che nessuno di essi contenga una forma passante per  $M_r$ , non essendoci incompatibilità alcuna nel complesso delle condizioni considerate, poichè, come subito si riconosce, esse non sono soddisfatte soltanto per *particolari* scelte di quei sistemi.

Pertanto i sistemi  $|F^1|, |F^2|, \dots, |F^{r-k}|$  segano su  $M_r$  altrettanti sistemi lineari  $|A^1|, |A^2|, \dots, |A^{r-k}|$  d'ipersuperficie, di dimensioni  $t_1, t_2, \dots, t_{r-k}$ , uguali a quelle dei sistemi seganti, per i quali si può ripetere, *mutatis mutandis*, il ragionamento fatto in  $S_d$  pei sistemi  $|F|$ ; e si conclude, similmente, che la varietà intersezione  $V_k$  dei sistemi  $|A|$ , cioè delle  $(r - k)$ -ple formate con le loro ipersuperficie (una per ciascuno), è semplice, irriducibile, non singolare.

Il sistema elementare, che così s'ottiene su  $M_r$ , si dirà anche sopra  $M_r$  un *sistema elementare proiettivo d'indici*  $m_1, m_2, \dots, m_{r-k}$  (come quello di  $S_d$ , da cui proviene) per ricordarne il modo di costruzione, invariante per trasformazioni omografiche. Tale sistema è razionale, perchè, avendo la medesima dimensione  $t_1 + t_2 + \dots + t_{r-k}$  del sistema segante delle  $W_l$ , trovasi in corrispondenza birazionale con questo. Riassumendo:

*Un sistema elementare proiettivo (razionale) di varietà  $\infty^k$  sopra  $M_r$  è ivi segato dalla variabile  $W_l$  ( $l = d + k - r$ ) intersezione completa di  $d - l$  forme generiche degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{d-l}$  dell'ambiente lineare  $S_d$  di  $M_r$ .*

Chiameremo *sistema elementare semplice* di varietà  $\infty^k$  sopra  $M_r$  un sistema intersezione di  $r - k$  sistemi lineari di ipersuperficie, quando una varietà  $\infty^k$  comune ad una  $(r - k)$ -pla generica d'ipersuperficie di quei sistemi è irriducibile (semplice) o a tale si riduce facendo astrazione da una varietà  $\infty^k$  (irriducibile o riducibile), che si voglia eventualmente in essa includere e che appartenga ad una varietà base, di dimensione  $\geq k$ , comune ai sistemi lineari segantisi.

I sistemi elementari proiettivi sono particolari sistemi semplici (la cui varietà generica non ha parti fisse).

L'includere od escludere le parti fisse è quanto si deve similmente fare pei sistemi lineari singoli d'ipersuperficie, i quali sono *invarianti soltanto a condizione che sopra ogni trasformata birazionale di  $M_r$  le eventuali parti fisse si convenga di escluderle o di includerle tutte (con convenzione uniforme)*. Se si vuol tralasciare questa convenzione, si debbono definire *linearmente equivalenti* due ipersuperficie che appartengano al medesimo sistema lineare proiettivo (segato cioè da un sistema lineare di forme dell'ambiente) o a tali si riducano con l'aggiunta d'una stessa ipersuperficie.

Ciò è reso necessario dal fatto che una trasformazione birazionale può far apparire o sparire una componente fissa,  $\infty^{-1}$ , nel caso di sistemi lineari singoli;  $\infty^k$ , nel caso di una  $(r-k)$ -pla di sistemi lineari, che sia, nell'un caso e nell'altro, eccezionale per la trasformazione.

Con tale convenzione i singoli sistemi lineari epperò *i sistemi elementari semplici son invarianti per ogni trasformazione birazionale della varietà.*

Le varietà singole  $\infty^k$  irriducibili appariscono come *sistemi elementari semplici di dimensione zero.*

Mediante i sistemi elementari semplici arriviamo ora ad un tipo di equivalenza, che poi si dimostra coincidere con l'equivalenza razionale.

Aggiungiamo però prima un'osservazione, di scarso rilievo, in quanto, come già dicemmo, l'equivalenza unirazionale coincide (in virtù d'un teorema che tra poco ricorderemo) con l'equivalenza razionale.

Poiché  $M_r$  contiene sistemi razionali (di dimensione comunque grande), cioè sistemi birazionalmente equivalenti a spazi lineari (di dimensione comunque grande) e negli spazi lineari di sufficiente dimensione esistono varietà unirazionali (di dimensione  $\geq 3$ ), ne segue che su  $M_r$ , qualunque essa sia, esistono sistemi unirazionali di varietà  $V_k$  (se non altro quelli contenuti in sistemi razionali).

5. Ciò premesso, consideriamo l'insieme di tutte le possibili somme algebriche di un numero finito di sistemi elementari semplici. Ciascun elemento di quest'insieme è ovviamente un sistema razionale di varietà virtuali. Poiché la somma di due varietà virtuali appartenenti ciascuna ad un elemento del detto insieme appartiene ad un elemento dello stesso insieme, tutte queste varietà virtuali formano un gruppo abeliano, sottogruppo del gruppo dell'uguaglianza (n. 1 della Nota precedente), e si possono perciò assumere come zeri relativi di un *tipo T di equivalenza*, che dimostreremo fra breve coincidere con l'equivalenza razionale.

6. Ma prima sciogliamo la riserva relativa al caso (n. 2) in cui alla  $(r-k)$ -pla  $A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$  non può associarsi una determinata varietà  $\infty^k$  senza un conveniente processo (di limite). Prescindendo (in questa prima trattazione) dal concetto d'intersezioni virtuali delle varietà, nelle mie Lezioni ho proceduto come segue.

Siano  $|A^1|, |A^2|, \dots, |A^{r-k}|$   $r-k$  sistemi lineari d'ipersuperficie sopra  $M_r$ , che s'intersechino in un sistema elementare semplice  $\Sigma$ , la cui varietà consti di una componente fissa eventuale  $U_k$  e della parte irriducibile semplice  $V_k$  (generalmente variabile). Siano  $m_1, m_2, \dots, m_{r-k}$  gli ordini di quei sistemi lineari e  $\bar{\Sigma}$  sia, sopra  $M_r$ , il sistema elementare proiettivo d'indici  $m_1, m_2, \dots, m_{r-k}$ , intersezione dei sistemi lineari  $|\bar{A}^1|, |\bar{A}^2|, \dots, |\bar{A}^{r-k}|$  segati su  $M_r$  dalle forme degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{r-k}$  dello  $S_d$ . Indicheremo la generica varietà semplice, irriducibile, non singolare  $W_k$ , che descrive  $\bar{\Sigma}$ , col simbolo  $\bar{W}_k = \bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$ , per ricordare ch'essa è intersezione (semplice) delle  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$ . Siccome fra le  $(r-k)$ -ple  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$  vi sono le par-

ticolari  $(r-k)$ -ple  $A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$ , la varietà  $U_k + V_k$  farà parte d'una varietà particolare (totale) di  $\bar{\Sigma}$ . Sia complessivamente  $\bar{W}_k = \bar{U}_k + U_k + V_k$  una varietà totale di  $\bar{\Sigma}$ , comune alle  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$ , ove  $\bar{U}_k$  appartiene essa pure, come  $U_k$ , alla varietà base comune dei sistemi lineari  $|A|$ . Porremo allora  $W_k = A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$ , anche se nel fatto l'interferenza delle  $A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$  non è tale da poter individuare  $W_k$ . La conclusione è che:

*Ogni sistema elementare semplice è totalmente contenuto, a meno di una eventuale varietà fissa (irriducibile o riducibile), in un sistema elementare proiettivo.*

Questa proposizione trova riscontro nella teoria dei sistemi lineari di ipersuperficie (caso particolare d'un sistema elementare:  $k = r-1$ ) in un teorema del tutto simile.

Supponiamo ora, più in generale, che i sistemi  $|A^1|, \dots, |A^{r-k}|$  siano arbitrari su  $M_r$ , sicché non si sappia neppure se il simbolo  $A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$  possa rappresentare, almeno parzialmente, una varietà  $\infty^k$ .

Consideriamo, come prima, il sistema elementare proiettivo  $\bar{\Sigma}$ , intersezione dei sistemi lineari  $|\bar{A}^1|, \dots, |\bar{A}^{r-k}|$  che contengono rispettivamente i sistemi lineari  $|A|$  degli stessi ordini.

Le  $(r-k)$ -ple generiche  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$  (cioè incontrantisi in una  $W_k$  semplice, irriducibile) situate in un intorno d'ampiezza *decrecente* d'una particolare  $(r-k)$ -pla  $A^1, A^2, \dots, A^{r-k}$ , entro la varietà di Segre di tutte le  $(r-k)$ -ple  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^{r-k}$ , hanno in comune almeno un elemento d'accumulazione<sup>(13)</sup>. Cioè gl'insiemi di varietà  $\bar{W}_k$  di  $\bar{\Sigma}$ , corrispondenti ai simboli  $\bar{A}^1 \dots \bar{A}^{r-k}$  dell'intorno di  $A^1 A^2, \dots, A^{r-k}$ , hanno in comune almeno una varietà totale  $W_k$ , che associeremo al simbolo  $A^1 A^2, \dots, A^{r-k}$ . Così, ad ogni tal simbolo viene associato una  $W_k$  o un insieme di  $W_k$  e al variare del simbolo, ossia della  $(r-k)$ -pla scelta nei sistemi  $|A|$ , si perviene ad un insieme o sistema  $\Sigma$  di  $W_k$  totali di  $\bar{\Sigma}$ , che si chiamerà il *sistema elementare (in senso lato)* intersezione dei sistemi lineari  $|A^1|, \dots, |A^{r-k}|$ .

Se tutte le varietà del sistema  $\Sigma$  hanno una varietà  $\infty^k$  (irriducibile o riducibile)  $U_k$ , comune, si potrà, se si vuole, astrarre da questa e definire come sistema elementare in senso lato il sistema delle varietà  $V_k = W_k - U_k$ .

Un sistema elementare (come abbiamo detto) può anche esser definito mediante una  $(r-k)$ -pla di funzioni razionali  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-k}$  del punto di  $M_r$ , ciascuna funzione potendo eventualmente esser combinazione lineare di più funzioni razionali linearmente indipendenti.

I sistemi lineari che definiscono il sistema elementare sono in tal caso i sistemi  $\varphi_1 = \text{cost.}, \varphi_2 = \text{cost.}, \dots, \varphi_{r-k} = \text{cost.}$ , sicché il sistema elementare viene ad essere un insieme di varietà di livello costante di una  $(r-k)$ -pla di funzioni razionali del punto di  $M_r$ .

(13) Per un teorema di Bolzano generalizzato. Ved. la mia Nota, *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*. («Annales de la Société polonaise de mathématiques», 1930, n. 3).



Le eventuali varietà fisse sono varietà d'indeterminazione per le funzioni razionali stesse.

Siccome, data una funzione razionale, come  $\varphi$ , il sistema lineare delle sue ipersuperficie di livello è determinato soltanto a meno d'un'ipersuperficie d'indeterminazione (cioè fissa), così, data la  $(r-k)$ -pla di funzioni razionali, il sistema elementare associato è definito a meno di eventuali componenti fisse. In conclusione:

*Ogni sistema elementare (semplice o generalizzato) è definito, a meno di eventuali componenti fisse, dalle varietà di livello di una  $(r-k)$ -pla di funzioni razionali del punto di  $M$ , ed è contenuto totalmente (sempre a meno di eventuali componenti fisse) in un sistema elementare proiettivo.*

Il tipo T d'equivalenza può esser dunque ottenuto anche a mezzo dei sistemi elementari (in senso lato) come nella mia definizione originaria <sup>(14)</sup>.

7. La conclusione, cui tendiamo, che cioè il tipo T coincide col tipo d'equivalenza razionale, definito nel n. 1, è immediato corollario del teorema fondamentale seguente <sup>(15)</sup>:

*Sopra una varietà irriducibile  $M$ , ogni sistema unirazionale (in particolare razionale) è una somma algebrica di sistemi elementari.*

Così è anche dimostrato, quanto avevamo asserito nell'Oss. del n. 1, che cioè l'equivalenza unirazionale coincide con l'equivalenza razionale.

Perché poi sia *necessario* di collegare l'equivalenza razionale ai sistemi elementari, mentre ci si potrebbe limitare ad usufruire soltanto di una delle più semplici definizioni  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , lo abbiamo spiegato nel n. 2.

8. Da tener altresì presente, in qualunque organizzazione generale della teoria dell'equivalenza razionale, che *nel campo delle varietà virtuali  $\infty^k$  (cioè nel dominio naturale di ogni specie d'equivalenza) ogni sistema di equivalenza (razionale) è un sistema elementare (in senso lato)* <sup>(16)</sup>.

(14) Data per la prima volta nella Memoria: *Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche* («Memorie della R. Acc. d'Italia», 1937, p. 402). Ved. il volume: *Serie, sistemi d'equivalenza*, p. 70, nonché la Memoria dei «Commentarii helvetici», 1948, citata nella nota <sup>(12)</sup>.

(15) Ved. la mia Nota: *I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali*. (Questi «Rendiconti», 1937). Ved. pure il volume: *Serie, sistemi d'equivalenza, ecc.*, p. 112.

(16) Ved. la mia Memoria citata in <sup>(1)</sup>, p. 390 e il volume: *Serie, sistemi d'equivalenza, ecc.*, p. 83.



**Cosmologia.** — *Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana.*  
Nota I<sup>(\*)</sup> del Corrisp. FRANCESCO ZAGAR.

È noto che nella cosmologia newtoniana o dinamica il problema generale è impostato su 5 relazioni analitiche, che esprimono compendiosamente le premesse fondamentali di questa teoria, e cioè i teoremi della conservazione della materia e della quantità di moto e la equazione di Poisson, dato che l'azione gravitazionale della materia nell'Universo viene assimilata a quella di un fluido continuo.

La forma di queste relazioni, tutte a derivate parziali nelle funzioni incognite, e il numero delle incognite, maggiore di quello delle relazioni stesse, lascia il problema largamente indeterminato ed occorrono quindi alcune premesse aggiuntive, che d'altra parte discendono quasi naturalmente dalla natura del problema stesso e dai dati di osservazione che la teoria non deve ignorare.

La prima di queste premesse è quella ben nota in tutte le cosmologie, e cioè il cosiddetto principio cosmologico o postulato di omogeneità, che in certo senso ha il significato delle condizioni iniziali, secondo il quale ogni osservatore deve avere dell'Universo la stessa impressione e deve descrivere i fenomeni nell'Universo con le stesse leggi, e la sua introduzione semplifica notevolmente il problema analitico, inquantoché i soli movimenti della materia ammessi diventano allora quelli dei cosiddetti campi di correnti lineari

$$(I) \quad v_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

con  $a_{ik}$  funzioni del tempo  $t$ , mentre la densità  $\rho$  e la pressione  $p$  diventano indipendenti dal luogo e quindi pure solo funzioni del tempo. Per la natura del problema il tensore  $a_{ik}$  è simmetrico, cioè si ha  $a_{ki} = a_{ik}$ .

In tale semplificazione le equazioni del problema diventano

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} + \rho (a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0 \\ \sum_k \ddot{a}_{ik} x_k + \sum_{k,s} a_{ik} a_{ks} x_s = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ - \Delta \Phi = \ddot{a}_{11} + \ddot{a}_{22} + \ddot{a}_{33} + \sum_{i,k} \dot{a}_{ik}^2 = - 4 \pi k^2 \rho, \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, 3)$$

avendo indicato ancora con  $\Phi$  il potenziale e con  $k^2$  la costante dell'attrazione universale. Le 5 equazioni (2) contengono ora le funzioni incognite  $a_{ik}$  e  $\rho$  del tempo, oltre alla funzione  $\Phi$ , ed occorrono ulteriori specificazioni o semplificazioni del problema per arrivare ad un assetto determinato.

A questo si arriva facilmente con la seconda premessa, pure nota, e giustificata anche geometricamente, quella della isotropia — cioè indipen-

(\*) Presentata nella seduta dell'11 maggio 1955.

denza dalla direzione – non solo dello spazio, ma anche dei fenomeni osservabili nell'Universo. Essa esige che sia

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \alpha(t) \quad , \quad a_{ik} = 0 \quad \text{per } i \neq k,$$

e quindi

$$(3) \quad v_i = \alpha x_i$$

e conduce alla espansione ( $\alpha > 0$ ) oppure alla contrazione ( $\alpha < 0$ ) uniforme, cioè all'espansione (o contrazione) a coefficiente  $\alpha$  uguale per tutte le direzioni, e quindi ad un fenomeno che allo stato attuale del problema appare confermato dalle osservazioni.

Questa ipotesi della isotropia è fortemente restrittiva, introducendo essa cinque condizioni per i sei coefficienti  $a_{ik}$  della (1), e quindi – pur essendo i relativi risultati in apparente accordo con le osservazioni attuali – si giustifica la ricerca delle possibili soluzioni del sistema più generale (2) con altre, plausibili, ma meno restrittive premesse. Già lo stesso risultato (3) della espansione uniforme appare un po' artificioso e troppo schematico, se si tiene presente che le osservazioni sono molto difficili e scarse e la relativa espressione empirica perciò molto approssimata. Coi dati scarsi che si hanno oggi a disposizione (una trentina di velocità radiali utilizzabili per la derivazione della legge della espansione su milioni di galassie), appare infatti prematura ed ingiustificata la sicurezza con cui si è accettata la espansione uniforme ( $\alpha$  costante nello spazio) e l'aver modellato tutte le teorie a soddisfare a questo risultato empirico, o addirittura l'aver preso questo risultato quale postulato di partenza per la teoria.

Ora, si può effettivamente far vedere che la isotropia non è necessaria per una cosmologia su base classica, e che anche senza questa ipotesi si può arrivare a soluzioni in accordo col fenomeno della espansione, e precisamente in una forma più generale, che naturalmente contiene quella uniforme come caso particolare. Il problema ha perciò anche un significato più vasto di quello intrinseco, inquantoché una eventuale correzione della legge di Hubble in base a dati di osservazione più precisi o più abbondanti, che indicasse una dipendenza del coefficiente di espansione dalla direzione nello spazio, metterebbe in seria difficoltà o complicherebbe di molto le altre teorie, mentre sarebbe sempre in accordo con quella newtoniana.

È noto che le (1) possono ridursi mediante una opportuna trasformazione di coordinate alla forma più semplice

$$(4) \quad v_1 = \alpha_1 x_1 \quad , \quad v_2 = \alpha_2 x_2 \quad , \quad v_3 = \alpha_3 x_3,$$

con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  funzioni del tempo ( $\alpha_i$  positiva corrisponde ad una espansione, negativa ad una contrazione nel senso dell'asse  $x_i$ ), essendo la posizione del nuovo sistema di coordinate definito mediante i coefficienti  $a_{ik}$  delle (1). Questo secondo sistema di riferimento ruota perciò col tempo intorno all'origine, ma, come per il gruppo (1) si può omettere di considerare i moti di rotazione di tutto l'Universo come insieme, e in conseguenza ritenere solo la parte simmetrica del tensore  $a_{ik}$  allora considerato, così anche qui la rota-

zione non ha alcun significato concreto per il problema, e si può procedere nello studio come se il detto riferimento non ruotasse. Le (2) prendono allora la forma <sup>(1)</sup>

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\rho} + \rho (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0, \\ (\dot{\alpha}_1 + \alpha_1^2) x_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad (\dot{\alpha}_2 + \alpha_2^2) x_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad (\dot{\alpha}_3 + \alpha_3^2) x_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \\ -\Delta \Phi = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -4\pi k^2 \rho, \end{cases}$$

la prima e quinta delle quali, con le posizioni

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\dot{u}}{u}, \quad \alpha_2 = \frac{\dot{v}}{v}, \quad \alpha_3 = \frac{\dot{w}}{w}, \\ \dot{\alpha}_1 + \alpha_1^2 = \frac{\ddot{u}}{u}, \quad \dot{\alpha}_2 + \alpha_2^2 = \frac{\ddot{v}}{v}, \quad \dot{\alpha}_3 + \alpha_3^2 = \frac{\ddot{w}}{w}, \end{cases}$$

forniscono facilmente le seguenti relazioni

$$(7) \quad \begin{cases} \rho = \frac{C}{uvw} \\ \ddot{u}vw + u\ddot{v}w + uv\ddot{w} = -4\pi k^2 C = \text{cost.} \end{cases}$$

con  $C$  costante di integrazione. Combinando inoltre le relazioni della seconda e della terza riga delle (5) si ha per la funzione  $\Phi$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{1}{x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},$$

dalla quale risulta che - dovendo ambedue le parti essere indipendenti dalle  $x_i$  -  $\Phi$  deve essere una funzione omogenea di 2° grado nelle  $x_i$ , per cui si ha dalle relazioni della seconda riga delle (5); moltiplicandole rispettivamente per  $x_1, x_2, x_3$  e sommando

$$(8) \quad \Phi = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{u}}{u} x_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{v}}{v} x_2^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{w}}{w} x_3^2 + h,$$

con  $h$  costante arbitraria.

La seconda delle (7) è la equazione fondamentale del problema; contenendo tre funzioni incognite, essa non può essere sufficiente, ma il problema porge facilmente alcuni accorgimenti tali da permettere di restringere le soluzioni. Infatti, occorre tenere presente anche la prima delle (7) ( $\rho$  non può ad esempio essere negativo), la forma (8) della  $\Phi$  e le (4); è evidente allora

(1) Nel suo libro *Theorien der Kosmologie* (Springer Verlag, Berlin 1942) O. HECKMANN, nell'intento di studiare le condizioni della singolarità del problema, suppone il potenziale  $\Phi$  dipendente soltanto dalla distanza, e può allora ridurre le quattro ultime delle (5) alle tre relazioni

$$\dot{\alpha}_i + \alpha_i^2 = -\frac{4}{3} \pi k^2 \rho.$$

Siccome questa semplificazione corrisponde a quella della isotropia, è necessario lasciare qui il sistema nella forma scritta.

che le tre funzioni  $\alpha_i$  e quindi le  $u$ ,  $v$ ,  $w$  non possono essere funzioni di natura differente, ed ammetteremo perciò che si tratti di funzioni simili, ad esempio tutte e tre razionali o tutte e tre irrazionali, ecc. La ricerca delle soluzioni dovrà dunque farsi assumendo un certo tipo di funzioni del tempo e cercando di soddisfare alle (7), esaminando poi le conseguenze per  $\rho$  e  $\Phi$ , nonché le altre circostanze del problema. Si può anzitutto facilmente dimostrare che le soluzioni non possono essere del tipo razionale qualunque (né fratto né intero) né del tipo trascendente  $\kappa e^{\alpha t}$  ( $\alpha$  reale), mentre si riesce nell'intento con funzioni del tipo  $\kappa t^v$ , con  $v$  esponente costante qualunque, positivo o negativo, intero o frazionario. Infatti, considerando la seguente prima classe di soluzioni

$$(I) \quad u = \kappa_1 (t - t_0)^{v_1}, \quad v = \kappa_2 (t - t_0)^{v_2}, \quad w = \kappa_3 (t - t_0)^{v_3},$$

si trova facilmente che la seconda delle (7) è soddisfatta per

$$(9) \quad v_1 + v_2 + v_3 = 2,$$

e le costanti  $\kappa_i$ , pure per la (7), sono legate alla costante  $C$  dalla relazione

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2) = -4 \pi k^2 C,$$

od anche

$$(9') \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 2 - 4 \pi k^2 K, \quad K = \frac{C}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3},$$

mentre la densità materiale, per la prima delle (7) risulta *inversamente proporzionale al quadrato del tempo*

$$(10) \quad \rho = \frac{K}{(t - t_0)^2};$$

per la funzione  $\Phi$  si ha

$$(11) \quad \Phi = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{C} \sum v_i (v_i - 1) x_i^2 + h,$$

ed infine le equazioni del movimento della materia (4) diventano

$$(12) \quad v_1 = \kappa_1 (t - t_0)^{-1} x_1, \quad v_2 = \kappa_2 (t - t_0)^{-1} x_2, \quad v_3 = \kappa_3 (t - t_0)^{-1} x_3.$$

Si vede dalle precedenti che la velocità della corrente in un determinato punto dello spazio, pur rimanendo di direzione invariata, decresce in ragione inversa del tempo, *il moto non è dunque stazionario*. Se per un momento consideriamo coordinate polari, si può scrivere

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \frac{r}{(t - t_0)^2} (v_1^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + v_2^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + v_3^2 \sin^2 \varphi),$$

e quindi lungo un raggio uscente dall'origine ( $\vartheta$  e  $\varphi$  costanti) si ha che (in un determinato istante) le velocità crescono proporzionalmente alla distanza, e quindi la materia si muove in modo che non avviene mai alcun sorpasso. Un determinato volume che si espande contiene perciò sempre la stessa massa totale.

Posto ora

$$v_i = \frac{2}{3} + \varepsilon_i,$$

sarà per le (9) e (9').

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{2}{3} - 4\pi k^2 K \end{cases}$$

e dovendo essere per la (10)  $K$  una costante positiva, dovrà aversi

$$(13') \quad K < \frac{1}{6\pi k^2};$$

ma la cosa più importante è che dalle precedenti risulta che deve essere

$$(14) \quad |\varepsilon_i| < \frac{2}{3},$$

ed anzi che due degli  $\varepsilon_i$  devono essere in valore assoluto anche minori di  $\sqrt{1/3}$ . Infatti, si ha che i valori estremi di un qualunque  $\varepsilon_i$ , diciamo  $\varepsilon_1$ , risultano dalle condizioni

$$d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 d\varepsilon_2 + \varepsilon_3 d\varepsilon_3 = 0,$$

cioè per  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , e da ciò si ha con le (13) facilmente la limitazione (14); e tenendo presente che due  $\varepsilon_i$  devono avere segni uguali (positivi o negativi), diciamo  $\varepsilon_2$  ed  $\varepsilon_3$ , sarà, rispettivamente dalla prima e seconda delle (13)

$$\varepsilon_1 = -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 < \frac{1}{3},$$

e per essere il prodotto  $\varepsilon_2 \varepsilon_3$  positivo, tanto  $\varepsilon_2$  che  $\varepsilon_3$  sono minori di  $\sqrt{1/3}$ .

In conseguenza le  $v_i$  sono tutte positive, e perciò si ha per questa classe di soluzioni secondo le (12) *espansione in tutte e tre le direzioni degli assi coordinati*, dunque una espansione generale, ma non uniforme (finché è  $v_1 \neq v_2 \neq v_3$ ) né puramente radiale. Dato che le  $v_i$  sono costanti, la natura del movimento non varia col tempo, la espansione continua indefinitamente al crescere di  $t$ .

Dalle (12) risulta, oltre a quanto abbiamo già detto per la corrente, che per il moto della materia stessa o più precisamente di un determinato punto materiale si ha

$$(15) \quad \dot{x}_1 = v_1 (t - t_0)^{-1} x_1, \quad \dot{x}_2 = v_2 (t - t_0)^{-1} x_2, \quad \dot{x}_3 = v_3 (t - t_0)^{-1} x_3$$

ossia, integrando e derivando,

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 = c_1 u & , & x_2 = c_2 v & , & x_3 = c_3 w, \\ \dot{x}_1 = c'_1 (t - t_0)^{v_1 - 1} & , & \dot{x}_2 = c'_2 (t - t_0)^{v_2 - 1} & , & \dot{x}_3 = c'_3 (t - t_0)^{v_3 - 1} \end{cases} \quad (c'_i = c_i k_i v_i)$$



dove  $c_1, c_2, c_3$ , sono tre costanti che caratterizzano il punto materiale considerato, cosicché si vede che le tre quantità  $u(t), v(t), w(t)$  delle (I) rappresentano tre funzioni universali, al variare delle quali variano proporzionalmente tutte le coordinate dei punti dell'Universo;  $u, v, w$  si possono anche considerare come tre fattori che stabiliscono ad ogni istante la scala dell'Universo.

Dalle precedenti risulta che per i modelli considerati *le velocità di espansione dei singoli punti non possono essere costanti*. Infatti, per essere costanti le velocità spaziali, occorrerebbe che fossero costanti tutte e tre le componenti  $x_i$  e quindi per le precedenti  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ , ciò che è impossibile per la (9). Il moto rispetto all'origine e – per il principio cosmologico – rispetto a qualunque altro punto dell'Universo è dunque costantemente accelerato o costantemente ritardato.

Dalle (15) risulta ancora che i punti di uguale velocità spaziale  $V$  stanno sopra una superficie ellissoidica di semiassi  $c/v_1, c/v_2, c/v_3$ , ( $c = \text{cost.}$ ), e se si immagina un altro ellissoide, di semiassi  $x_1, x_2, x_3$ , si ha per le (16) e la (10) che la massa in questo contenuta è costante, avendosi

$$M = \frac{4}{3} \pi x_1 x_2 x_3 \rho = \frac{4}{3} \pi c_1 c_2 c_3 K,$$

ossia in ogni volume che si dilata come l'ellissoide determinato dalle coordinate di un punto che si muove, la massa rimane costante, come già abbiamo visto. E se in particolare il punto ha le coordinate  $u, v, w$  si ha analogamente

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3} \pi u v w \rho = \frac{4}{3} \pi C,$$

che del resto non è che la prima delle (7); perciò le quantità  $u, v, w$  date dalle (I) possono ancora considerarsi come i tre assi di un ellissoide fondamentale che caratterizza l'Universo corrispondente a questa soluzione.

Data la espressione (10) per  $\rho$  o le stesse (I), si vede che questa soluzione, come caso isotropico, ha in  $t = t_0$  un punto singolare; gli assi dell'ellissoide ( $u, v, w$ ) sono nulli e la densità è infinitamente grande. Questa soluzione, che per  $v_1 = v_2 = v_3 = 2/3$  si riduce facilmente al caso isotropo, non porta dunque un miglioramento in questo punto del problema, ma lascia con le (I) o (16) una maggiore libertà di adattamento ai risultati delle osservazioni, per il caso che dovesse risultare da queste una dipendenza della legge di Hubble dalla direzione.

Ed infine anche concettualmente questa soluzione è soddisfacente, in quanto fa vedere che anche senza la ipotesi fondamentale della isotropia, col solo principio cosmologico, la teoria newtoniana conduce ad un Universo che in tutti i casi, anche in condizioni estreme, non è molto diverso da quello risultante dalla ipotesi della isotropia.

Sono interessanti alcuni casi particolari di questa prima classe di soluzioni. Si dimostra anzitutto che i movimenti della materia non possono essere paralleli ad un piano, non si può cioè avere una espansione piana; infatti, in tale caso per le (12) uno degli esponenti  $v$  dovrebbe essere nullo, ma in tale

ipotesi le (9) e (9') non danno soluzioni reali per gli altri due  $v$ . Se l'espansione è simmetrica per due direzioni, diciamo per gli assi  $x_1$  ed  $x_2$ , la soluzione è

$$v_1 = \frac{2}{3} + a, \quad v_2 = \frac{2}{3} + a, \quad v_3 = \frac{2}{3} - 2a, \quad a = \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{3} \pi k^2 K}$$

ed altre due facili soluzioni sono

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{1}{2} + b, \quad v_3 = \frac{1}{2} - b, \quad b = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2 \pi k^2 K}$$

$$v_1 = \frac{1}{2}, \quad v_2 = \frac{3}{4} + c, \quad v_3 = \frac{3}{4} - c, \quad c = \pm \sqrt{\frac{5}{16} - 2 \pi k^2 K}$$

sempre che la costante  $K$  soddisfi alla (13') e renda positivo il radicale. Dalla (13') stessa e dalle precedenti si rileva che *il caso isotropo di questa classe rappresenta un caso estremo* (cioè corrispondente al massimo valore possibile per la costante  $K$  del problema) non un caso medio come potrebbe suppersi.

Infine la (10) per la (13'), porge la possibilità di avere un valore limite per la densità  $\rho$  se si ammette un valore plausibile per  $t - t_0$ , oppure di avere un valore limite per  $t - t_0$  se si conosce un valore plausibile di  $\rho$ . Questa seconda possibilità è la meno ipotetica, dato che per la densità si può ammettere il valore  $\rho = 10^{-29}$  gr cm<sup>-3</sup> (2); con questo si ottiene per  $t - t_0$  (la cosiddetta età dell'Universo) il valore massimo di  $2.8 \times 10^{17}$  sec o di 10 miliardi di anni.

**Fisica matematica.** — *Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei.* Nota II (\*) del Corrisp. LUIGI FANTAPPIÈ.

6. Nella precedente Nota I (1) abbiamo visto che l'operatore  $K$  (il quale, applicato al potenziale  $\varphi(\mathbf{x})$ , dà la densità  $\rho(\mathbf{x})$ ) deve essere necessariamente un *polinomio* (34) dell'operatore  $\Delta$  di Laplace. Per completare la determinazione delle possibili leggi di gravitazione, non c'è ora che da riprendere l'equazione (20) per  $f(r)$ , e vedere quali forme di  $K$  e quindi di  $f(r)$  sono accettabili e quali no. Cominciamo dal caso più semplice che il polinomio  $K$  in  $\Delta$  si riduca addirittura a  $\Delta$ , a meno di una costante moltiplicativa, nel qual caso l'equazione (20) si riduce all'equazione differenziale di 2° ordine in  $f(r)$

$$(35) \quad \Delta\varphi = \Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = Df(r) = 0,$$

(2) La densità più attendibile adottata fino a qualche anno addietro era quella di  $10^{-28}$  gr cm<sup>-3</sup>, ma da quando la scala delle distanze nell'Universo si è raddoppiata, appare più giustificato il valore soprascritto.

(\*) Presentata nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) Questi « Rend. », vol. XVIII, fasc. 4, pp. 362-367, con lo stesso titolo.

ove abbiamo indicato con  $D$  l'operatore differenziale a cui si riduce  $\Delta$ , quando è applicato a una funzione della sola distanza  $r$ , e cioè l'operatore differenziale dato dall'espressione al 3° membro. Da questa equazione si ricava subito

$$(36) \quad \log f'(r) = -2 \log r + \text{cost},$$

$$(37) \quad f'(r) = F(r) = \frac{c}{r^2}$$

e infine

$$(38) \quad f(r) = \frac{m'}{r} + c_1 \quad (m' \text{ e } c_1 \text{ costanti}):$$

e cioè proprio l'espressione (37) della *forza* e (38) del *potenziale* newtoniani, per cui è ben noto che, effettivamente, l'operatore  $K$  è dato proprio da

$$(39) \quad \rho = K\varphi = \frac{1}{4\pi} \Delta\varphi.$$

Se invece fosse  $K = \Delta^2$ , la (20) si ridurrebbe all'equazione

$$(40) \quad \Delta^2 f(r) = D^2 f(r) = D \{Df(r)\}$$

da cui risulta che  $Df(r)$  dovrebbe essere una soluzione della (35), e cioè del tipo (38), e quindi si avrebbe l'equazione

$$(41) \quad Df(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = \frac{m'}{r} + c_1$$

che è del 1° ordine in  $F(r) = f'(r)$ , e, integrata, dà

$$(42) \quad F(r) = f'(r) = \frac{m'}{2} + \frac{c_1}{3} r + \frac{c_2}{r^2}$$

e infine

$$(43) \quad f(r) = \frac{m'}{2} r + \frac{c_1}{6} r^2 - \frac{c_2}{r} + c_3:$$

da cui risulta che i termini in più, oltre quelli che figurano in (37) e (38), sono monomi in  $r$ , e quindi, dovendo  $F(r)$  essere nulla all' $\infty$  (postulato 2°), le costanti arbitrarie, che figurano a coefficienti, debbono essere nulle. Le nuove soluzioni sono cioè da respingersi, e restano soltanto quelle classiche (37) e (38). Così pure si può verificare facilmente che le altre potenze  $\Delta^s$  di  $\Delta$  forniscono per  $f(r)$  espressioni del tipo (43), a cui si vanno man mano aggiungendo, al crescere dell'esponente  $s$ , altri termini in  $r^3, r^4, \dots$  fino a  $r^{2s}$ , tutti da respingersi, per la stessa ragione.

Passiamo ora a esaminare il caso di un operatore  $K$  dato da un polinomio (34) di 1° ordine in  $\Delta$ ,  $K = \Delta + a$ , e distinguiamo il caso di  $a > 0$  e  $a < 0$ . Per  $a = -k^2 < 0$ , l'equazione (20) in  $f(r)$  diventa allora

$$(44) \quad (\Delta - k^2) \varphi = \Delta f(r) - k^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - k^2 f(r) = 0$$

che risulta automaticamente un'equazione a coefficienti *analitici*, e quindi con soluzioni  $f(r)$  *analitiche*, che dovrebbero essere regolari in ogni punto  $r$  sul semiasse *reale positivo*, incluso  $r = \infty$  (postulato 2°). Per studiare l'andamento asintotico delle soluzioni, per  $r \rightarrow \infty$  <sup>(2)</sup>, trasformiamo perciò l'equazione (44) in un'altra equazione *pura*, priva cioè del termine di 1° ordine, il che, per un'equazione generale

$$(45) \quad y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0,$$

si ottiene ponendo

$$(46) \quad y(x) = e^{-\int \frac{p_1}{2} dx} \cdot \bar{y}(x),$$

con che l'equazione diventa

$$(47) \quad \bar{y}''(x) + \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_1'}{2} \right) \bar{y}(x) = 0.$$

Nel caso della (44), essendo  $p_1 = 2/r$ , basterà porre

$$(48) \quad f(r) = e^{-\int \frac{dr}{r}} \cdot g(r) = \frac{1}{r} g(r)$$

con che la (44) diviene, nella nuova incognita ausiliaria  $g(r)$ ,

$$(49) \quad g''(r) - k^2 g(r) = 0$$

che fortunatamente risulta lineare e a coefficienti costanti, con le due soluzioni indipendenti

$$(50) \quad g_1 = e^{kr}, \quad g_2 = e^{-kr}$$

a cui corrispondono le due soluzioni indipendenti della (44),

$$(51) \quad f_1 = \frac{e^{kr}}{r}, \quad f_2 = \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Mentre la 1ª, per  $k > 0$ , diverge, la seconda tende a 0, con tutte le sue derivate, per  $r \rightarrow \infty$  per valori reali positivi (e sarebbe quindi accettabile, qualora fosse richiesta la sola *continuità*, per valori reali), ma questo punto  $r = \infty$  risulta una *singolarità essenziale* per queste soluzioni *analitiche*, le quali pertanto sono ambedue da rifiutarsi, a norma del postulato 2°, insieme alla forma (44) dell'operatore  $K$ . Così pure la forma analoga  $\Delta + k^2$  per tale operatore, sarebbe anche da rifiutarsi, per la stessa ragione, poiché, cam-

(2) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, cap. 7°, 4, e, per il seguito, anche cap. 10°, Zanichelli, Bologna 1941.

biando il segno di  $-k^2$  in  $+k^2$  nelle (44) e (49) si arriverebbe alle soluzioni analoghe

$$(52) \quad g_1(r) = \cos kr \quad , \quad g_2(r) = \sin kr$$

$$(53) \quad f_1(r) = \frac{\cos kr}{r} \quad , \quad f_2(r) = \frac{\sin kr}{r}$$

che hanno ancora una singolarità essenziale per  $r = \infty$ , e sono quindi inaccettabili.

Anche ogni altra espressione (34) dell'operatore  $K$ , come polinomio in  $\Delta$ , porterebbe poi a un'equazione (20) per  $f(r)$ , del tipo

$$(54) \quad Kf(r) = \sum_s^m a_s D^s f = a_m \prod_s^m (D - \lambda_s) f = 0$$

se sono  $\lambda_s$  le radici (eventualmente ripetute) del polinomio in  $\lambda$ , che ha gli stessi coefficienti  $a_s$ , e quindi  $2m$  soluzioni indipendenti della (54) si otterrebbero subito, oltre che da (38) (per  $\lambda_s = 0$ ), da espressioni analoghe alle (51) e (53), se le radici  $\lambda_s$  sono tutte reali e distinte ( $\lambda_s = \pm k_s^2$ ) o del tipo

$$(55) \quad f_1(r) = \frac{e^{k'_s} \cos k''_s r}{r} \quad , \quad f_2(r) = \frac{e^{k'_s} \sin k''_s r}{r}$$

se le radici  $\sqrt{\lambda_s} = k_s = k'_s + ik''_s$  sono complesse, mentre, in corrispondenza a radici  $\lambda_s$  *multiple*, apparirebbero come soluzioni anche le successive derivate rispetto alle costanti  $k_s$  e quindi *sempre con singolarità all' $\infty$* .

Da tutto ciò si conclude che l'unica forma possibile per il potenziale generato da un punto materiale è quella classica (38), e quindi anche *l'unica legge possibile di forza*, fra due punti materiali, compatibile coi postulati enunciati, è *quella classica della legge (1) di gravitazione di Newton*, che discende dunque necessariamente dalla stessa struttura del gruppo di Galilei, con le condizioni *qualitative* accessorie già dette.

7. È da rilevare, infine, che questa necessità della legge di Newton, può pure spiegare il fatto notevole che anche per le azioni *elettrostatiche*, o *magnetostatiche*, in cui non giocano *né le velocità, né il tempo, vale la stessa legge* (o legge di Coulomb), in quanto, in queste condizioni *statiche*, anche l'elettricità e il magnetismo si comportano come la materia (il loro comportamento varia, invece, se le velocità *non sono nulle*).

Ma, forse, è ancora più notevole il fatto, che, con quanto precede, i fenomeni di *gravitazione* restano spiegati come conseguenza della sola *struttura del gruppo base*, che definisce l'uguaglianza, *senza che per essi sia necessario ricorrere ad alterazioni della struttura geometrica del cronotopo*, come avviene nelle teorie di relatività generale, le quali dunque, con lo sviluppo delle ricerche in questa direzione, potrebbero forse anche rivelarsi *superflue*, qualora si potessero approfondire le ripercussioni che ha la struttura del vero gruppo base (*gruppo di Lorentz, o gruppo finale*), sulla forma di tutte le leggi naturali.



**Fisica. — Sulla cinematica relativistica.** Nota (\*) del Socio  
QUIRINO MAJORANA.

Ricorre ora il cinquantenario della formulazione della *Relatività speciale* di Alberto Einstein, seguita, dopo undici anni, dalla seconda teoria, detta *generale* (1). Coincide tale ricorrenza con la scomparsa del detto Autore, la cui opera tanto consenso ha ottenuto fra la grandissima maggioranza dei Fisici e dei Matematici. Oltre alla letteratura enorme, che in questo mezzo secolo si è accumulata sulle dette teorie, quasi generali espressioni di compianto sono state formulate, in tutto il mondo, come nelle commemorazioni dello scomparso. Certamente, l'opera di questi va rilevata per la fermezza e l'audacia con cui egli ha voluto concretare le sue teorie, dovute principalmente al suo alto spirito di innovatore ed alla sua grande padronanza dello strumento matematico. Tali teorie avrebbero dato un nuovo quadro ed aspetto dei fenomeni elettromagnetici. Ma non si può obliare come una piccola minoranza di studiosi, fra cui taluni di alto valore scientifico, abbia sempre rifiutato le teorie in parola. Si tratta, in genere, di fisici sperimentali, o di coloro che, nei loro ragionamenti, non dimenticano di connettere con logica e prudenza tutti i possibili fatti naturali con le nuove ipotesi da discutere.

In tale acuto contrasto, mi sia consentito, a complemento di quanto ho già affermato in numerose precedenti Note dell'ultimo decennio, di stabilire con tutta sicurezza ed obiettività, qualcuno dei più persuasivi e semplici argomenti, che dimostrano l'infondatezza, l'insostenibilità, od anche la completa inconsistenza delle teorie di Einstein. Credo, con ciò, compiere opera utile per il vero progresso della Scienza, che non deve basare le sue deduzioni su errate premesse o postulati.

In questa Nota mi occuperò della parte cinematica della teoria della Relatività speciale, soltanto.

Premetto alcune ben note considerazioni, sulla storia di tale teoria. La crisi della concezione eterea, apertasi con l'esito negativo dell'esperienza di Michelson, fu dapprima tentato di risolvere, da Lorentz e Fitzgerald, con l'ipotesi della contrazione dei corpi, in moto rispetto all'ipotetico etere. Da ciò, il fisico olandese poté trovar modo di scrivere un ben noto gruppo di equazioni (Trasformazione di Lorentz, ossia T. L.) che permette di stabilire l'invarianza dei fenomeni ottici od elettromagnetici, col moto di traslazione uniforme dei corpi, rispetto ad altri sistemi. Einstein, successivamente, cercò di ritrovare la T. L., pur abbandonando, in sostanza, la concezione eterea, e dando perciò ad essa un significato diverso da quello originale. Infatti, nella teoria di Einstein, ciascuno dei due sistemi, in reci-

(\*) Presentata nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) A. EINSTEIN, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, «Ann. der Phys.», B. 17, S. 891-921, 1905; *Die Grundlage der Allgemeiner Relativitätstheorie* «Ann. der Phys.», B. 49, S. 769-822, 1916.

proco moto di traslazione uniforme, giudica che l'altro si contragga nella sua lunghezza secondo il moto, ed i suoi tempi si allunghino. È questa una strana concezione, tanto più che gli osservatori di ciascun sistema nulla sanno di tali proprie variazioni metriche. Ed anche per ciò, un simile fatto non può essere reale, o meglio intrinseco, come avveniva per l'ipotesi della contrazione di Lorentz, realmente provocata dall'etere traversato.

Per ritrovare la detta T. L., Einstein stabilisce, anzitutto, due ben noti postulati. Il primo, quello della invarianza dei fenomeni ottici dal moto uniforme, è una inderogabile conseguenza dell'esperienza di Michelson, accettata con grande consenso da tutti. Il secondo è quello della cosiddetta costanza della velocità della luce, per qualsiasi osservatore, indipendentemente dalla traslazione uniforme di questo, rispetto alla sorgente luminosa. Questo secondo postulato, che racchiude in sé delle ragioni di assurdità (pur troppo non riconosciute dai relativisti!), è la causa di tutti i contrasti che si incontrano, nel cercare di penetrare lo spirito della relatività speciale.

Fra tali contrasti, scelgo, in questa Nota, i seguenti. Come è noto, la T. L. scritta da Einstein, per due sistemi in reciproco moto di traslazione uniforme, di velocità  $v$ , lungo l'asse delle  $x$ , dice:

$$x' = \frac{x - vt}{R} \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{R} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad \text{con } R = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} ;$$

dove,  $x, y, z, t$ , ed  $x', y', z', t'$ , sono le coordinate spazio-temporali di una coppia di punti, istantaneamente coincidenti, ed appartenenti rispettivamente ad uno dei due sistemi. In generale, tale coincidenza spaziale (benché corrispondente a valori diversi delle coordinate dei due sistemi) non è accompagnata da quella temporale, secondo le ammissioni relativistiche.

Per meglio rilevare le contraddizioni a cui queste ammissioni danno luogo, supponiamo che i due sistemi, in reciproco moto di traslazione uniforme, siano costituiti da due regoli rettilinei,  $r, r'$ , assai lunghi; divisi in tratti di lunghezza  $l$ , aventi anche una minuta graduazione che permetta di leggere le frazioni di  $l$ . I due regoli scorrono l'uno sull'altro, con la detta velocità  $v$ . Nei seguenti rilievi, intendiamo riferirci esclusivamente all'istante in cui le due origini  $A, A'$ , delle coordinate dei due sistemi, coincidono. In tale istante, per  $A, A'$ , si ha  $x = x' = 0$  e  $t = t' = 0$ . Ammettiamo che il regolo  $r$  sia in quiete, ed  $r'$  in moto. Gli osservatori di  $r$  ritengono che i propri tratti abbiano la precisa detta lunghezza  $l$ , talché i punti intermedi fra i tratti si succedono esattamente rispetto ad  $A$ , alle distanze  $l, 2l, 3l, \dots$ . Essi ritengono pure che il loro tempo, nell'istante considerato, sia zero, come quello di  $A, A'$ , coincidenti. Gli stessi osservatori di  $r$  giudicano di trovarsi rispettivamente, nello stesso istante zero di  $A, A'$ , coincidenti con punti di  $r'$  che (nella misura di  $r'$ ) sono più discosti da  $A, A'$ , e cioè:  $l/R, 2l/R, 3l/R, \dots$ . Ciò corrisponde ad una unità di misura di  $r'$  (nel giudizio di  $r$ ) alquanto più corta della propria, talché, per  $r$  i tratti di lunghezza  $l$  di  $r'$ , si succedono alle distanze  $lR, 2lR, 3lR, \dots$ . Quanto ai tempi, mentre gli osservatori di  $r$  ammettono di aver lo stesso tempo zero di  $A, A'$  (coincidenti), riten-

gono che i punti di  $r'$ , rispettivamente con essi coincidenti, abbiano tempi dati da:  $-\frac{vl}{c^2 R}$ ,  $-\frac{2vl}{c^2 R}$ ,  $-\frac{3vl}{c^2 R}$ , ..., dal lato verso cui si muove  $r'$ , e dagli stessi valori, con segno cambiato, dal lato opposto.

A parte tale ultima distribuzione relativistica dei tempi (che non ha alcun interesse per quanto ora dirò) quelle distanze che ora ho detto, sono rappresentabili dalla fig. 1. Le coincidenze degli osservatori di  $r$  con punti intermedi dei tratti  $l$  di  $r'$ , rappresentando un fatto reale (sia pur previsto dalla relatività) dovrebbero potersi rilevare sperimentalmente. Ciò potrebbe farsi mediante fotografie istantanee, eseguibili dagli osservatori di  $r$ , di ciascun punto affacciato del regolo  $r'$ , nell'istante zero, di tutto il regolo  $r$ ; nessuna importanza per l'esito di tale esperienza ha il fatto che i tempi dei detti punti affacciati abbiano (secondo la relatività) tempi diversi.

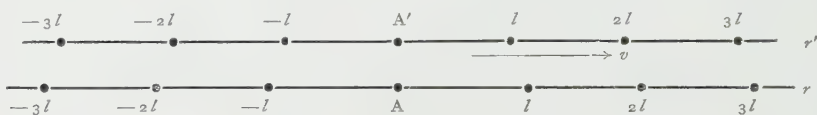


Fig. 1.

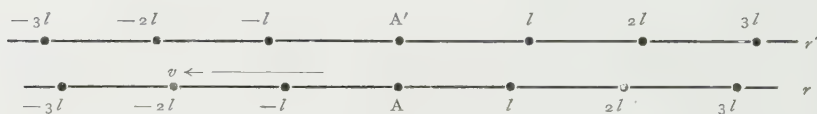


Fig. 2.

Si possono ora ripetere le precedenti considerazioni, ammettendo che il regolo in quiete sia  $r'$ , e quello in moto  $r$ . Si dovrà dire allora, che  $r$  si muove con la velocità  $-v$  rispetto ad  $r'$ . Con ciò, le distanze degli intervalli  $l$  di  $r'$ , sono giudicate esattamente  $l, 2l, 3l, \dots$ , mentre quelle di  $r$  sono, per  $r'$  raccorciate; la distribuzione dei tempi su  $r$ , è invertita; ma ciò non interessa. Anche ora, a parte tale distribuzione, le distanze in unità  $l$  sui due regoli può essere rappresentata dalla fig. 2. E, come si vede, le indicazioni di tale figura sono contrarie a quelle della fig. 1. Costituisce ciò un vero controsenso. Infatti l'esecuzione delle dette fotografie è un fatto sperimentale, che si svolge nel sistema dei due regoli, reciprocamente in traslazione uniforme, indipendentemente dal dire che uno o l'altro dei regoli sia in quiete od in moto. E siccome non v'ha ragione alcuna che gli osservatori di uno di essi trovi l'altro raccorciato nelle sue lunghezze, si deve logicamente prevedere che il risultato delle precedenti esperienze fotografiche non debba mostrare alcuna contrazione di un regolo rispetto all'altro: i punti intermedi fra la comune unità di misura  $l$ , debbono risultare, nelle fotografie coincidenti. Necessariamente, i tempi in cui tali coincidenze si manifestano debbono corrispondere tutti al tempo zero delle origini  $A, A'$ , rilevabile in tutti gli orologi.

Quanto precede dimostra la completa inconsistenza del significato fisico della T. L., usata dall'Einstein; mentre essa poteva averlo, secondo l'ipotesi della contrazione della materia, in moto rispetto all'etere, di Lorentz.

A commento di tale conclusione, si può dire che Einstein, nello scrivere quel gruppo di equazioni, non abbia tenuto conto di tutto quanto poteva prevedersi fisicamente, partendo dalle sue nuove ipotesi. E per di più, talvolta usa artifici di calcolo, che non sembrano d'accordo con le sue premesse, o con le deduzioni finali a cui perviene. Così, parlando della velocità della luce,  $c$ , relativisticamente non può esser permesso riferirsi alle quantità  $c + v$  oppure  $c - v$ . Infatti, queste quantità, introdotte nei calcoli, dovrebbero avere un significato fisico che realmente ad esse manca: ciò si dice, ai termini del secondo postulato, perché nessun osservatore può misurare velocità diverse da  $c$ . Oltre a dir ciò, si può ricordare il risultato che Einstein ottiene, discutendo la composizione relativistica delle velocità: la velocità  $c$  rappresenta un limite insuperabile. Se così è, sembra strano che nei calcoli si introduca la quantità  $c + v$ .

E la contraddizione ora rilevata appare ancora in modo più evidente, quando Einstein cerca di volgarizzare la sua teoria, riferendosi a fatti sperimentali che dovrebbero risultare facilmente accessibili. Così, in un noto suo libretto <sup>(2)</sup>, nello spiegare un risultato del contenuto della richiamata T. L. (e cioè quello della pretesa mancanza di simultaneità assoluta, fra due sistemi in moto reciproco), parlando di un osservatore, dice testualmente: «... Ma in realtà egli si sposta, e *va incontro alla luce* che viene da B, mentre che egli *fugge davanti alla luce* che viene da A... ». Una tale asserzione poteva farsi quando vigeva ancora la teoria dell'etere, cioè prima dell'esperienza di Michelson. Ed essa, non è, soprattutto, d'accordo col secondo postulato, secondo il quale un osservatore vede sempre la luce muoversi con la velocità  $c$  e non può fuggire od andare incontro ad essa!

Le precedenti considerazioni portano a farci comprendere, oltre alla mancanza di significato fisico della T. L., come viene usata da Einstein, l'artifizio della sua origine. Su ciò non voglio discutere, lasciando tale compito ai matematici.

Può avere, infine, un certo interesse, osservare che la richiamata pretesa di mancanza di simultaneità assoluta, fra sistemi in moto reciproco di traslazione uniforme costituisce, anche per più semplici ragioni, un'erronea asserzione. Basta infatti mostrare che il detto fatto della simultaneità assoluta può verificarsi ricorrendo a dispositivi esclusivamente meccanici; e senza far uso della trasmissione a distanza della luce.

Ricorriamo, per far ciò, allo stesso modello, più sopra usato, dei due regoli rettilinei, divisi in tratti di lunghezza  $l$ , che possano farsi scorrere l'uno sull'altro con velocità  $v$ . Finché essi sono in reciproca quiete, vale, senza dubbio alcuno, per sessi, il concetto classico del tempo unico. Per

(2) A. EINSTEIN, *La Théorie de la Relativité* (edizione francese), p. 22, Gauthier-Villars, Paris 1921.



osservatori, situati sui punti intermedi dei tratti, forniti di orologi identici, sincroni e concordi, vale cioè il tempo indicato da tali orologi. Supponiamo ora, di porre in moto uno dei regoli, rispetto all'altro. Per far ciò, lasciandone uno in quiete, si può applicare all'altro una forza, per un tempo conveniente; cioè finché esso assuma la velocità fissata,  $v$ . È da ammettersi che durante tale operazione si siano occasionate delle deformazioni elastiche nel regolo (non volendo usare l'azione di un campo gravitazionale). Ma si può anche credere che tali deformazioni contenute dentro i limiti di praticamente perfetta elasticità, siano scomparse, quando l'azione della forza sia cessata. Comunque, ad evitare al riguardo qualsiasi incertezza, si può agire su entrambi i regoli, imprimendo all'uno la velocità  $+v/2$  ed all'altro  $-v/2$ . In tal modo i due regoli subirebbero, se mai, le stesse deformazioni, risulterebbero cioè identici ed animati fra loro della velocità  $v$ . Ciò vale anche per gli orologi. Avendo così operato, per ragioni di simmetria non v'ha ragione alcuna per ritenere che i tratti di un regolo risultino od appaiano raccorciati od allungati all'altro. È da presumere che durante il moto reciproco dei regoli, avverranno regolari incontri, tra i punti estremi dei tratti  $l$  di un regolo, con quelli dell'altro; e tali incontri, ancora per le dette ragioni di simmetria debbono essere esattamente simultanei. Ciò vale a dire che tutti gli osservatori, nell'istante unico di un gruppo di incontri, leggono, esattamente la stessa ora, ai rispettivi orologi. Se così non fosse si cadrebbe in contraddizioni, simili a quelle più sopra rilevate, cercando di applicare la T. L.

La pretesa assenza della simultaneità assoluta, voluta da Einstein, mentre è una conseguenza matematica di tale gruppo di equazioni e del postulato della costanza della velocità della luce, per qualunque osservatore, non può in alcun modo venir dimostrata in modo fisico ed intuitivo: lo stesso Einstein, nel tentar di fare ciò fa (forse non volutamente) delle asserzioni inesatte.

Le ultime considerazioni, ora fatte, mettono in evidenza l'ingiustificato nesso fra fenomeni meccanici ed ottici. Mentre tale nesso non è stabilito da alcun fatto sperimentale, la relatività speciale porterebbe ad ammettere la possibilità di determinare il valore di  $c$ , mediante l'osservazione di soli fatti cinematici della materia.

Dopo quanto si è detto, vengono a cadere tutte le basi cinematiche della relatività speciale. A considerare la estrema semplicità delle dimostrazioni logiche da me date, di simile conclusione, appare veramente sorprendente che i relativisti, fra cui si annoverano valorosi cultori di fisica matematica, abbiano dato credito, per mezzo secolo, a quella teoria.

E la detta asserzione va ben oltre il semplice aspetto cinematico. A parte la necessaria concatenazione che Einstein pone tra tale aspetto e quello dinamico od energetico, vi ha la possibilità di formulare critiche dirette anche in questo campo. Mi riservo di tornare su tale argomento, in attesa di completare ricerche sperimentali, di cui ho già dato notizia preliminare, negli ultimi due anni.



**Chimica inorganica.** — *Complessi di Ni<sup>II</sup> e Pd<sup>II</sup> con le immidi* (\*).  
 Nota di LIVIO CAMBI, LUIGI CANONICA e RUGGERO DE LEONE,  
 presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Le ricerche che descriviamo costituiscono uno sviluppo di quelle riferite da Cambi e Tremolada<sup>(1)</sup>. Allora fra l'altro venne illustrata la reazione detta del biureto, ponendo in evidenza lo stretto parallelismo dei complessi derivati sia da Cu<sup>II</sup> che da Ni<sup>II</sup>. Si descrivevano anche per la prima volta i complessi derivati da ammidi e immidi, e dai polipeptidi, dei tipi:



dove Immido indica il radicale monocovalente di una imide e Polipeptido il radicale bicovalente di un polipeptide<sup>(2)</sup>.

L'indagine magnetochimica si estese anche ai complessi, già descritti da Tschugaeff<sup>(3)</sup>, del tipo:  $(\text{Immido})_2\text{Ni} \cdot 2 \text{RNH}_2$ .

Due ordini di questioni indussero alle ricerche attuali:

a) la validità della struttura allora assegnata ai complessi, quale risultante da legami covalenti all'azoto, senza l'intervento dei gruppi carbonilici delle immidi;

b) la dipendenza dalla struttura delle immidi del paramagnetismo che, empiricamente, chiameremo residuo, presentato dai complessi predetti, i quali rientrano nel tipo diamagnetico.

Le esperienze riguardano due serie di complessi, di Ni<sup>II</sup> e da Pd<sup>II</sup>: alcalino-tetraimmidici (del tipo descritto da Cambi e Tremolada), diimmido-diamminici (del tipo descritto da Tschugaeff).

Per la prima serie, è risultato che sali di tipo  $[(\text{Immido})_4\text{Ni}]\text{K}_2$  si formano anche con la imide tetrametilsuccinica e la ftalimide<sup>(4)</sup>, nelle quali sono escluse le tautomerie



inoltre, il diamagnetismo completo di alcuni termini fa escludere anche l'intervento della eventuale forma  $-\text{C}(\text{OH})=\text{N}-$ . Cioè i nuovi sali indagati confermano che nei complessi in questione agiscono legami covalenti all'azoto;  $=\text{N}-\text{Ni}-\text{N}=\text{}$ , con analogia al  $[(\text{CN})_4\text{Ni}]\text{K}_2$ , cioè con la struttura più probabile (I):



(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 65, 322 (1935).

(2) Si operò allora con la leucil-glicin-glicina.

(3) « Ber. », 39, 3191 (1906).

(4) Il sale (Ftalimmido)<sub>4</sub>NiK<sub>2</sub>, relativamente instabile, non era stato ottenuto nelle ricerche del 1935 prima citate: è stato da noi ora isolato variando opportunamente il procedimento.

Tale struttura si estende ai complessi gialli, diimmidici-diamminici, di Tschugaeff (II).

Per quanto si riferisce al paramagnetismo che denominammo residuo, è apparsa, per i sali tetraimmidici, la dipendenza dalla simmetria delle immidici della serie succinica.

Il paramagnetismo residuo è nullo, o quasi, con la succinimide e la tetrametilsuccinimide, appare relativamente notevole con i termini della serie non simmetrici, rispetto ai C, C-sostituenti.

La simmetria del radicale covalente determina diverse proprietà dei sali: ad esempio la solubilità in alcool e in cloroformio è scarsa per il sale potassico della succinimide e della tetrametilsuccinimide; è notevolmente maggiore per i complessi della mono,  $\alpha$ - $\beta$ -di e trimetilsuccinimide che non sono simmetriche.

COMPLESSI TETRAIMMIDICI. - Nella tabella I riportiamo i dati delle misure della suscettività magnetica dei complessi alcalino-tetraimmidici descritti nella parte sperimentale, determinati con il metodo di Gouj.

TABELLA I.

	T°K	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6$	$\chi_{\text{Ni}} \cdot 10^6$	mag. Bohr
[(Immido) <sub>4</sub> N]K <sub>2</sub>				
1. Succinimido (*) . . . . .	29I	— 260	+ 30	0,28
2. Monometil-succinimido . . .	29I	+ 60,8	+ 323	0,87
3. $\alpha$ - $\beta$ -dimetil-succinimido . . .	29I	+ 63,1	+ 373	0,94
4. Trimetil-succinimido . . . .	29I	+ 106	+ 472	1,05
5. Tetrametil-succinimido . . . .	29I	— 405	0	0
6. Esaidroftalimido . . . . .	29I	+ 205	+ 586	1,18
7. Ftalimido . . . . .	29I	+ 7,7	+ 309	0,85
[(Immido) <sub>4</sub> Pd]K <sub>2</sub>				
1. Succinimido . . . . .	29I	— 206	+ 19	0,21
2. Ftalimido . . . . .	29I	— 325	+ 25	0,24

(\*) Di questo sale era stata descritta la forma idrata: come i seguenti esso è stato ora ottenuto anidro per essicca-  
mento a 80° nel vuoto.

Sarebbero premature, allo stato delle conoscenze attuali, deduzioni teoriche e generali sui risultati delle misure della  $\chi_{\text{at}}$  su riferite, appaiono però nettamente i fatti cui abbiamo accennato:

a) il paramagnetismo nullo, o quasi, dei complessi delle immidi che presentano la più alta simmetria dei radicali covalenti;

b) la manifestazione generale del paramagnetismo residuo, nei complessi che secondo la teoria approssimata di Pauling dovrebbero risultare diamagnetici.

Tali risultati richiamano le analoghe manifestazioni di altre serie di complessi, studiate da Cambi e collab. <sup>(5)</sup>.

La dipendenza del paramagnetismo residuo dalla configurazione dei radicali covalenti è posta in evidenza dal grafico (fig. 1).

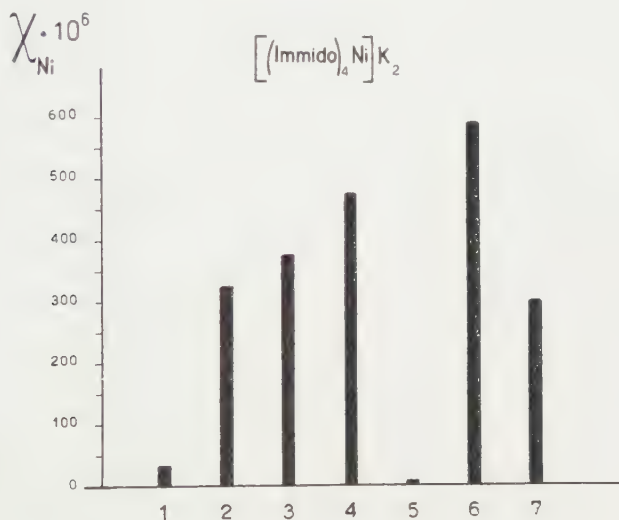
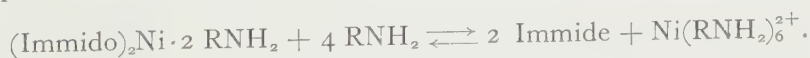


Fig. 1.

- 1) Succinimide; 2) monometil-succinimide; 3)  $\alpha$ - $\beta$ -dimetil-succinimide;  
4) trimetil-succinimide; 5) tetrametil-succinimide; 6) esaidro-ftalimide;  
7) ftalimide.

COMPLESSI DIIMMIDICI-DIAMMINICI. — I nuovi complessi del tipo Tschugaeff, con la ftalimide si ottennero, per  $\text{Ni}^{\text{II}}$ , con la monometil- e la monoetilammina, non si produssero con altre ammine primarie, ad esempio la benzilammina. Non si isolarono dalla monometil- e dalla tetrametilsuccinimide.

Cioè, per la formazione, o meglio per l'isolamento, dei complessi, si presenta la duplice influenza, della imide e della ammina. È probabile che tutto ciò derivi da un equilibrio molteplice tra i complessi di Tschugaeff ed i complessi  $\text{Ni}^{\text{II}}$ -ammonici del tipo:



È ovvio che la minore solubilità dell'immino-amminocomplesso favorisca la formazione di questo.

(5) CAMBI, FERRARI e NARDELLI, «Gazz. Chim. Ital.», 82, 816 (1952).

Con il  $\text{Pd}^{\text{II}}$  è risultato il complesso della succinimide e della dime-tilammina, che attesta la possibilità anche di derivati delle ammine secondarie. Finora vennero isolati per  $\text{Ni}^{\text{II}}$  solamente i sali con le primarie.

Da  $\text{Pd}^{\text{II}}$  viene pure ottenuto un complesso con la tetrametilsuccinimide.

Nella tabella II sono riportati i dati delle misure di magnetismo riferentisi ai complessi isolati e studiati.

TABELLA II.

	$T^{\circ}\text{K}$	$\chi_{\text{mol}} \cdot 10^6$	$\chi_{\text{Me}} \cdot 10^6$	mag. Bohr
$(\text{Immido})_2\text{Ni} \cdot 2 \text{RNH}_2$				
Ftalimide-monometilammina . .	291	+ 330	+ 522	1,12
Ftalimide-monoetilammina . . .	291	— 65,3	+ 150	0,59
$(\text{Immido})_2\text{Pd} \cdot 2 \text{RNH}_2$				
Succinimide-monometilammina .	290	— 151	0	0
Succinimide-dimetilammina . .	290	— 170	0	0
Tetrametilsuccinimide-monometilammina . . . . .	290	— 140	+ 101	0,49
Ftalimide-monometilammina . .	290	— 178	+ 22	0,23

## PARTE SPERIMENTALE.

Tra le immidi impiegate nella presente ricerca, quelle degli acidi mono-, di- e tetrametilsuccinico vennero preparate seguendo sostanzialmente i metodi indicati da Verkade e Hartman <sup>(6)</sup>.

L'acido cis-esaidroftalico, richiesto per la preparazione dell'imide, poteva agevolmente ottenersi per idrogenazione dell'acido ftalico in soluzione acquosa, a  $80^{\circ}$  e pressione ambiente, catalizzatore il rodio su carbone al 5 %.

Operando con un quantitativo di catalizzatore sufficientemente elevato (il 30 % del peso dell'acido ftalico) l'idrogenazione risultava completa in 2-3 h; l'acido ottenuto, p. f.  $173^{\circ}$ - $175^{\circ}$  risulta costituito dall'isomero cis, contenente piccole quantità del trans: può essere direttamente trasformato nella imide secondo Hückel e Muller <sup>(7)</sup>.

*Complessi del tipo  $[(\text{Immido})_4\text{Ni}]\text{K}_2$* 

In  $\text{cm}^3$  20 di soluzione 0,05 di acetato di nichel in etanolo assoluto si discioglievano quattro equiv. della imide.

All'ebollizione si aggiungevano  $\text{cm}^3$  21,6 di idrato potassico alcoolico 0,186 N (quattro equiv.), determinando il viraggio della soluzione dal verde al giallo carico.

(6) « Rec. trov. chim. », 52, 949 (1939).

(7) « Ber. », 64, 1891 (1931).

I complessi generati dalla tetrametilsuccinimide, e della esaidroftalimide, scarsamente solubili in alcool, si separarono in gran parte dalla soluzione lasciata a riposo: ulteriori quantitativi potevano ottenersi evaporando le acque madri a metà del volume iniziale.

Lavati con alcool, questi prodotti, e quelli più avanti descritti, si presentano come polveri microcristalline di colore giallo uovo.

Il complesso della ftalimide è del pari poco solubile in etanolo: decomposto dal solvente a caldo, viene preparato alla temperatura ambiente.

I complessi della mono-;  $\alpha$ - $\beta$ -di-; e trimetilsuccinimide nettamente si differenziano per la loro solubilità dai precedenti: non precipitano dalle soluzioni alcooliche, ma possono ottenersi solo evaporando queste a secco ed estraendoli con cloroformio neutro dal residuo. Il prodotto ottenuto dalla evaporazione della soluzione cloroformica si purifica dalle piccole quantità di imide eventualmente presente digerendolo con benzolo.

La tabella riporta le analisi dei singoli complessi, essiccati come quelli in seguito descritti a 80° nel vuoto, su anidride fosforica.

Immide	N %		Ni %		K %	
	trov.	calc.	trov.	calc.	trov.	calc.
Monometilsuccinica . . . . .	9,21	9,57	9,79	10,02		
$\alpha$ - $\beta$ -dimetilsuccinica . . . . .	3,77	8,73	9,45	9,15		
Trimetilsuccinica . . . . .	7,81	8,03	8,45	8,41		
Tetrametilsuccinica . . . . .	7,61	7,43	7,60	7,78	10,37	10,33
Esaidroftalica . . . . .	7,26	7,51	7,70	7,87		
Ftalica . . . . .	7,76	7,69	7,77	8,13		

L'acqua a freddo lentamente altera i complessi di questo tipo: per riscaldamento a secco essi decompongono oltre 300°.

#### *Complessi del tipo (Immido)<sub>2</sub>Ni·2RNH<sub>2</sub>.*

Grammi 1 di acetato di nichel tetraidrato vengono disciolti con g 1,3 di ftalimide (2 equiv.) in cm<sup>3</sup> 200 di etanolo assoluto. Nella soluzione si introducono a gocce cm<sup>3</sup> 11 di soluzione alcoolica 1,45 N di metilammina o etilammina (4 equiv.): il colore vira dal verde al blu, mentre prende lentamente a separarsi un voluminoso precipitato di colore giallo-chiaro. Dopo 12 ore di riposo a freddo, questo viene raccolto e lavato con alcool. All'analisi:

	N %		Ni %	
	trov.	calc.	trov.	calc.
(Ftalimmido) <sub>2</sub> Ni·2 CH <sub>3</sub> NH <sub>2</sub> . . . .	13,10	13,53	13,85	14,23
(Ftalimmido) <sub>2</sub> Ni·2 C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> HN <sub>2</sub> . . . .	12,30	12,70	13,10	13,31



I due complessi decompongono, con colorazione verde a 235-240°. Relativamente poco stabili, vengono alterati dall'acqua già a freddo; anche la cristallizzazione da alcool caldo determina una forte decomposizione.

La loro formazione è inibita dalla presenza di un eccesso di ammina: dalle soluzioni le quali assumono un intenso colore viola non si ottiene precipitato alcuno.

Da ftalimide e benzilammina, nonché dalle metilsuccinimidi con metil- o etilammina non riesce, operando nel modo descritto, di isolare prodotti analoghi.

*Complessi del tipo [(Immido)<sub>4</sub>Pd] K<sub>2</sub>.*

A causa dell'instabilità dell'acetato di palladio i complessi venivano preparati a partire dal cloruro, introducendo idrato potassico metilalcolico nella soluzione dell'imide e del cloruro in una quantità di alcool metilico sufficiente a tenere disciolto il cloruro potassico, generato dalla reazione.

L'aggiunta dell'alcali determina l'immediata decolorazione del liquido cui segue, operando con la succinimide e la ftalimide, il separarsi del complesso in forma di precipitato cristallino.

Il complesso della tetrametilsuccinimide, assai più solubile, può ottenersi evaporando la soluzione a secco, ed estraendo il residuo con cloroformio, il quale lascia indisciolti il cloruro potassico ed il poco palladio metallico separatosi.

I derivati della succinimide e della tetrametilsuccinimide sono di colore bianco, quello della ftalimide appena debolmente colorato in giallo.

All'analisi:

Imide	N %		Pd %	
	trov.	calc.	trov.	calc.
Succinica . . . . .	9,42	9,70	18,60	18,48
Tetrametilsuccinica . . . . .	7,01	6,95	13,38	13,25
Ftalica . . . . .	7,17	7,28	13,90	13,87

*Complessi del tipo (Immido)<sub>2</sub>Pd·2RNH<sub>2</sub>.*

Si ottengono disciogliendo in cm<sup>3</sup> 120 di metanolo e cm<sup>3</sup> 5 di acqua g 0,5 di cloruro di palladio e g 0,57 di succinimide (o g 0,83 di ftalimide o g 0,88 di tetrametilsuccinimide). Lentamente ed agitando si introducono poi cm<sup>3</sup> 8,7 di ammina in soluzione alcoolica 1,3 N. Il liquido immediatamente decolora: i complessi precipitano lentamente, oppure concentrando nel vuoto a metà del volume iniziale.

Costituiscono in ogni caso polveri cristalline, di colore bianco puro. All'analisi:

	N %		Pd %	
	trov.	calc.	trov.	calc.
(Succinimido) <sub>2</sub> Pd·2CH <sub>3</sub> NH <sub>2</sub> . . .	15,21	15,35	29,40	29,23
(Ftalimido) <sub>2</sub> Pd·2CH <sub>3</sub> NH <sub>2</sub> . . .	12,02	12,15	23,21	23,14
(Tetrametilsuccinimido) <sub>2</sub> Pd·2CH <sub>3</sub> NH <sub>2</sub> . . . . .	11,66	11,68	22,40	22,26
(Succinimido) <sub>2</sub> Pd·2(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> HN . .	14,13	14,26	27,20	27,47

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sui problemi di Cauchy non «ben posti»*<sup>(\*)</sup>.

Nota di CARLO PUCCI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

Sia  $u(x, y)$  una funzione armonica in un dominio internamente connesso e supponiamo che l'intervallo  $(0, 1)$  dell'asse  $x$  sia interno a  $D$ . È noto che la funzione  $u(x, y)$  è determinata dalle due funzioni

$$(1) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u_y(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

risultando  $u_0(x), u_1(x)$  analitiche. È pure noto che  $u(x, y)$  non dipende in modo continuo da  $u_0(x), u_1(x)$  e cioè è possibile determinare due funzioni  $v_0(x), v_1(x)$  che differiscono quanto poco si vuole da  $u_0(x), u_1(x)$  e tali che esiste una funzione armonica  $v(x, y)$  con

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad , \quad v_y(x, 0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

per la quale  $|u(x, y) - v(x, y)|$  è arbitrariamente grande in punti di un prefissato intorno del segmento portante i dati<sup>(1)</sup>. Per tale ragione, siccome nei problemi posti dalla fisica vi è sempre una valutazione approssimata dei dati, è stato considerato non «ben posto» il problema di Cauchy consistente nella determinazione di una funzione  $u(x, y)$  soddisfacente la (1) ed armonica in un intorno del segmento portante i dati<sup>(2)</sup>.

In questa Nota proviamo che anche per tali problemi di Cauchy una conoscenza approssimata dei dati porta ad una possibile approssimazione della soluzione e delle sue derivate. Infatti sussiste il seguente teorema:

*Sia  $u(x, y)$  una funzione armonica in un dominio  $D$ ; l'intervallo  $(0, 1)$  dell'asse  $x$  sia interno a  $D$  ed indichiamo con  $h$  la distanza di tale segmento da  $\bar{\mathcal{D}}$ .*

*Per valori comunque grandi dell'indice  $n$  supponiamo sia possibile una misurazione approssimata di  $u(x, y), u_y(x, y)$  nei  $4n + 1$  punti  $\left(\frac{i}{4n}, 0\right), i = 0, 1, \dots, 4n$ , e cioè sia possibile la determinazione dei numeri  $E_n, \alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}, i = 0, 1, \dots, 4n$ , tali che*

$$(2) \quad \left| u\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \alpha_i^{(n)} \right| \leq E_n \quad , \quad \left| u_y\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \beta_i^{(n)} \right| \leq E_n.$$

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) Basta porre  $v_0(x) = u_0(x), v_1(x) = u_1(x) + 1/n \sin nx$  che risulta  $v(x, y) = 1/n^2 \cdot \sin nx \sinh ny + u(x, y)$  e  $1/n^2 \cdot \sinh ny$  per  $y \neq 0$  è arbitrariamente grande al crescere di  $n$ . Questo esempio è stato dato da HADAMARD, *Cauchy's problem*, New Hawen, 1923, p. 33.

(2) Cfr. HADAMARD op. cit. (1), p. 38.

In corrispondenza alla misurazione relativa all'indice  $n$  si può definire una funzione  $u_n(x, y)$ , data esplicitamente dalla (4), tale che, se

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n e^{8nh}) = 0,$$

la successione  $\{u_n(x, y)\}$  converge uniformemente ad  $u(x, y)$  nel rettangolo  $R \equiv [0 \leq x \leq l, |y| \leq h']$ , ove  $h'$  è un qualsiasi numero positivo minore di  $h$ .

Premettiamo alcune definizioni alla costruzione della funzione  $u_n(x, y)$ . Poniamo  $\Delta_+ \alpha_i^{(n)} = 4n(\alpha_{i+1}^{(n)} - \alpha_i^{(n)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4n-1$ ;  $\Delta_- \alpha_i^{(n)} = 4n(\alpha_i^{(n)} - \alpha_{i-1}^{(n)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4n$ . Definiamo le potenze degli operatori  $\Delta_+$ ,  $\Delta_-$ , per ricorrenza, ponendo  $\Delta_+^s \alpha_i^{(n)} = \Delta_+(\Delta_+^{s-1} \alpha_i^{(n)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4n-s$ ;  $\Delta_-^s \alpha_i^{(n)} = \Delta_-(\Delta_-^{s-1} \alpha_i^{(n)})$ ,  $i = s, s+1, \dots, 4n$ , ove  $s = 2, 3, \dots, 2n$ . Consideriamo le funzioni  $\Delta^s \alpha_i^{(n)}$  dell'indice  $i$  ove  $\Delta$  è un operatore che coincide con  $\Delta_+$  se  $i \leq 2n$ , coincide con  $\Delta_-$  se  $i > 2n$ . Conveniamo inoltre che sia  $\Delta^0 \alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4n$ . Per la definizione data all'operatore  $\Delta$  risulta definita pure la funzione  $\Delta^s \beta_i^{(n)}$  per  $s = 0, 1, \dots, 2n$ , ed  $i = 0, 1, \dots, 4n$ . Fissato  $x$  in  $(0, 1)$  indichiamo con  $i(x)$  il numero naturale che rende minima l'espressione  $|4nx - i|$ ; evidentemente  $0 \leq i(x) \leq 4n$ .

Poniamo

$$(4) \quad u_n(x, y) = \sum_{s=0}^n \frac{y^{2s}}{(2s)!} \Delta^{2s} \alpha_{i(x)}^{(n)} + \sum_{s=0}^n \frac{y^{2s+1}}{(2s+1)!} \Delta^{2s} \beta_{i(x)}^{(n)},$$

e proviamo che la successione  $\{u_n(x, y)\}$  converge uniformemente in  $R$  ad  $u(x, y)$ .

Posto

$$(5) \quad M = \max_D |u(x, y)|,$$

siccome i punti del segmento  $(0, 1)$  dell'asse  $x$  sono centri di cerchi con raggio  $h$  contenuti in  $D$ , essendo  $u(x, y)$  armonica in  $D$  risulta, per  $0 \leq x \leq 1$

$$(6) \quad \left| \frac{\partial^s u(x, 0)}{\partial x^s} \right| \leq 2M \frac{s!}{h^s}, \quad s = 0, 1, \dots$$

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^s u_y(x, 0)}{\partial x^s} \right| \leq 2M \frac{(s+1)!}{h^{s+1}}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Ne segue che la funzione  $u(x, y)$  ha come è ben noto la seguente espressione in  $R$

$$(8) \quad u(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y^{2s}}{(2s)!} \frac{\partial^{2s} u(x, 0)}{\partial x^{2s}} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{\partial^{2s} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s}}.$$

Consideriamo le funzioni, dell'indice  $i$ ,  $u\left(\frac{i}{4n}, 0\right)$ ,  $u_y\left(\frac{i}{4n}, 0\right)$  alle quali possiamo applicare l'operatore  $\Delta$ . Fissato un indice  $r \leq 2n$  proviamo che

$$(9) \quad \left| \Delta^r u\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \Delta^r \alpha_i^{(n)} \right| \leq (8n)^r E_n, \quad i = 0, 1, \dots, 4n$$

$$(10) \quad \left| \Delta^r u_y\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \Delta^r \beta_i^{(n)} \right| \leq (8n)^r E_n, \quad i = 0, 1, \dots, 4n$$

Infatti le (9), (10) sono verificate per la (2) se  $r = 0$  e se sono verificate per un certo valore di  $r < 2n$  sono verificate anche per  $r + 1$  essendo

$$\left| \Delta^{r+1} u \left( \frac{i}{4n}, 0 \right) - \Delta^{r+1} \alpha_i^{(n)} \right| = \left| \Delta \left[ \Delta^r u \left( \frac{i}{4n}, 0 \right) - \Delta^r \alpha_i^{(n)} \right] \right| \leq \\ \leq 4n \cdot 2 \cdot \max_{i=0,1,\dots,4n} \left| \Delta^r u \left( \frac{i}{4n}, 0 \right) - \Delta^r \alpha_i^{(n)} \right|.$$

Fissati gli indici  $i, s$ , con  $i \leq 4n$ ,  $s \leq n$ , esistono due punti  $\xi_1, \xi_2$  dell'intervallo  $(0, 1)$  tali che

$$\Delta^{2s} u \left( \frac{i}{4n}, 0 \right) = \left[ \frac{\partial^{2s} u(x, 0)}{\partial x^{2s}} \right]_{x=\xi_1}, \quad \frac{i-2s}{4n} \leq \xi_1 \leq \frac{i+2s}{4n}, \\ \Delta^{2s} u_y \left( \frac{i}{4n}, 0 \right) = \left[ \frac{\partial^{2s} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s}} \right]_{x=\xi_2}, \quad \frac{i-2s}{4n} \leq \xi_2 \leq \frac{i+2s}{4n}.$$

Per la definizione di  $i(x)$  e per le (6), (7) si ha quindi

$$\left| \frac{\partial^{2s} u(x, 0)}{\partial x^{2s}} - \Delta^{2s} u \left( \frac{i(x)}{4n}, 0 \right) \right| = \left| \left[ \frac{\partial^{2s+1} u(x, 0)}{\partial x^{2s+1}} \right]_{x=\eta_1} (x - \xi_1) \right| \leq \frac{2s+1}{4n} 2M \frac{(2s+1)!}{h^{2s+1}}, \\ \left| \frac{\partial^{2s} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s}} - \Delta^{2s} u_y \left( \frac{i(x)}{4n}, 0 \right) \right| = \left| \left[ \frac{\partial^{2s+1} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s+1}} \right]_{x=\eta_2} (x - \xi_2) \right| \leq \frac{2s+1}{4n} 2M \frac{(2s+2)!}{h^{2s+2}}.$$

Dalle (9), (11) segue

$$(13) \quad \left| \frac{\partial^{2s} u(x, 0)}{\partial x^{2s}} - \Delta^{2s} \alpha_{i(x)}^{(n)} \right| \leq \frac{2s+1}{4n} 2M \frac{(2s+1)!}{h^{2s+1}} + (8n)^{2s} E_n,$$

e dalle (10), (12)

$$(14) \quad \left| \frac{\partial^{2s} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s}} - \Delta^{2s} \beta_{i(x)}^{(n)} \right| \leq \frac{2s+1}{4n} 2M \frac{(2s+2)!}{h^{2s+2}} + (8n)^{2s} E_n.$$

Dalle (4), (8), (13), (14) segue

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{M}{2nh} \left\{ \sum_{s=0}^n (2s+1)^2 \left| \frac{y}{h} \right|^{2s} + \sum_{s=0}^n (2s+1)(2s+2) \left| \frac{y}{h} \right|^{2s+1} \right\} \\ + \sum_{s=0}^n \frac{|y|^{2s}}{(2s)!} (8n)^{2s} E_n + \sum_{s=0}^n \frac{|y|^{2s+1}}{(2s+1)!} (8n)^{2s} E_n \\ + \left| \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{y^{2s}}{(2s)!} \frac{\partial^{2s} u(x, 0)}{\partial x^{2s}} + \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{y^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{\partial^{2s} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s}} \right| \leq \\ \leq \frac{M}{2nh} \sum_{s=0}^{2n+1} (s+1)(s+2) \left| \frac{y}{h} \right|^s + E_n e^{8n|y|} + \sum_{s=2n+2}^{\infty} M \left| \frac{y}{h} \right|^s.$$

Essendo  $|y| \leq h'$  supposto  $n$  abbastanza grande e cioè  $2n+4 > h$  risulta

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{M}{2nh} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+2) \left(\frac{h'}{h}\right)^s + E_n e^{8nh'},$$

cioè

$$(15) \quad |u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{M}{2n} \frac{h^2}{(h-h')^3} + E_n e^{8nh'} \quad \text{per } (x, y) \in R, 2n+4 > h,$$

e per la (3) la successione  $\{u_n(x, y)\}$  è uniformemente convergente ad  $u(x, y)$  in  $R$ , c. v. d.

Una valutazione approssimata delle condizioni iniziali (1) della funzione armonica  $u(x, y)$  permette anche una approssimazione delle sue derivate parziali. Sussiste infatti il seguente teorema.

*Nelle ipotesi del precedente teorema la successione di funzioni*

$$\sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q}}{(2s-q)!} \Delta^{2s+p} \alpha_{i(x)}^{(n)} + \sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q+1}}{(2s-q+1)!} \Delta^{2s+p} \beta_{i(x)}^{(n)}, \quad n=p+q, p+q+1, \dots,$$

*converge uniformemente in  $R$  alla funzione  $\frac{\partial^{p+q} u(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$ .*

Per la (8) è

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{p+q} u(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} - \sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q}}{(2s-q)!} \Delta^{2s+p} \alpha_{i(x)}^{(n)} - \sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q+1}}{(2s-q+1)!} \Delta^{2s+p} \beta_{i(x)}^{(n)} \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q}}{(2s-q)!} \left[ \frac{\partial^{2s+p} u(x, 0)}{\partial x^{2s+p}} - \Delta^{2s+p} \alpha_{i(x)}^{(n)} \right] \right| + \\ & + \left| \sum_{s=0}^{n-p} \frac{y^{2s-q+1}}{(2s-q+1)!} \left[ \frac{\partial^{2s+p} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s+p}} - \Delta^{2s+p} \beta_{i(x)}^{(n)} \right] \right| + \\ & + \left| \sum_{s=n-p+1}^{\infty} \frac{y^{2s-q}}{(2s-q)!} \frac{\partial^{2s+p} u(x, 0)}{\partial x^{2s+p}} + \sum_{s=n-p+1}^{\infty} \frac{y^{2s-q+1}}{(2s-q+1)!} \frac{\partial^{2s+p} u_y(x, 0)}{\partial x^{2s+p}} \right| \end{aligned}$$

e dalle maggiorazioni stabilite nella precedente dimostrazione segue facilmente il teorema.

Osserviamo che se è nota anche una limitazione superiore del modulo di  $u(x, y)$  in  $D$  allora per le (5), (15) può essere determinata una maggiorazione dell'errore di approssimazione  $|u(x, y) - u_n(x, y)|$ . Si ha infatti il seguente immediato corollario: *Sia  $D$  un dominio assegnato del piano  $x, y$ , l'intervallo  $(0, 1)$  dell'asse  $x$  risulti interno a  $D$  ed indichiamo con  $h$  la distanza di tale segmento da  $\mathbb{F}D$ . Di una funzione incognita  $u(x, y)$  sappiamo che è armonica in  $D$  e che*

$$M \geq \max_D |u(x, y)|;$$



conosciamo inoltre una misurazione approssimata di  $u(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  in alcuni punti di  $D$  cioè sono note  $8n + 2$  costanti  $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, \dots, 4n$ , tali che

$$\left| u\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \alpha_i \right|, \quad \left| u_y\left(\frac{i}{4n}, 0\right) - \beta_i \right| < \frac{M}{2nh} e^{-8nh}.$$

Fissato un numero positivo  $h' < h$  la funzione

$$\sum_{s=0}^n \frac{y^{2s}}{(2s)!} \Delta^{2s} \alpha_{i(x)} + \sum_{s=0}^n \frac{y^{2s+1}}{(2s+1)!} \Delta^{2s} \beta_{i(x)} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y \leq h',$$

approssima la funzione incognita  $u(x, y)$  con un errore inferiore a  $Mh^2 n(h - h')^{-1}$ .

Osserviamo che le funzioni  $u_n(x, y)$  danno una misurazione approssimata di  $u(x, y)$  sui lati del rettangolo  $R$  e quindi si può costruire una nuova successione  $\{u_{1,n}(x, y)\}$  uniformemente convergente ad  $u(x, y)$  in un rettangolo  $R'$  interno a  $D$  e che ha in comune con  $R$  solamente un lato. Così procedendo si può costruire una successione uniformemente convergente ad  $u(x, y)$  in qualsiasi dominio interno a  $D$ .

Notiamo inoltre che la dimostrazione del primo teorema è stata ottenuta fondandosi sulla espressione (8) di  $u(x, y)$  e siccome sono state determinate espressioni analoghe per soluzioni di problemi di Cauchy di tipo parabolico od ellittico molto più generali di quello considerato <sup>(3)</sup> le precedenti considerazioni possono essere estese anche a tali problemi non « ben posti ».

A proposito della definizione di problema di Cauchy « ben posto » osserviamo infine quanto segue. Sia  $\{u^{(n)}(x, y)\}$  una successione di funzioni armoniche nel dominio  $D$  considerato verificanti le condizioni iniziali  $u^{(n)}(x, 0) = u_0^{(n)}(x)$ ,  $u_y^{(n)}(x, 0) = u_1^{(n)}(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , e supponiamo inoltre che le successioni  $\{u_0^{(n)}(x)\}$ ,  $\{u_1^{(n)}(x)\}$  convergono uniformemente nell'intervallo  $(0, 1)$  alle funzioni  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ . È noto che fissato un numero positivo  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo la successione  $\{u^{(n)}(x, y)\}$  può non convergere nel rettangolo  $R_\varepsilon \equiv [0 \leq x \leq 1, |y| \leq \varepsilon]$  alla funzione armonica  $u(x, y)$  verificante le condizioni iniziali (1). Purtuttavia per quanto precede è possibile costruire in dipendenza delle funzioni  $u_0^{(n)}(x)$ ,  $u_1^{(n)}(x)$  una funzione  $V_n(x, y)$ , in generale non armonica, tale che la successione  $\{V_n(x, y)\}$  converge uniformemente alla funzione armonica  $u(x, y)$ , in un determinato rettangolo dipendente esclusivamente dal campo di regolarità di tale funzione.

(3) C. PUCCI, *Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali*, « Ann. Mat. pura e appl. », 4, 35, 1953, pp. 129-153.

**Matematica.** — *Sulla esistenza di una curva piana algebrica di ordine 8 con 14 cuspidi e 2 nodi.* Nota di PIETRO CANETTA, presentata (\*) dal Socio O. CHISINI.

È noto che ad ogni curva algebrica piana si può associare un gruppo di numeri interi, detti caratteri plückeriani, soddisfacenti alle equazioni di Plücker. Viceversa non è detto che, dato un tale gruppo di numeri, esista effettivamente una curva piana algebrica che abbia questi numeri come caratteri plückeriani.

Nelle ricerche condotte per assegnare criteri generali di esistenza, si riscontrano risultati contraddittori. Ad esempio, R. Apéry<sup>(1)</sup> afferma la non esistenza delle curve  $C_8$  dell'ottavo ordine, per le quali sia il genere  $p = 5$  ed il numero delle cuspidi  $k > 13$ . D'altra parte C. F. Manara<sup>(2)</sup> dimostra l'esistenza della  $C_8$ , con  $p = 5$  e  $k = 14$  ( $\delta = 2$ ), costruendola come curva di diramazione del piano triplo che si ottiene per proiezione di una superficie del IV ordine, dotata di una retta doppia nodale  $r$  e di due punti doppi conici e due biplanari, fuori di  $r$ , proiezione fatta da un punto generico della superficie stessa.

Ora, in tre Note recenti<sup>(3)</sup>, O. Chisini ha dimostrato che esiste ogni curva della quale si possa costruire la treccia a partire da quella corrispondente ad una curva esistente, con variazioni che riflettano la modifica della forma dei cappi dipendente dal loro ordinamento o dalla fusione in uno di due o più tratti consecutivi in modo da formare  $\delta$  nodi e  $k$  cuspidi, con la limitazione:

$$\delta + 2k < \frac{n(n+3)}{2} - 3.$$

Vogliamo qui utilizzare tale risultato per dare una dimostrazione della esistenza della curva piana irriducibile dell'ottavo ordine, di genere cinque, avente quattordici cuspidi (e due nodi), costruendone la treccia: a conferma del risultato di C. F. Manara.

Per costruire la nostra treccia, partiamo da quella, data da C. Tibiletti<sup>(4)</sup> relativa alla curva dell'ottavo ordine con nove cuspidi e dodici nodi, la cui forma è la seguente:

$$35^3 \ 34(5)^3 \ 45^3 \ 56(34) \ 78 \ 34 \ 37^2 \ 38^2 \ 47^2 \ 48^2 \ 67^3 \ 78(6)^3 \ 68^3 \ 12 \ 13^2 \ 14^2 \ 23^2 \\ 24^2 \ 15^3 \ 12(5)^3 \ 25^3 \ 56(12, 7^{-1}, 8^{-1}) \ 17(6)^2 \ 18(6)^2 \ 27(6)^2 \ 28(6)^2.$$

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) R. APÉRY, *Sur la non existence de courbes planes de VIII<sup>me</sup> degré de genre 5 admettant  $r \geq 14$  rebroussements*, «C. R. Acad. Sci. de Paris», 214 (1942).

(2) C. F. MANARA, *Sull'esistenza di curve algebriche piane irriducibili, aventi dati caratteri plückeriani*, «Boll. Unione Mat. Ital.» ser. 3, vol. 6 pp. 9-14 (1951).

(3) O. CHISINI, *Il teorema di esistenza delle trecce algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», 1954, Nota I, p. 143, sed. 13 novembre 1954; Nota II, p. 397, sed. 11 dicembre 1954; Nota III, p. 8, sed. 15 gennaio 1955.

(4) C. TIBILETTI, *Piani tripli e piani quadrupli colla stessa curva di diramazione*, «Rend. Acc. Lincei», p. 537 (1952).

Operiamo come qui indicato:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 35^3 & 34(5)^3 & 45^3 & 56(34) & 78 & 34 & 37^2 & 38^2 & 47^2 & 48^2 & 67^3 & 78(6)^3 & 68^3 & 12 & 13^2 & 14^2 & 23 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow \\
 23 & 24^2 & 15^3 & 12(5)^3 & 25^3 & 56(12, 7^{-1}, 8^{-1}) & 17(6) & 17(6) & 18(6)^2 & 27(6)^2 & 28(6) & 28(6) & & & & & & 
 \end{array}$$

otteniamo <sup>(5)</sup>

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 35^3 & 34(5)^3 & 45^3 & 56(34) & || & 78 & 37^2 & 38^2 & 47^2 & 48^2 & 34 & || & 67^3 & 78(6)^3 & 68^3 & || & 12 & 13^2 & 23 & 14^2 \\
 23 & 24^2 & 15^3 & 12(5)^3 & 25^3 & 56(12, 7^{-1}, 8^{-1}) & 17(6) & 78 & || & 78 & 17(6) & 28(6) & 78^2 & 28(6) & & & & & & 
 \end{array}$$

Notoriamente <sup>(6)</sup> il gruppo

$$78 \ 37^2 \ 38^2 \ 47^2 \ 48^2 \ 34$$

può venire trasformato in:

$$37^3 \ 34(7)^3 \ 47^3 \ 78(34)$$

Dal gruppo

$$12 \ 13^2 \ 23$$

otteniamo con l'operazione

$$\begin{array}{|c|}
 \hline
 \downarrow \\
 \hline
 12 \quad \left| \begin{array}{cc} 13^2 & 23 \\ \hline \end{array} \right. \\
 \hline
 \end{array}$$

il gruppo

$$13(2) \ 12^3$$

ed infine, da

$$78 \ 17(6) \ 28(6) \ 78^2 \ 28(6)$$

otteniamo con la

$$\begin{array}{ccccccc}
 78 & 17(6) & 28(6) & 78^2 & 28(6) \\
 \hline
 & & & \uparrow & \\
 \hline
 \end{array}$$

il gruppo

$$18(6) \ 27(68) \ 78^3 \ 28(6).$$

Perveniamo così alla treccia

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 35^3 & 34(5)^3 & 45^3 & 56(34) & 37^3 & 34(7)^3 & 47^3 & 78(34) & 67^3 & 78(6)^3 & 68^3 & 13(2) & 12 & 14^2 \\
 23 & 24^2 & 15^3 & 12(5)^3 & 25^3 & 56(12, 7^{-1}, 8^{-1}) & 17(6) & 78 & 18(6) & 27(68) & 78^3 & 28(6) & & 
 \end{array}$$

nella quale i quattordici cubi stanno a rappresentare le quattordici cuspidi ed i due quadrati i due nodi.

Tale treccia viene rappresentata nella seguente figura (divisa in due parti, per necessità tipografiche, data la lunghezza).

(5) M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazioni*, « Rend. Ist. Lombardo », 1950 adunanza del 15 giugno 1950, vol. LXXXIII.

(6) C. TIBILETTI, *Costruzione a priori della sestica con 9 cuspidi*, « Rend. Ist. Lombardo », 1952, Adunanza del 17 aprile 1952, vol. LXXXV, p. 207.

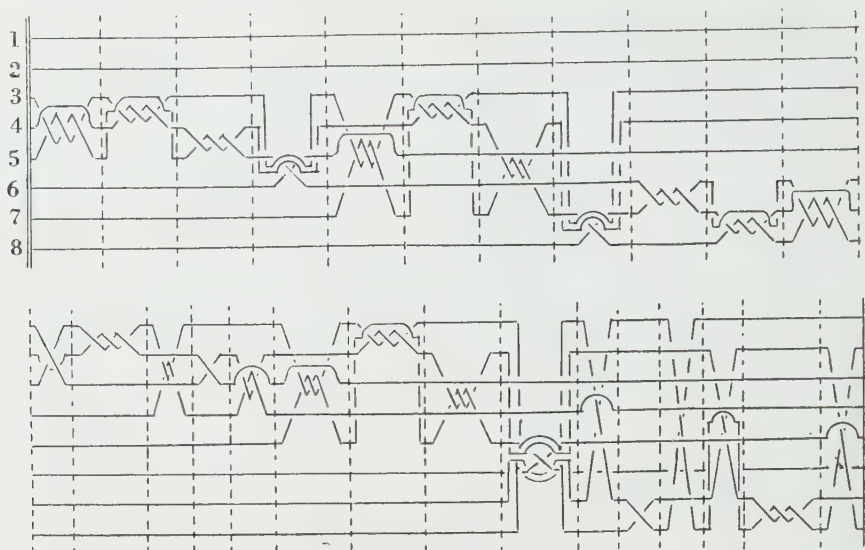


Fig. 1.

Possiamo ora anche verificare sulla treccia che la nostra curva è di diramazione per un piano triplo le cui tre determinazioni  $z_1, z_2, z_3$  vengono scambiate tra loro secondo gli scambi

$$(z_1, z_2) (z_1, z_2) (z_1, z_2) (z_1, z_2) (z_1, z_3) (z_1, z_3) (z_2, z_3) (z_2, z_3)$$

ordinatamente associati ai successivi fili della treccia.

**Geometria.** — *La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante.* Nota di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI, presentata (\*) dal Socio O. CHISINI.

1. Sia data la treccia  $T_\varphi$  di una curva  $\varphi$  diramante un piano multiplo  $F$  (e ne sia  $\Psi$  un modello proiettivo) e sui fili di  $T_\varphi$  (all'inizio della treccia) siano deposte — relativamente al solito sistema di cappi<sup>(1)</sup> — le sostituzioni fra le determinazioni della  $z = z(x, y)$  definita da  $F$ .

Una tale treccia, sui cui fili siano deposte le sostituzioni relative ad un piano multiplo, la chiameremo, come già altrove<sup>(2)</sup>, *treccia di diramazione* o *treccia diramante*.

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) Cfr. per esempio O. CHISINI, *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, 19 (1934); M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*, « Rend. Ist. Lombardo », 88 (1950) e C. TIBILETTI, *Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, 12 (1952).

(2) Cfr. C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Trecce algebriche di curve di diramazione: costruzioni ed applicazioni*, « Rend. Sem. Matem. Univ. di Padova », 24 (1955), n. 1.

Ora, come è ben noto, la treccia di diramazione  $T_\varphi$  è rappresentativa non solo della famiglia dei piani multipli diramati da  $\varphi$  e birazionalmente identici (ad F), ma anche di tutte le (infinite) analoghe famiglie di piani multipli (derivanti per continuità dai precedenti) diramati dalle curve  $\varphi'$  ottenute dalla  $\varphi$  con una variazione continua che non ne alteri i caratteri plückeriani.

Ovviamente, i caratteri aritmetici delle superficie fornite dai precedenti piani multipli diramati da  $T_\varphi$  — che siano invarianti per le suddette trasformazioni birazionali e continue — risultano funzioni solo dei *caratteri aritmetici* e dei *caratteri di forma* della treccia  $T_\varphi$ .

Si pone però il problema di leggere effettivamente sulla treccia i caratteri più importanti di questo tipo. Fra tali caratteri vi sono il *genere aritmetico*, il *genere lineare*, il *genere geometrico* e l'*irregolarità*.

Quanto ai primi due, essi dipendono dai soli *caratteri aritmetici* della treccia, perché dati da ben note formule<sup>(3)</sup> in cui entrano solamente i numeri plückeriani della curva di diramazione  $\varphi$  e l'ordine del piano multiplo; pertanto il genere aritmetico e il genere lineare si vedono subito sulla treccia  $T_\varphi$ , e di solito sono già noti *a priori*.

Rimangono da leggere sulla treccia di diramazione i valori del *genere geometrico* e dell'*irregolarità*; ma basta valutare uno solo di questi caratteri in quanto, come è noto; il genere geometrico si ottiene dal genere aritmetico e dall'*irregolarità*.

In questa Nota mostreremo come si trova effettivamente il valore della irregolarità esaminando una treccia diramante  $T_\varphi$ .

Notiamo subito che in tale determinazione (a differenza di quanto accade per gli altri caratteri sopra ricordati) entrano sostanzialmente anche i caratteri di forma della treccia, caratteri che, in realtà, danno il gruppo di Poincaré del piano bucato secondo la curva  $\varphi$  stessa<sup>(4)</sup>.

2. Vediamo dunque come si legge l'irregolarità su una data treccia di diramazione  $T_\varphi$  (di una curva  $\varphi$ , diramante un piano multiplo F): supponiamo anzi che la  $T_\varphi$  contenga anche punti doppi e cuspidi inessenziali<sup>(5)</sup>; ciò

(3) Precisamente per il genere aritmetico  $p_a$  e il genere lineare  $p^{(1)}$  si ha

$$4p_a = n + P - 3p - \frac{k}{3} - 2 \quad \text{e} \quad p^{(1)} = P - 9p + 9$$

ove  $n$  è l'ordine del piano multiplo F, P il genere della curva di diramazione  $\varphi$ ,  $p$  il genere della sezione piana  $f$  di F con un piano per il centro di proiezione  $Z_\infty$ , e  $k$  il numero delle cuspidi di  $\varphi$ . Cfr. per esempio F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Bologna, Zanichelli, 1949, cap. V, n. 6.

(4) Ovviamente, con tale dicitura ci si riferisce ad una Riemanniana del piano proiettivo complesso bucato in corrispondenza della curva  $\varphi$ .

(5) Quanto al significato degli aggettivi «essenziale» ed «inessenziale» applicati alle singolarità cfr. per esempio F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, «Annali di Matem. pura e appl.», ser. IV, 1 (1924); e C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Sostituzioni legate ad una curva di diramazione che possa degenerare in parti doppie*, «Ann. di Matem. pura ed appl.», ser. IV, 37 (1954) nota<sup>(2)</sup>.



equivale a supporre che la corrispondente superficie  $\Psi$  possa contenere (oltre alle singolarità ordinarie) eventualmente anche punti doppi conici e biplanari.

È noto che il doppio dell'irregolarità di una superficie  $\Psi$  è il numero dei suoi cicli lineari <sup>(6)</sup> indipendenti (indice di connessione lineare) <sup>(7)</sup>.

Come pure noto, ogni ciclo lineare di una superficie  $\Psi$  è omologo (mod.  $\Psi$ ) a un ciclo di una sezione piana  $\psi$  di  $\Psi$  <sup>(8)</sup> e vi possono essere cicli lineari di  $\Psi$  che sono omologhi a zero su  $\Psi$  e non su  $\psi$ . Tali cicli si riducono (su  $\Psi$ ) a cicli nulli in corrispondenza alle sezioni piane di un fascio (contenente  $\psi$ ) tangenti alla  $\Psi$  o passanti per punti doppi isolati (conici o biplanari) di  $\Psi$  <sup>(9)</sup>.

Ora, per conoscere l'irregolarità, basterà valutare (sulla treccia) il numero di questi ultimi cicli indipendenti.

A tal fine consideriamo le sezioni  $S_x$ , reali dello spazio ordinario, fatte con piani paralleli ai setti della treccia  $T_\varphi$  e ricordiamo che i punti  $y_1, y_2, \dots, y_N$  comuni, via via, ai fili della treccia e a tali  $S_x$  rappresentano i punti di diramazione delle rette multiple date da sezioni  $f_x$  di  $F$  fatte con piani (proiettivi complessi)  $x = \text{cost.}$

Ricordiamo ancora che, più precisamente, le precedenti  $S_x$  (ed  $f_x$ ) risultano relative ai vari valori della  $x$  rappresentati dai punti del piano  $\pi_x$  (della variabile complessa  $x$ ) appartenenti alla linea che costituisce il sistema di cappi (intorno ai punti critici  $a_i$ ) costruttori della treccia — aventi origine, per esempio, nel punto  $x = 0$  <sup>(10)</sup>.

Inoltre su ciascuno di tali  $S_x$  è determinato un sistema di cappi  $c_i$  avvolgenti i punti  $y_i$ , cappi che hanno una stessa origine  $\Omega_\infty$  nel punto improprio delle  $S_x$  stesse, in direzione perpendicolare (press'a poco) ai fili della treccia (provenendo dal semipiano posto sotto i fili della treccia) <sup>(11)</sup>; a tali cappi sono relative, all'inizio della treccia, le sostituzioni deposte rispettivamente sui fili della treccia  $T_\varphi$ , sostituzioni che si trasportano per continuità (al variare di  $x$ ) sulle varie  $S_x$ , eventualmente modificandosi per attraversamento di cappi da parte di punti  $y_i$ . In particolare, i setti divisori dei vari tratti individuano una stessa sezione  $S_0$ , in quanto rappresentano tutti la sezione,  $f_0$ , del piano multiplo  $F$  con il piano  $x = 0$ .

(6) Naturalmente si pensa qui ad una (qualsiasi) Riemanniana della  $\Psi$  e ai cicli lineari di questa. Spesso, anche nel seguito, si useranno diciture abbreviate di questo tipo, ma il senso risulterà chiaro dal contesto.

(7) Cfr. per esempio S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la Géométrie algébrique*, Paris, Gauthier Villars, 1924, cap. III, n. 5.

(8) Cfr. per esempio F. SEVERI, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », 21 (1906); S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7) cap. III, nn. 3 e 4 e O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, « Ergebnisse der Mathem. », Chelsea Publ. Comp., New York, 1948, cap. VI, n. 7.

(9) Cfr. per esempio S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7), cap. II, § II.

(10) Cfr. O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, « Rend. Ist. Lombardo », 66, § 2.

(11) Cfr. luoghi citati in (1).

Ora fra i punti critici  $a_i$  segnati su  $\pi_x$  (intorno a cui sono avvolti i cappi del sistema costruttore della treccia) consideriamo quelli che danno i piani  $f_x$  tangenti (semplicemente) alla superficie  $\Psi$  o passanti per i suoi punti doppi isolati.

Sulla treccia  $T_\varphi$  i primi corrispondono a *contatti* (della  $\varphi$  con rette parallele all'asse  $y$ ) e i secondi a *punti doppi e cuspidi inessenziali*.

Siano  $a_1, a_2, \dots, a_v$  tali punti critici e siano  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_v$  i rispettivi tratti della treccia.

Per esempio, per  $x = a_i$  vadano a coincidere (su  $S_{a_i}$ ) i due punti  $y_1$  ed  $y_2$ ; in una sezione  $S'_x$ , abbastanza prossima ad  $S_{a_i}$ , consideriamo il ciclo  $\delta'_i$  omologo a quello dato dalla coppia di cappi  $c'_1$  e  $c'_2$  (provenienti da  $\Omega_\infty$ , come è detto sopra, e) circondanti i punti  $y_1$  ed  $y_2$ , rispettivamente percorsi (nello stesso senso, a partire da  $\Omega_\infty$ ) uno dopo l'altro. Il ciclo  $\delta'_i$  può essere rappresentato da un breve doppio cappio (materialmente un elastico) che avvolge i fili relativi ai suddetti  $y_1$  e  $y_2$ , in prossimità del punto in cui si incrociano.

Variando per continuità la precedente sezione  $S'_x$  fino a raggiungere uno dei setti limitanti il tratto  $\sigma_i$ , tale ciclo  $\delta'_i$ , muovendosi nello spazio (ordinario) bucato lungo la treccia, diventa un certo ciclo  $\delta_i$  di  $S_0$  (cioè un ciclo della Riemanniana di  $f_0$ ).

Ciò posto, sono proprio i cicli  $\delta_i$  che, se non sono già senz'altro nulli sulla sezione <sup>(12)</sup>, si perdono nel passare dalla sezione piana  $\psi$  — per noi la  $f_0$  di genere  $p$  noto (a partire dai dati) — alla superficie  $\Psi$ , che dà il piano multiplo  $F$ . Tali  $\delta_i$  però di solito rappresentano una base sovrabbondante del sistema di tutti i cicli che si perdono nel passare da  $\psi$  a  $\Psi$  <sup>(13)</sup>; ora si tratta di valutare il numero dei cicli  $\delta_i$  indipendenti. Notiamo senz'altro che in questa valutazione non sarà necessario scartare, *a priori*, quei cicli  $\delta_i$  che, come sopra accennato, risultano nulli.

Secondo un classico procedimento di Lefschetz <sup>(14)</sup>, il numero dei  $\delta_i$  indipendenti è fornito dalla caratteristica  $\rho$  della matrice

$$(I) \quad \|\ [\gamma_i \delta_k] \|$$

ove  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$  sono un sistema di  $2p$  cicli indipendenti della sezione  $f_0$  (cioè su  $S_0$ ) e i simboli  $[\gamma_i \delta_k]$  sono gli indici di Kronecker di  $\gamma_i$  e  $\delta_k$  <sup>(15)</sup>.

Questi indici di Kronecker, e conseguentemente la caratteristica  $\rho$ , si leggono agevolmente sulla treccia, nel modo che dettagliatamente indicheremo nei nn. 3 e 4.

L'irregolarità è poi  $p - \rho/2$ .

(12) Ciò accade quando la sezione  $f_{a_i}$  (relativa ad  $S_{a_i}$ ) mantiene il genere della generica  $f_x$  (e perciò si spezza con staccamento di una parte razionale).

(13) Cfr. S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7), cap. II, § II.

(14) Cfr. S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7), cap. II, n. 18, e O. ZARISKI, loc. cit. in (8) cap. VI, nn. 6 e 7.

(15) Cfr. per esempio S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7), cap. I, §§ II e III, ed F. SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica*, raccolte da B. SEGREGÈ, Roma 1927, cap. XXXI.

3. Mostriamo ora, su un esempio (caratteristico), come si determini effettivamente l'irregolarità a partire dalla treccia di diramazione; diremo poi (ved. n. 4) come si proceda in generale.

Consideriamo la treccia  $T_\varphi$  della sestica con nove cuspidi pensata quale curva di diramazione di un piano triplo  $F$ , treccia costruita e trattata altrove <sup>(16)</sup>.

Ne ripetiamo solo il disegno (ved. fig. 1) segnando accanto ai fili (all'inizio della treccia) le relative sostituzioni sulle determinazioni  $z_1, z_2, z_3$  del piano triplo da essa diramato.

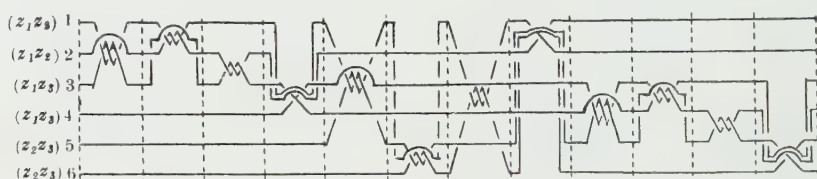


Fig. 1.

Fissiamo l'attenzione sulla sezione  $S_0$  (uno qualsiasi dei setti della treccia): siano  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$  i suoi punti comuni, rispettivamente, ai fili 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il piano di  $S_0$  tagliato lungo i segmenti  $y_1 y_2, y_3 y_4, y_5 y_6$  (che hanno per estremi punti in cui sono deposte sostituzioni uguali sulle  $z_i$ ) fornisce una Riemanniana (a fogli) della sezione piana  $f_0$  di  $F$ .

Assumiamo (vedi fig. 2) come cicli base  $\gamma_i$  i due (il genere di  $f_0$  è  $p = 1$ )  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che circondano rispettivamente i punti  $y_1 y_2$  e i punti  $y_2 y_4 y_6$ .

I cicli  $\delta_i$ , di cui al n. 2, qui sono 3 e si hanno in relazione ai contatti  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  rappresentati rispettivamente dai tratti  $4^\circ, 8^\circ, 12^\circ$  della treccia; essi si ottengono rispettivamente (in base alla forma dei tratti  $\sigma_i$ ) dai cicli  $\delta'_i$  — che circondano (presso il punto d'incrocio) i due fili che si scambiano in  $\sigma_i$  — trasportando i  $\delta'_i$  stessi fino ad uno dei setti separatori di  $\sigma_i$ , con deformazione (continua) entro lo spazio bucato dalla treccia <sup>(17)</sup>.

Nella fig. 2 è rappresentata la sezione  $S_0$  (o meglio la suddetta Riemanniana a fogli di  $f_0$ ) con i punti  $y_i$ , i tagli e cicli  $\gamma_i$  orientati (con un arbitrario orientamento); inoltre è segnato il ciclo  $\delta_1$ , pure orientato <sup>(18)</sup>.

Convieni qui far attenzione che per punti caratteristici dei singoli circuiti è indicato con uno dei numeri 1, 2, 3 il foglio della Riemanniana cui

(16) Cfr. C. TIBILETTI, *Costruzioni a priori della sestica con nove cuspidi*, « Rend. Ist. Lombardo », 85 (1952) e C. TIBILETTI, loc. cit. in <sup>(1)</sup>.

(17) Dall'esame della treccia appare che per i cicli  $\delta_i$  di questo esempio si realizza la circostanza presentata nella nota <sup>(12)</sup>. Ciò non infirma però il carattere di generalità del procedimento indicato.

(18) Notiamo che mutando l'orientamento di un ciclo cambiano segno gli elementi di una linea della matrice che ci interessa, il che non ha alcuna influenza sul calcolo della relativa caratteristica.

essi appartengono, foglio rappresentativo rispettivamente dei valori  $z_1, z_2, z_3$ : ciò specialmente in relazione ai punti prossimi ai tagli.

Dall'esame della figura si ricava  $[\gamma_1 \delta_1] = 0$  e  $[\gamma_2 \delta_1] = 0$ . Procedendo in modo analogo per gli altri due cicli  $\delta_2$  e  $\delta_3$  si ha

$$\begin{vmatrix} [\gamma_1 \delta_1] & [\gamma_1 \delta_2] & [\gamma_1 \delta_3] \\ [\gamma_2 \delta_1] & [\gamma_2 \delta_2] & [\gamma_2 \delta_3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Poiché la caratteristica di questa matrice è 0, l'irregolarità  $q$  è 1 (essendo  $p = 1$ )<sup>(19)</sup>.

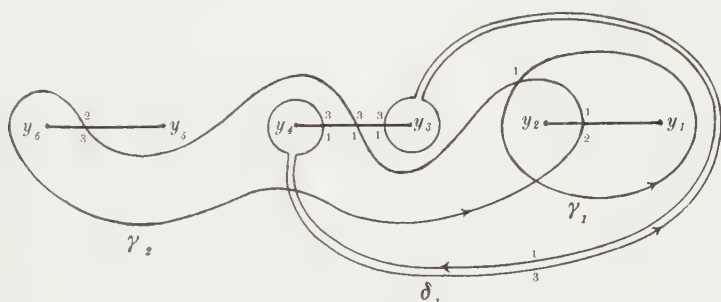


Fig. 2.

Volendo, nel precedente computo si poteva rinunciare alla figura e procedere nel modo seguente.

Detti  $c_i$  i cappi di  $S_0$  (ved. n. 2) intorno ai punti  $y_i$  (cappi dotati di un certo orientamento) si esprimono i cicli  $\gamma_i$  e  $\delta_i$  per mezzo di essi, in particolare, usando per i  $\delta_i$  le relazioni del gruppo di Poincaré fornite dai rispettivi tratti  $\sigma_i$  della treccia.

Nel nostro caso si ha:

$$\gamma_1 = c_1 c_2 \quad \gamma_2 = c_2 c_4 c_6$$

$$\delta_1 = (c_1 c_2) c_3 (c_1 c_2)^{-1} c_4$$

$$\delta_2 = c_1 (c_5 c_6)^{-1} c_2 (c_5 c_6)$$

$$\delta_3 = (c_3 c_4) c_5 (c_3 c_4)^{-1} c_6.$$

Si calcolano poi gli indici di Kronecker  $[\gamma_i \delta_k]$  tramite quelli  $[c_r c_s]$  dei cappi  $c_i$ <sup>(20)</sup> che si valutano subito *a priori*.

4. Per una treccia  $T_\varphi$  generica si usa un procedimento del tutto analogo a quello del precedente esempio.

(19) Ciò è in accordo col fatto, noto, che fra i piani tripli diramati dalla nostra treccia vi è quello dato dalla superficie del IV° ordine, con due rette doppie sghembe, proiettata da un suo punto semplice. È pure noto che tale superficie ha irregolarità 1.

(20) Cfr. per esempio S. LEFSCHETZ, loc. cit. in (7) cap. I, § III e F. SEVERI, loc. cit. in (15), cap. XXXI.



Si dà, come sopra, una Riemanniana a fogli di  $f_0$  (su  $S_0$ ) con i tagli (che uniscono coppie di punti  $y_i$  portanti uguali sostituzioni sulle determinazioni del piano multiplo) e un sistema di cicli (indipendenti)  $\gamma_i$ , orientati. Si individuano poi sulla treccia i tratti  $\sigma_i$  e - come nell'esempio - si segnano sulla precedente Riemanniana i cicli (orientati)  $\delta_i$ .

Si rilevano quindi, dalla figura di tale Riemanniana, gli indici di Kronecker  $[\gamma_i \delta_k]$  e la caratteristica della relativa matrice.

Anche qui, se non si vuol ricorrere ad una figura, si esprimono i cicli  $\gamma_i$  e  $\delta_i$  in funzione dei cappi - orientati -  $c_i$  (ved. n. 2) intorno ai punti  $y_i$  di  $S_0$  e quindi si calcolano gli indici di Kronecker  $[\gamma_i \delta_k]$  come combinazioni degli indici  $[c_r c_s]$  <sup>(21)</sup>.

**Geometria.** — *Sui punti stazionari di forme differenziali meromorfe sopra una varietà complessa compatta.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

Lo studio dei punti stazionari degli integrali semplici sopra una varietà algebrica  $V$ , di dimensione  $v > 1$ , è stato iniziato da F. Severi nella Memoria [11] <sup>(1)</sup>, nella quale vengono considerati gli integrali di prima, seconda e terza specie sopra una superficie algebrica,  $F$ , dotati di un numero finito od infinito di punti stazionari. La ricerca di Severi è stata ripresa da J. A. Todd [13] e da W. V. D. Hodge [5], i quali hanno determinato i punti stazionari, *supposti in numero finito*, di un integrale di prima specie semplice o  $(v-1)$ -plo sopra  $V$ , e da M. Eger [2], il quale ha considerato particolari sistemi di integrali semplici di prima specie su  $V$ , associando ad essi le varietà canoniche di  $V$ . In un lavoro in corso di stampa [14] abbiamo determinato le classi di omologia in  $V$  dei luoghi dei punti stazionari di certi sistemi di integrali  $(v-1)$ -pli di prima specie, analoghi ai sistemi di integrali semplici considerati da Eger.

Mentre in [11] F. Severi considera un *qualsiasi* integrale semplice su  $F$ , ed esaurisce per esso l'esame dei due casi possibili, secondoché il luogo dei punti stazionari sia *regolare*, cioè consti di un gruppo finito di punti, oppure *irregolare*, ossia costituisca una curva algebrica di  $F$ , negli altri lavori testé citati viene esaminato soltanto il caso di integrali o sistemi di integrali di prima specie semplici o  $(v-1)$ -pli, aventi un luogo di punti stazionari di dimensione  $d$  *regolare* nel senso che verrà precisato più avanti. Lo studio esauriente del caso in cui tale dimensione non sia regolare appare estremamente difficile in quanto, a differenza di ciò che accade su  $F$ , se  $v > 2$ ,

(21) Cfr. nota <sup>(20)</sup>.

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) I numeri in parentesi quadre rinviano alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.



$d$  può assumere in generale più di due valori; ad esempio, il luogo dei punti stazionari di un integrale semplice o  $(v-1)$ -plo su  $V$  può constare di un gruppo finito di punti (caso regolare) oppure di una curva, di una superficie, ..., di un'ipersuperficie algebrica di  $V$ .

Nella presente Nota inizieremo tale studio considerando, su una varietà complessa compatta,  $M$  (non necessariamente algebrica), di dimensione complessa  $m \geq 1$ , certi sistemi analoghi, a quelli che compaiono in [2] ed in [14], di forme differenziali *meromorfe* aventi un luogo di punti stazionari di dimensione eguale alla massima possibile. Nei nn. 3-5 - sulla base di alcuni risultati generali conseguiti in [8] e [14], sui quali vertono i nn. 1 e 2 - determineremo la classe di omologia di tale luogo, in funzione delle classi di omologia delle varietà polari degli integrali considerati e delle classi di Chern di  $M$ , ritrovando come caso particolare, e con qualche necessaria precisazione ulteriore, una formula stabilita da E. G. Kundert nella prima parte di [9].

1. Siano dati su un sottoinsieme aperto,  $P$ , della varietà complessa compatta  $M$ , di dimensione complessa  $m \geq 1$ ,  $r$  campi di vettori complessi covarianti,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) di classe  $C^\infty$  <sup>(2)</sup> l' $j$ -esimo  $\mathbf{v}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) dei quali abbia peso  $(w_j, \bar{w}_j)$ , cioè sia tale che, essendo  $z^1, z^2, \dots, z^m$  e  $z^{1'}, z^{2'}, \dots, z^{m'}$  due sistemi di coordinate complesse uniformizzanti due intorni  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{A}'$ , tali che  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \cap P \neq \emptyset$ , appartenenti ad un medesimo sistema fondamentale di intorni,  $\{\mathfrak{A}\}$ , relativo alla struttura complessa definita in  $M$ , le componenti  $v_{j\alpha}$  e  $v_{j\alpha'}$  di  $\mathbf{v}_j$  in un punto  $\zeta \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \cap P$ , rispetto alle coordinate locali  $z^\alpha$  e  $z^{\alpha'}$ , siano legate dalla relazione

$$v_{j\alpha'} = \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|^{w_j} \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right|^{\bar{w}_j} v_{j\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\alpha'}} \quad (\alpha, \alpha' = 1, 2, \dots, m),$$

ove  $w_j$  e  $\bar{w}_j$  sono due interi relativi, e  $\left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|$  e  $\left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right|$  rappresentano il determinante jacobiano  $\frac{\partial (z^1, z^2, \dots, z^m)}{\partial (z^{1'}, z^{2'}, \dots, z^{m'})}$  ( $\neq 0$ ) ed il suo complesso coniugato. Converrà per il seguito assimilare ciascuno degli  $r$  campi di vettori  $\mathbf{v}_j$  ad un campo di vettori assegnato su tutta la varietà  $M$ , e non soltanto su  $P$ , convenendo di dare il nome di punto singolare di  $\mathbf{v}_j$  non solo - come abbiamo fatto fino ad ora - ai punti nei quali le  $m$  componenti di  $\mathbf{v}_j$  sono definite e si annullano simultaneamente, ma anche ad ogni punto di  $M$  in cui qualcuna di tali componenti non sia definita. A questa convenzione ci atterremo tacitamente in tutto il seguito.

Qualora sia  $m > 1$ , denotiamo con  $\mathcal{S}$  la struttura  $\mathcal{S}/P_{m-1} = M$  <sup>(3)</sup> fibrata dagli elementi lineari complessi tangenti a  $M$ , avente come base  $M$ , come

(2) Per le nozioni di varietà complessa e di vettore complesso cfr. ad esempio [1], [3] o qualcuna delle opere citate in [14].

(3) Per le nozioni e la nomenclatura della teoria degli spazi fibrati ci riferiamo al trattato [12] di STEENROD; cfr. anche il § 1 di [8].

fibra uno spazio proiettivo complesso,  $P_{m-1}$ , di dimensione reale  $2m-2$ , riferito alle coordinate proiettive omogenee  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , e come gruppo strutturale il gruppo proiettivo unitario. Consideriamo una triangolazione (finita),  $M^{2m}$ , di  $M$ , tanto sottile che la serratura di ogni  $2m$ -simplexso  $\sigma^{2m} \in M^{2m}$  sia tutta contenuta in un intorno di  $\{\mathfrak{A}\}$ , e supponiamo che  $(i_1)$  sullo scheletro  $M^k$  di dimensione  $k=1$  di  $M$  non cada nessun punto singolare di  $\mathbf{v}_j$ . Supponiamo inoltre  $(i_2)$  che corrispondentemente al vettore  $\mathbf{v}_j$  sia data in  $M$  una coppia di funzioni complesse e, per ogni  $\mathfrak{A} \in \{\mathfrak{A}\}$ , un ricoprimento di  $\mathfrak{A} \cap M^k$  - con  $k=2$  se  $m=1$ , e  $k=3$  se  $m>1$  - mediante un numero finito di insiemi aperti  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A},1}, \mathfrak{A}_{\mathfrak{A},2}, \dots, \mathfrak{A}_{\mathfrak{A},n} \subseteq \mathfrak{A}$ , in ciascuno dei quali le rappresentazioni locali  $\varphi_{\mathfrak{A},j} = \varphi_{\mathfrak{A},j}(z, \bar{z})$  e  $\psi_{\mathfrak{A},j} = \psi_{\mathfrak{A},j}(z, \bar{z})$  delle due funzioni date siano di classe  $C^\infty$ , e gli  $m$  scalari  $(\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j\alpha}$  ( $\alpha=1, 2, \dots, m$ ) siano finiti, continui e, se  $m>1$  - e quindi  $k=3$  - privi di zeri comuni. Se  $m>1$ , in virtù dell'ipotesi  $(i_2)$ , l'elemento lineare complesso  $(\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) \mathbf{v}_j = ((\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j1}, (\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j2}, \dots, (\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{jm})$  determina una sezione su  $M^3$  nello spazio totale di  $\mathfrak{S}$ , associando ad ogni punto  $\zeta \in M^3 \cap \mathfrak{A}$  il punto di  $P_{m-1}$  avente coordinate  $x_\alpha = (\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j\alpha}$ . Ebbene, faremo l'ipotesi  $(i_3)$  che, se  $1 \leq r < m$ , gli  $r$  punti  $((\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j1}, (\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{j2}, \dots, (\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}) v_{jm})$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ) siano linearmente indipendenti per ogni  $\zeta \in M^3 \cap \mathfrak{A}$  e per ogni  $\mathfrak{A} \in \{\mathfrak{A}\}$ . Introdotta in  $M$  una metrica hermitiana definita positiva, applicando eventualmente il processo « standard » di Hodge ([6], n. 2) possiamo sempre supporre che gli  $r$  punti considerati siano ortogonali in  $P_{m-1}$ , e determinino pertanto su  $M^3$  un campo  $\mathbf{v}$  di  $r$  elementi lineari complessi, mutuamente ortogonali, tangenti a  $M$  e privi di singolarità su  $M^3$ , ossia determinino una sezione su  $M^3$  nello spazio totale della struttura fibrata, associata alla  $\mathfrak{S}$ , avente per fibra la varietà  $U_{m-1,r}$  delle  $r$ -ple di punti mutuamente ortogonali di  $P_{m-1}$ . Poiché i gruppi di omotopia  $\pi_i(U_{m-1,r})$  di dimensione  $i$  di  $U_{m-1,r}$  sono nulli per  $3 \leq i \leq 2(m-r)$  ([8], p. 233), è possibile estendere tale sezione allo scheletro  $M^{2m-2r+1}$  di  $M^{2m}$ . Ma siccome  $\pi_{2m-2r+1}(U_{m-1,r})$  non è nullo, estendendo tale sezione a  $M^{2m-2r+2}$  si incontrano in generale delle singolarità, alle quali è associata una classe di coomologia,  $c_r(\mathbf{v})$ , di dimensione  $2m-2r+2$  ed a coefficienti interi, la classe di coomologia del *sekundäre Hinderniszyklus* di Kundert [8], dipendente dagli  $r$  vettori  $\mathbf{v}_j$  e dalle  $r$  funzioni  $\varphi_{\mathfrak{A},j}/\psi_{\mathfrak{A},j}$ .

Sia  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) la  $i$ -esima classe di coomologia di Chern di  $M$ , cioè ([6], n. 2) sia  $(-1)^{m-i+1} c_i$  la classe caratteristica di coomologia nel senso di Chern, di dimensione  $2m-2i+2$ , determinata nella struttura sferica unitaria tangente a  $M$  da un campo di  $r$  vettori covarianti  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) tangenti a  $M$ , privi di singolarità e mutuamente ortogonali in ogni punto di  $M^{2m-2i+1}$ . Denotando con  $c_{m+1}$  l'unità dell'anello di coomologia di dimensione zero su  $M$ , da una relazione generale di Kundert<sup>(4)</sup> discende la relazione:

(4) [8] formula (54), p. 237 e formula (63), p. 241. Cfr. anche [14], n. 5. pagine 571-572.

$$(1) \quad c_r(\mathbf{v}) = \sum_i^{m+1} (-1)^{m-i+1} c_i \sum_{v_1 + \dots + v_r = i-r} d_1^{v_1} \dots d_r^{v_r} \\ (v_j \geq 0; j = 1, \dots, r, 1 \leq r < m),$$

ove gli indici superiori denotano degli esponenti, i prodotti sono dei « cup-products » sull'anello degli interi, e  $d_j$  è la classe di coomologia del 2-cociclo a coefficienti interi,  $d'_j$ , differenza <sup>(5)</sup> fra  $\mathbf{v}$  ed il campo  $\mathbf{u}$  di elementi lineari complessi determinato dai vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ .

2. Riprendendo le considerazioni dei nn. 2 e 3 di [14], proveremo che il valore  $d'_j(\sigma^2)$  del cociclo  $d'_j$  nel 2-simplexso  $\sigma^2 \in M^2 \cap \mathfrak{Q}$  è espresso dalla relazione

$$(2) \quad d'_j(\sigma^2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{\sigma^2} d(\log \varphi_{\mathfrak{Q},j} - \log \psi_{\mathfrak{Q},j}) + (\bar{w}_j - w_j) c'_m(\sigma^2),$$

ove l'integrale è esteso al contorno orientato  $\partial \sigma^2$  di  $\sigma^2$ , e  $c'_m(\sigma^2)$  è il valore che assume in  $\sigma^2$  un 2-cociclo,  $c'_m$ , appartenente a  $c_m$ .

A tal uopo deformiamo sopra  $M^1$  il campo  $\mathbf{u}$  nel campo  $\mathbf{v}$ , cioè facciamo sì che, essendo  $u_{ja}$  le componenti di  $\mathbf{u}_j$  in un punto  $\zeta \in M^1 \cap \mathfrak{Q}$ , risulti

$$(\varphi_{\mathfrak{Q},j}/\psi_{\mathfrak{Q},j})v_{ja} = \rho_{\mathfrak{Q},j} u_{ja}$$

con  $\rho_{\mathfrak{Q},j}$  finito, non nullo e di classe  $C^\infty$ . A norma della (4) di [14] si ha allora che

$$(3) \quad d'_j(\sigma^2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{\sigma^2} d \log \rho_{\mathfrak{Q},j}.$$

Ma si riconosce subito, ripetendo l'argomentazione dei primi due capoversi del n. 3 di [14], che  $\rho_{\mathfrak{Q},j}$  determina sopra  $M^1 \cap \mathfrak{Q}$  e per ogni  $\mathfrak{Q} \in \{\mathfrak{Q}\}$  una sezione su  $M^1$  nella struttura sferica unitaria (principale) di dimensione uno, definita, a meno di un'equivalenza <sup>(6)</sup>, sulla base  $M$ , dal sistema fondamentale di intorno  $\{\mathfrak{Q}\}$  e dalle trasformazioni di coordinate

$$(4) \quad g_{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}',j}(\zeta) = (\varphi_{\mathfrak{Q},j}/\psi_{\mathfrak{Q},j})/(\varphi_{\mathfrak{Q}',j}/\psi_{\mathfrak{Q}',j}) \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|^{w_j} \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right|^{\bar{w}_j} (\zeta \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}'),$$

talché, avuto riguardo al n. 3 di [14], dalla (3) consegue subito la (2).

3. Esaminiamo il caso escluso fino ad ora in cui sia  $r = m \geq 1$ . In virtù dell'ipotesi  $(i_1)$ , avuto riguardo al n. 6 di [14], si ha che il determinante della matrice quadrata  $[(\varphi_{\mathfrak{Q},j}/\psi_{\mathfrak{Q},j})v_{j,a}]$  ( $\alpha, j = 1, \dots, m$ ) d'ordine  $m$  determina una sezione sullo scheletro  $M^1$  nella struttura sferica unitaria (principale) di dimensione uno, definita, a meno di un'equivalenza <sup>(6)</sup>, sulla base  $M$ , dal sistema fondamentale di intorno  $\{\mathfrak{Q}\}$  e dalle trasformazioni di coordinate

$$g_{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'}(\zeta) = g_{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}',1}(\zeta) \dots g_{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}',m}(\zeta) \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|,$$

(5) Per la nozione di cocatena e di cociclo differenza cfr. ad esempio [8], § 1, pp. 218-220; [12], §§ 33 e 36, pp. 169-174 e pp. 181-183; [14], n. 2, pp. 566-568.

(6) [12], n. 3.2, pp. 14-15.

ove le  $g_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'_j(\zeta)$  sono espresse dalle (4). A tale sezione è associata una classe caratteristica di coomologia  $c_m(\mathbf{v})$  di dimensione due, determinata dal 2-cociclo  $c'_m(\mathbf{v})$  che nel 2-simplesso  $\sigma^2 \in M^2 \cap \mathcal{A}$  assume il valore

$$c'_m(\mathbf{v}; \sigma^2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \sum_{j=1}^m \int_{\sigma^2} d(\log \varphi_{\mathcal{A},j} - \log \psi_{\mathcal{A},j}) + [\Sigma(\bar{w}_j - w_j) - 1] c'_m(\sigma^2).$$

Da questa relazione consegue che  $c_m(\mathbf{v})$  può ottenersi formalmente ponendo  $r = m$  nella (1). Tuttavia ricordiamo che, come abbiamo avvertito nel n. 6 di [14], il caso  $r = m$  ( $\geq 1$ ) necessita di una dimostrazione autonoma poiché la relazione di Kundert sulla quale poggia la (1) è stata ottenuta nell'ipotesi  $1 \leq r < m$ .

4. Un primo esempio di vettore complesso covariante  $\mathbf{v}_j$  soddisfacente, per un'opportuna triangolazione  $M^{2m}$  di  $M$ , alle condizioni  $(i_1)$  e  $(i_2)$  è offerto dal vettore avente per componenti i coefficienti di una forma differenziale meromorfa  ${}_jA$  di tipo  $(1,0)$ , rappresentata localmente in  $\mathcal{A}$  dalla

$${}_jA_{\mathcal{A}} = {}_jA_{\mathcal{A},\alpha} dz^\alpha,$$

alla quale sia associata una funzione,  ${}_jF$ , meromorfa in  $M$ , rappresentata localmente in  $\mathcal{A}$  dalla  ${}_jF_{\mathcal{A}} = {}_jF_{\mathcal{A}}(z^1, \dots, z^m)$ , tale che  $(i_4)$  le  $m$  funzioni  ${}_jF_{\mathcal{A}} {}_jA_{\mathcal{A},\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) siano olomorfe in  $\mathcal{A}$  ed abbiano il luogo degli zeri comuni di dimensione  $\leq m - 1$ . Dato dunque un sistema  $A$  di  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) forme  ${}_jA$  e di  $r$  funzioni  ${}_jF$  siffatte, qualora  $(i_5)$  il luogo  $H$  dei punti di  $M$  nei quali la matrice  $\|{}_jF_{\mathcal{A}} {}_jA_{\mathcal{A},\alpha}\|$ , a  $r$  righe e  $m$  colonne, ha rango  $< r$ , sia di dimensione (complessa)  $\leq r - 1$  <sup>(7)</sup>, le condizioni  $(i_3)$  sono manifestamente soddisfatte, per un'opportuna scelta della triangolazione  $M^{2m}$  di  $M$ , qualora si ponga  $\varphi_{\mathcal{A},j}/\psi_{\mathcal{A},j} = {}_jF_{\mathcal{A}}$ , talché le considerazioni del n. 1 consentono di associare al sistema  $A$  una classe di coomologia,  $c_r(A)$ , di dimensione reale  $2m - 2r + 2$  espressa dal secondo membro della (1). Ordinate le forme  ${}_jA$  in guisa che tutte e sole le  $r - t$  funzioni  ${}_{t+1}F, {}_{t+2}F, \dots, {}_rF$  ( $0 \leq t \leq r$ ) si riducano a delle costanti non nulle su  $M$ , si ha manifestamente  $d_j = 0$  per  $j = t + 1, \dots, r$ , mentre per  $j = 1, \dots, t$  la (2) diviene

$$d'_j(\sigma^2) = I(S_j, \sigma^2),$$

ove  $I(S_j, \sigma^2)$  denota l'indice di Kronecker del divisore  $S_j$  di  ${}_jF$  <sup>(8)</sup> e del simplex  $\sigma^2$ , ciascuna componente irriducibile del quale sia dotata dell'orientamento naturale indotto da  $M$  <sup>(9)</sup>. Ne consegue che, denotando per semplicità

(7) Osserviamo che, se  $1 \leq r < m$ , per soddisfare alla  $(i_3)$  con la medesima scelta delle  $\varphi_{\mathcal{A},j}/\psi_{\mathcal{A},j}$ , basta a rigore supporre che la dimensione del luogo considerato sia  $\leq r - 2$ .

(8) Relativamente a tale nozione cfr. ad esempio [1], Cap. V, p. 107. Riguardo agli integrali sopra una varietà complessa cfr. ad esempio [10], vol. I, Cap. IV, pp. 351-513.

(9) [1], p. 102.



con lo stesso simbolo  $S_j$  la classe di omologia di dimensione  $2m - 2$  determinata in  $M$  dal ciclo fondamentale del divisore  $S_j$  orientato nel modo indicato, ed indicando con  $C_i$  la classe di omologia di dimensione  $2i - 2$  duale della classe di Chern  $c_i$ , la classe di omologia  $C_r(A)$ , di dimensione  $2r - 2$ , duale di  $c_r(A)$ , è rappresentata dalla relazione

$$(5) \quad C_r(A) = \sum_{v_1 + \dots + v_t = m+1-r} S_1^{v_1} \dots S_t^{v_t} + \\ + \sum_i^m (-1)^{m-i+1} C_i \sum_{v_1 + \dots + v_t = i-r} S_1^{v_1} \dots S_t^{v_t} \quad (v_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, t),$$

ove gli indici superiori  $v_1, \dots, v_t$  denotano degli esponenti ed i prodotti sono delle intersezioni nell'anello di omologia a coefficienti interi di  $M$ . In particolare, per  $r = 1$ , ossia qualora il sistema  $A$  si riduca ad una sola forma, se  $t = 0$  risulta, come è ben noto,  $C_1(A) = (-1)^m C_1$ , mentre se  $t = 1$  si ha

$$(6) \quad C_1(A) = S^m + \sum_i^m (-1)^{m-i+1} C_i \cdot S^{i-1} \quad (S = S_1).$$

Si può dimostrare facilmente, mediante un calcolo simile a quello esposto nel n. 4 di [6], che, se  $H$  è una sottovarietà pura di dimensione  $r - 1$  di  $M$ , cioè se tutte le componenti irriducibili di  $H$  hanno dimensione eguale a  $r - 1$ , e se la metrica hermitiana definita positiva fissata in  $M$  è kähleriana<sup>(10)</sup>, la classe di omologia di  $H$  in  $M$  coincide con la classe di omologia  $C_r(A)$ .

In particolare, se  $r = 1$ , nell'ipotesi suddetta  $H$  consta di un numero finito,  $h$ , di punti, eguale all'indice di Kronecker  $I(C_1(A))$  dello 0-ciclo  $C_1(A)$ , e quindi per  $t = 0$  si ha  $h = (-1)^m I(C_1)$ , mentre per  $t = 1$  risulta

$$h = I \left( S^m + \sum_i^m (-1)^{m-i+1} C_i \cdot S^{i-1} \right) \quad (11).$$

Ad esempio se  $m = r = t = 1$ , denotando con  $g(M)$  il genere riemanniano di  $M$ , dalla relazione precedente si trae che  $h = I(S) - I(C_1) = I(S) + 2g(M) - 2$ , cioè che l'ordine di un qualsiasi differenziale semplice sopra una superficie di Riemann è uguale a  $2g(M) - 2$ , come è ben noto dalla teoria degli integrali abeliani.

4. Qualora le  $r$  forme  ${}_jA$  siano di prima specie, cioè qualora per ogni  $\mathcal{U} \in \{\mathcal{U}\}$  le funzioni  ${}_jA_{\mathcal{U},\alpha}$  siano olomorfe in  $\mathcal{U}$ , anche le funzioni  ${}_1G = {}_1/{}_1F$ ,  ${}_2G = {}_1/{}_2F, \dots, {}_tG = {}_1/{}_tF$  sono olomorfe in  $M$ , e le rappresentazioni locali

(10) L'ipotesi che la metrica fissata su  $M$  sia kähleriana non è forse essenziale alle nostre considerazioni ma consente di condurre il calcolo in maniera perfettamente analoga a quella seguita nel n. 4 di [6].

(11) Questa relazione trovasi già nella prima parte della Nota [9] di E. G. Kundert, senza però che sia formulata alcuna ipotesi sulle dimensioni delle componenti del luogo  $H$ .



${}_k G_{\mathcal{Q}} = 1/{}_k F_{\mathcal{Q}} (k = 1, \dots, t)$  coincidono, a meno del prodotto per un'unità dell'anello  $O(\mathcal{Q})$  delle funzioni olomorfe in  $\mathcal{Q}^{(12)}$ , con il massimo comun divisore delle  $m$  funzioni  ${}_k A_{\mathcal{Q},1}, {}_k A_{\mathcal{Q},2}, \dots, {}_k A_{\mathcal{Q},m}$ . Il divisore  $T_k = -S_k$  di  ${}_k G$  è effettivo [7] ed ha per sostegno la componente di dimensione (complessa) massima,  $m-1$ , del luogo dei punti stazionari di  ${}_k A$ , e la (5) diviene

$$C_r(A) = (-1)^{m-r+1} \left( \sum_{v_1 + \dots + v_t = m+1-r} T_1^{v_1} \dots T_t^{v_t} + \sum_i^m C_i \sum_{v_1 + \dots + v_t = i-r} T_1^{v_1} \dots T_t^{v_t} \right) \\ (v_k \geq 0)$$

mentre, se  $r = 1$ , la (6) si trasforma nella relazione

$$(7) \quad C_1(A) = (-1)^m \left( T^m + \sum_i^m C_i T^{i-1} \right),$$

che - qualora siano soddisfatte le ipotesi formulate nel penultimo capoverso del n. 3 - fornisce il numero dei punti stazionari isolati della forma  ${}_1 A$ .

Ad esempio, se  $m = 2$  e  $r = t = 1$ , ed  $M$  è una superficie algebrica non singolare,  $F$ , in base ad un'osservazione di Severi ([11], n. 11) il sostegno del divisore effettivo  $T$  è una curva algebrica isolata oppure è composta con  $2p-2$  curve  $D$  di un fascio irrazionale di genere  $p > 0$ , talché in ogni caso risulta  $I(T^2) = 0$ , e vale la relazione  $T = (2p-2)D$  fra le classi di omologia dei cicli fondamentali di  $T$  e di  $D$ . Poiché valgono le relazioni  $I(C_2 \cdot D) = 2 - 2g(D)$ ,  $I(C_1) = I + 4$  ove  $g(D)$  denota il genere riemanniano di  $D$ ,  $I$  è l'invariante di Zeuthen-Segre di  $F^{(13)}$ , dalla (7) consegue che il numero  $h$  dei punti stazionari isolati del differenziale di prima specie  ${}_1 A$  è dato dalla relazione

$$h = I + 4 - 4(p-1)(g(D)-1),$$

ottenuta per altra via da Severi nel n. 9 di [11].

5. Sia data su  $M$  una forma differenziale esterna  ${}_j B$  di tipo  $(m-1, 0)$ , meromorfa in  $M$ , rappresentata localmente in  $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}\}$  dalla relazione

$${}_j B_{\mathcal{Q}} = {}_j B_{\mathcal{Q},1} \dots \hat{\alpha} \dots_m dz^1 \dots \hat{dz}^\alpha \dots dz^m \quad (14),$$

ai coefficienti  ${}_j B_{\mathcal{Q},1} \dots \hat{\alpha} \dots_m$  della quale sia associata una funzione meromorfa  ${}_j N$ , rappresentata localmente in  $\mathcal{Q}$  dalla  ${}_j N_{\mathcal{Q}} = {}_j N_{\mathcal{Q}}(z^1, \dots, z^m)$ , in guisa che le  $m$  funzioni  ${}_j N_{\mathcal{Q}} {}_j B_{\mathcal{Q},1} \dots \hat{\alpha} \dots_m$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) soddisfino alla condizione  $(i_4)$  del n. 4. La forma duale  ${}_j^* B$  di  ${}_j B$  nel senso di Eckmann e Guggenheimer <sup>(15)</sup>, costruita rispetto alla metrica fissata in  $M$ , sul campo  $P$  di olomorfismo comune ai coefficienti di  ${}_j B$ , cioè nell'insieme  $P \subseteq M$ ,

(12) [1], p. 101.

(13) Cfr. [7], formula (5.7), p. 854 e [4], § 3, pp. 119-123.

(14) Secondo una convenzione di uso frequente nel calcolo esterno  ${}_j B_{\mathcal{Q},1} \dots \hat{\alpha} \dots_m$  denota il coefficiente  ${}_j B_{\mathcal{Q},1} \dots \alpha-1, \alpha+1 \dots_m$  di  ${}_j B_{\mathcal{Q}}$ .

(15) [3], formula (34), p. 267.

luogo dei punti di  $M$  nei quali  ${}_jB$  è olomorfa, è una forma di tipo  $(1, m)$ , e quindi, come abbiamo osservato nel n. 7 di [14], determina in  $P$  un campo di vettori covarianti di peso  $w_j = 0$ ,  $\bar{w}_j = 1$ .

Sia dato dunque in  $M$  un sistema  $B$  di  $r$  forme  ${}_jB$  e di  $r$  funzioni  ${}_jN$  siffatte, tali che la sottovarietà  $L$  di  $M$ , luogo dei punti di  $M$  nei quali la matrice  $\|{}_jN_{\alpha\ell}{}_jB_{\alpha\ell,1}\dots\alpha\dots m\|$  a  $r$  righe e  $m$  colonne, abbia rango  $< r$ , soddisfi all'ipotesi  $(i_5)$  del n. 3 <sup>(7)</sup>. Ordinate tali forme in guisa che le funzioni  ${}_{t+1}N, \dots, {}_rN$  ( $0 \leq t \leq r$ ) siano tutte e sole le  ${}_jN$  ridotte a costanti non nulle su  $M$ , e posto  $\varphi_{\alpha\ell,j}/\psi_{\alpha\ell,j} = {}_j\bar{N}_{\alpha\ell}$  — ove  ${}_j\bar{N}_{\alpha\ell}$  denota il complesso coniugato di  ${}_jN_{\alpha\ell}$  <sup>(16)</sup> — le argomentazioni del n. 1 consentono di associare al sistema  $B$  una classe di coomologia  $c_r(B)$  di dimensione  $2m - 2r + 2$ , espressa dal secondo membro della (1). Tenuto conto che nel caso attuale, denotando  $R_j$  il divisore di  ${}_jN$ , risulta

$$d'_j(\sigma^2) = -I(R_j, \sigma^2),$$

con argomentazioni analoghe a quelle del n. 3 si prova che la classe di omologia  $C_r(B)$ , di dimensione  $2r - 2$ , duale di  $c_r(B)$ , è espressa dalla relazione

$$\begin{aligned} C_r(B) = & \sum_{v_1 + \dots + v_t = m + 1 - r} (C_m - R_1)^{v_1} \dots (C_m - R_t)^{v_t} + \\ & + \sum_i^m (-1)^{m-i+1} C_i \cdot \sum_{v_1 + \dots + v_t = i-r} (C_m - R_1)^{v_1} \dots (C_m - R_t)^{v_t} \\ & (v_k \geq 0, k = 1, \dots, t), \end{aligned}$$

che per  $r = t = 1$  dà luogo alla

$$C_1(B) = -(C_m - R)^{m-1} R + \sum_i^{m-1} (-1)^{m-i+1} C_i (C_m - R)^{i-1} \quad (R = R_1),$$

e per  $r = 1$ ,  $t = 0$ , diviene

$$C_1(B) = \sum_i^{m-1} (-1)^{m-i+1} C_i C_m^{i-1},$$

in accordo con quanto visto nel n. 7 di [14].

Mediante un calcolo perfettamente analogo a quello eseguito nel n. 8 di [14] si può dimostrare che se  $L$  è pura di dimensione  $r - 1$  n. (3), e se la metrica hermitiana definita positiva fissata in  $M$  è kähleriana <sup>(10)</sup>, la classe di omologia del ciclo fondamentale di  $L$  munito dell'orientamento naturale indotto dalla struttura complessa di  $M$  coincide con la classe di omologia di  $C_r(B)$  presa col segno  $(-1)^{m-r+1}$ . Pertanto, denotando per semplicità con

(16) Si ricordi che, a norma della (34) di [3] (p. 267), la costruzione di  ${}_j^*B$  implica il passaggio ai complessi coniugati dei coefficienti di  ${}_jB$ .

lo stesso simbolo  $L$  anche la classe di omologia, sopra considerata, del ciclo fondamentale di  $L$ , si ha la relazione

$$(8) \quad L = \sum_{v_1 + \dots + v_i = m + i - r} (R_1 - C_m)^{v_1} \dots (R_i - C_m)^{v_i} + \\ + \sum_i^m C_i \cdot \sum_{v_1 + \dots + v_i = i - r} (R_1 - C_m)^{v_1} \dots (R_i - C_m)^{v_i} \quad (v_k \geq 0)$$

che per  $r = t = 1$  dà luogo alla relazione esprimente il numero  $l$  dei punti stazionari isolati

$$l = I \left( (R - C_m)^{m-1} R + \sum_i^{m-1} C_i \cdot (R - C_m)^{i-1} \right),$$

mentre per  $r = 1$  e  $t = 0$ , diviene

$$l = \sum_i^{m-1} (-1)^{i-1} C_i C_m^{i-1},$$

in accordo con una relazione stabilita da Hodge [5] <sup>(17)</sup> per le varietà algebriche.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. DE RHAM-K. KODAIRA, *Harmonic integrals*, Mimeographed notes, Princeton 1950.
- [2] M. EGER, *Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique*, «C. R. Acad. Sci. Paris», 204, 92-94; 217-219 (1937).
- [3] H. GUGGENHEIMER, *Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit kählerscher Metrik*, «Comment. Math. Helv.», 25, 257-297 (1951).
- [4] F. HIRZEBRUCH, *Uebertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen*, «Journ. reine angew. Math.», 191, 110-124 (1953).
- [5] W. V. D. HODGE, *On the stationary points of integrals attached to algebraic varieties*, «Journ. London Math. Soc.», 12, 280-290 (1937).
- [6] W. V. D. HODGE, *The characteristic classes on algebraic varieties*, «Proc. London Math. Soc.», (3), 1, 138-151 (1951).
- [7] K. KODAIRA, *The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces*, «Amer. Journ. of Math.», 73, 813-875 (1951).
- [8] E. G. KUNDERT, *Ueber Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente*, «Ann. of Math.», 54, 215-246 (1951).
- [9] E. G. KUNDERT, *A relation between poles and zeros of a simple meromorphic differential form and a calculation of Chern's characteristic classes of an algebraic variety*, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 38, 893-895 (1952).
- [10] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Vol. I, Docet, Roma 1951 e Vol. II (in corso di pubblicazione).
- [11] F. SEVERI, *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*, «Comment. Math. Helv.», 4, 268-326 (1932).
- [12] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [13] J. A. TODD, *Note on the canonical series of a  $V_d$* , «Proc. London Math. Soc.», (2), 4, 139-141 (1937).
- [14] E. VESENTINI, *Campi di vettori dotati di peso sopra una varietà complessa compatta*, «Rend. di Mat. e Appl.», (5), 14 (1955), 564-580 <sup>(18)</sup>.

(17) Cfr. anche la formula (17) ed il n. 9 di [14].

(18) *Errata-corrige* di [14]: a p. 572 - seconda riga dall'alto - in luogo di *unità* del gruppo, leggi: *unità dell'anello*.

**Meccanica.** — *Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallele di spazi non riemanniani.* Nota di EMILIO CLAUSER, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

Per spiegare l'inerzia e la gravitazione Einstein si è valso, nella teoria della relatività generale, di uno spazio riemanniano. Pure di uno spazio che s'incurva in dipendenza dei fenomeni che vi si svolgono, si è valsa, quasi un secolo addietro, la meccanica classica per dare una interpretazione geometrica del movimento di un sistema materiale, olonomo, a vincoli fissi (e lisci), sottoposto ad una sollecitazione attiva conservativa (1); lo spazio curvo ivi considerato è lo spazio delle configurazioni, mentre nella teoria einsteiniana lo spazio curvo è lo spazio-tempo.

Qui sta essenzialmente la novità di questa teoria rispetto agli schemi classici ed alla divinazione di Riemann e di Clifford, che avevano intuito una solidarietà fra fenomeni e spazio geometrico nel quale essi si svolgono.

In un trattato recente, Lanczos mostra, come è naturale, che è possibile identificare le equazioni di Lagrange con le estremali di un integrale e quindi con le equazioni delle geodetiche di uno spazio opportuno a metrica genericamente non riemanniana (2).

In questa Nota, indipendentemente da ogni principio variazionale, mostro che le equazioni di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli fissi e soggetto ad una sollecitazione attiva generica, coincidono con le equazioni delle autoparallele di uno spazio non riemanniano, a metrica riemanniana, ma a connessione (simmetrica) genericamente né riemanniana né affine. Come è ben noto, in uno spazio a connessione non riemanniana le autoparallele non coincidono affatto con le geodetiche.

Raggiungo il fine che mi sono proposto valendomi di uno spazio che generalizza in modo semplice lo spazio di Weyl; la metrica di questo spazio è quella dello spazio delle configurazioni, mentre il divario fra i coefficienti di connessione e gli usuali simboli di Christoffel tratti dalla metrica, è un tensore triplo costruito con i coefficienti della metrica dello spazio delle configurazioni e con il vettore rapporto tra la generica componente lagrangiana  $Q_k$  della sollecitazione attiva e l'energia cinetica  $T$  del sistema. Quando questo rapporto dipende soltanto dalle coordinate lagrangiane  $q^i$ , lo spazio diventa a connessione affine, riducendosi propriamente ad uno spazio di Weyl. In casi ancora più particolari, esso si riduce ulteriormente ad uno spazio riemanniano. Rientra in questi casi particolari, ed anzi è il più importante di essi, quello, antecedentemente ricordato, nel quale la sollecitazione attiva è conservativa.

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) C. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Berlino 1881, sechste Vorlesung. Cfr. anche T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di meccanica razionale*, Bologna 1926, vol. II, cap. XI, par. 15.

(2) C. LANCZOS, *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, 1949, cap. VIII, par. 9.

1. IDENTIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE CON LE EQUAZIONI DELLE AUTOPARALLELE. - L'energia cinetica di un sistema olonomo a vincoli fissi è notoriamente una forma omogenea, quadratica nelle velocità lagrangiane  $\dot{q}^k \equiv dq^k/dt$  a coefficienti che dipendono soltanto dalle  $n$  coordinate lagrangiane  $q^k$  del sistema:

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h,k}^n a_{hk}(q) \dot{q}^h \dot{q}^k.$$

È pure notissimo che tenendo conto esplicitamente della struttura (1) della energia cinetica, le equazioni di Lagrange di un sistema siffatto si possono esprimere così:

$$(2) \quad \ddot{q}^i + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ h\ k \end{smallmatrix} \right\} \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove  $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ h\ k \end{smallmatrix} \right\}$  sono i simboli di Christoffel di seconda specie, relativi alla metrica dello spazio delle configurazioni, individuata da

$$(3) \quad ds^2 \equiv a_{hk} dq^h dq^k = 2 T dt^2 \quad (3).$$

Le equazioni delle autoparallele di uno spazio a connessione generica si possono esprimere così:

$$(4) \quad \ddot{q}^i + \Gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k = \dot{q}^i \varphi \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove  $\Gamma_{hk}^i$  è il coefficiente di connessione del quale interviene la sola parte simmetrica, il tempo vi funge da parametro, e  $\varphi$  è uno scalare che esprime la dipendenza dal tempo della lunghezza dell'arco di autoparallela. Precisamente si ha

$$(5) \quad \varphi = \frac{d^2 s}{dt^2} \bigg/ \frac{ds}{dt} \quad (4).$$

La (2) e la (4) sono equazioni tensoriali in due spazi genericamente differenti ma che hanno la stessa metrica riemanniana (3) dello spazio delle configurazioni.

Ciò premesso, si ponga

$$(6) \quad \Gamma_{hk}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ h\ k \end{smallmatrix} \right\} + \gamma_{hk}^i,$$

dove  $\gamma_{hk}^i$  è un tensore triplo, poiché esprime il divario fra due connessioni (5)

(3) T. LEVI-CIVITA, loco cit. in (1), cap. V, par. 5. Le equazioni tensoriali (2), limitatamente a sollecitazione attiva posizionale, sono state considerate da J. L. SYNGE, *On the geometry of dynamics*, « Phil. Transactions », vol. 226, serie A, 1927. Le notazioni adottate nel testo sono quelle usate da LEVI-CIVITA in *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* Bologna 1925; in particolare sono sottintesi i simboli di sommatoria relativi ad indici saturati.

(4) Vedere ad esempio L. P. EISENHART, *Non riemannian geometry*, New York 1926, par. 7 e par. 22.

(5) Loco cit. in (4), cap. I, par. 5.



Le equazioni (2) di Lagrange si identificano con le equazioni (4) delle autoparallele quando e soltanto quando sussiste la seguente relazione:

$$(7) \quad Q^i = \varphi \dot{q}^i - \gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k,$$

dove, per la (5) e per la (3), si ha

$$(8) \quad \varphi = \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}.$$

Dal teorema dell'energia, tratto dalle equazioni di Lagrange, si deduce che

$$\frac{dT}{dt} = Q_k \dot{q}^k$$

e quindi la (8) diviene

$$(8') \quad \varphi = \frac{1}{2T} Q_k \dot{q}^k.$$

2. GEOMETRIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA IN UNO SPAZIO A CONNESSIONE GENERICA. — Per la (8'), la (7) si può esprimere così:

$$(9) \quad Q^i = \frac{1}{2T} Q_k \dot{q}^k \dot{q}^i - \gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k.$$

È importante notare che componendo ambo i membri della (9) con  $\dot{q}_i$ , segue per la (1) la seguente condizione alla quale deve soddisfare il tensore triplo di componenti  $\gamma_{hk}^i$ :

$$(10) \quad \gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k \dot{q}_i = 0.$$

La (10) afferma che il vettore di componenti  $\gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k$  è perpendicolare al vettore che ha per componenti le velocità lagrangiane  $\dot{q}_i$ .

Pertanto nella (9) il vettore sollecitazione attiva di componenti  $Q^i$  è scomposto in due vettori, uno parallelo e l'altro perpendicolare al vettore di componenti  $\dot{q}^i$ :

$$(11) \quad Q^i = \lambda \dot{q}^i + N^i,$$

dove  $N^i$  è la componente di un vettore **N** ortogonale al vettore di componenti  $\dot{q}^i$ :

$$N^i \dot{q}_i = 0;$$

$\lambda$  è invece uno scalare.

Si ha allora dalla (7) e dalla (11), per la (8) e per la (8'):

$$(12) \quad \lambda = \varphi = \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2T} Q_k \dot{q}^k,$$

$$(13) \quad N^i = -\gamma_{hk}^i \dot{q}^h \dot{q}^k.$$

Componendo ambo i membri della (11) con  $\dot{q}_i$ , risulta pertanto che  $\lambda$  è arbitrario; esso non interviene nella connessione; questa, per la (13), dipende invece dal vettore **N**.

In definitiva, la condizione caratteristica affinché le equazioni di Lagrange (2) si identifichino con le equazioni (4) delle autoparallele di uno spazio di metrica riemanniana (3) e di coefficienti di connessione (6), è che il tensore  $\gamma_{hk}^i$  verifichi la (13). E ciò è sempre possibile.

Pertanto è sempre possibile identificare le equazioni (2) di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi con le equazioni (4) delle autoparallele di uno spazio di metrica riemanniana (3) e di coefficienti di connessione (6).

Se la sollecitazione attiva è del tutto generica, il tensore triplo  $\gamma_{hk}^i$  dipende oltre che dalle coordinate di posizione  $q^k$ , anche dalle velocità  $\dot{q}^k$ ; lo spazio considerato è allora non riemanniano, a metrica (3) ed a connessione (6), né affine né riemanniana.

3. GEOMETRIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA IN UNO SPAZIO DEL TIPO DI WEYL. - È facile mostrare che qualunque sia la sollecitazione attiva è sempre possibile identificare le equazioni (2) di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli fissi, con le autoparallele di uno spazio che generalizza in modo semplice lo spazio a connessione affine di Weyl.

Assumiamo a tal fine

$$(14) \quad 2\gamma_{hk}^i \equiv a_h^i \psi_k + a_k^i \psi_h - 2a_{hk} \psi^i,$$

dove  $\psi_k$  sono le componenti di un vettore, *a priori* arbitrario.

La condizione (10) alla quale deve soddisfare il tensore  $\gamma_{hk}^i$  risulta allora identicamente verificata.

La (11), per la (13), per la (14) e per la (1), diventa:

$$(15) \quad Q^i = \lambda \dot{q}^i + 2T\psi^i - \psi_k \dot{q}^k \dot{q}^i;$$

nella (15) il vettore  $\psi^i$  e lo scalare  $\lambda$  sono disponibili. Assumiamo

$$(16) \quad \psi^i \equiv \frac{Q^i}{2T};$$

grazie alla (12), la (15) diviene allora una identità.

In tal modo il problema della geometrizzazione delle equazioni (2) di Lagrange per una sollecitazione attiva generica, si riduce a precisare la natura della connessione dello spazio di metrica riemanniana (3) e di coefficienti di connessione (6), specificati dalla (14) e dalla (16).

A tal fine, conviene osservare che sommando ai coefficienti di connessione (6) l'addendo  $\frac{1}{2}(a_h^i \psi_k + a_k^i \psi_h)$ , muta la natura dello spazio ma non mutano le autoparallele (6).

Approfitando di questa circostanza possiamo affermare che alle autoparallele che interpretano geometricamente il movimento di un sistema

(6) Loco cit. in (4), par. 22.

olonomo a vincoli fissi, competono per la (6) e per la (14) i seguenti coefficienti di connessione

$$(17) \quad \Gamma_{hk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ h \ k \end{matrix} \right\} + (a_h^i \psi_k + a_k^i \psi_h - a_{hk} \psi^i),$$

con  $\psi^i$  definito dalla (16).

I coefficienti (17) hanno la stessa struttura di quelli di uno spazio di Weyl, di metrica (3) <sup>(7)</sup>.

La sollecitazione attiva concorre alla struttura di questo spazio soltanto attraverso i coefficienti di connessione, mentre l'energia cinetica individua la metrica ed interviene anche nei coefficienti di connessione.

Se la sollecitazione attiva è del tutto generica, il vettore di componenti  $\psi^i$ , definito dalla (16), dipende oltre che dalle  $q^k$  anche dalle velocità lagrangiane  $\dot{q}^k$ ; lo spazio considerato è allora non riemanniano, a metrica riemanniana (3) ed a connessione (simmetrica) né affine né riemanniana.

4. GEOMETRIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA IN UNO SPAZIO PROPRIAMENTE DI WEYL. — Quando il vettore  $\psi_k$  che compare nella (17) dipende soltanto dalle coordinate  $q^k$ , lo spazio considerato, di metrica (3) e di coefficienti di connessione (17), si riduce ad uno spazio a connessione affine: lo spazio di Weyl.

Le equazioni di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli fissi, si identificano allora con le equazioni delle autoparallele di questo spazio.

È notevole il caso nel quale il vettore di componenti  $\psi_k$  è gradiente di uno scalare  $\tau$ , funzione delle sole  $q^k$ :

$$(18) \quad \psi_k \equiv -\frac{\partial \tau(q)}{\partial q^k}.$$

Allora il tensore curvatura di misura dello spazio di Weyl, che ha componenti

$$B_{ik} \equiv 2 (\psi_{k|i} - \psi_{i|k}) = 2 \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial q^i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial q^k} \right),$$

per la (18) si annulla identicamente; lo spazio di Weyl si riduce così allo spazio di Riemann di metrica

$$(19) \quad d\sigma^2 \equiv e^{2\tau} ds^2,$$

in rappresentazione conforme con lo spazio riemanniano delle configurazioni, di metrica (3) <sup>(8)</sup>. L'ipotesi (18) implica che la sollecitazione attiva è conservativa. Risulta infatti dalla (18), per la (12),

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial q^k} \dot{q}^k = \frac{Q_k \dot{q}^k}{2T} = \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt},$$

da cui, integrando,

$$e^{2\tau} = kT \quad (k \text{ costante positiva}).$$

(7) Loco cit. in (4), cap. II, par. 30.

(8) Vedere ad esempio loco terzo citato in (3), cap. VIII, par. 4.

Si ha quindi per la (16):

$$Q_k = \frac{2}{k} e^{2\tau} \frac{\partial \tau}{\partial q^k} \equiv \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{1}{k} e^{2\tau} \right).$$

Reciprocamente, la (18) si può trarre dall'ipotesi che la sollecitazione attiva sia conservativa; grazie all'integrale dell'energia che ne consegue, la (19) diviene:

$$(20) \quad d\sigma^2 \equiv k(E + U) ds^2;$$

si può dunque affermare: se la sollecitazione attiva è conservativa, le traiettorie di un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci sono le geodetiche dello spazio riemanniano di metrica (20).

Questo teorema discende anche dal principio dell'azione stazionaria <sup>(9)</sup>.

Esso continua a sussistere se la sollecitazione attiva è somma di una sollecitazione conservativa e della sollecitazione di componenti

$$(21) \quad Q^i \equiv \lambda \dot{q}^i,$$

con  $\lambda$  scalare disponibile; si può infatti prescindere nella (16) dalla sollecitazione (21) poiché, per la (11) e per la (13), il tensore  $\gamma_{hk}^i$  non dipende dalla (21).

Reciprocamente, se un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci ha per traiettorie le geodetiche dello spazio di metrica (20), la sollecitazione attiva alla quale è sottoposto questo sistema è conservativa oppure è somma di una sollecitazione conservativa e della sollecitazione (21).

Infatti le geodetiche dello spazio riemanniano di metrica (20) sono pure le geodetiche dello spazio riemanniano di coefficienti di connessione (6), nelle ipotesi (14) e

$$(22) \quad \psi_k \equiv \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{1}{2} \log(E + U) \quad (10).$$

Ma tali geodetiche sono le traiettorie di un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci, sottoposto alla sollecitazione attiva (15); questa sollecitazione grazie alla (22) risulta conservativa, o, anche per una precedente osservazione, è somma di una sollecitazione conservativa e della sollecitazione (21).

5. GEOMETRIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA IN DUE CASI PARTICOLARI. - Lo spazio di metrica (3) e di coefficienti di connessione (6) assume una struttura semplice quando la sollecitazione attiva si riduce alla (21); la (21) rappresenta una resistenza di tipo generico che agisce su ogni punto del sistema meccanico; se  $\lambda$  è una costante (negativa), la (21) è una resistenza viscosa, se  $\lambda$  è proporzionale a  $\sqrt{2T}$ , la (21) è una resistenza

(9) Vedere ad esempio loco secondo cit. in <sup>(1)</sup>, ibidem.

(10) Basta osservare che i simboli di Christoffel dello spazio riemanniano di metrica (20) sono individuati dalla (17) e dalla (22) <sup>(8)</sup>; lo spazio considerato ha pertanto coefficienti di connessione che differiscono dai precedenti simboli di Christoffel per il tensore  $\frac{1}{2} (a_k^i \psi_k + a_k^i \psi_k)$ ; esso è quindi riemanniano ed ha le stesse geodetiche dello spazio di metrica (20). (Cfr. L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, New York 1926, par. 40).

idraulica e così via. La più semplice soluzione della (13), essendo  $N_i = 0$ , è la seguente:

$$\gamma_{hk}^i \equiv 0.$$

I coefficienti di connessione (6) si riducono allora ai simboli di Christoffel dello spazio riemanniano delle configurazioni, di metrica (3), e le autoparallele di equazioni (4) diventano pertanto le geodetiche di questo spazio<sup>(12)</sup>.

Un secondo caso particolare, suggerito dalla (13), è quello in cui il componente normale alla velocità lagrangiana è funzione quadratica omogenea delle  $\dot{q}^k$ :

$$N^i \equiv C_{hk}^i(q) \dot{q}^h \dot{q}^k$$

con  $C_{hk}^i(q)$  tensore triplo posizionale.

Nel caso in esame basta porre

$$\gamma_{hk}^i \equiv -C_{hk}^i(q),$$

per geometrizzare il movimento del sistema con un'autoparallela di uno spazio di metrica (3) ed a connessione affine.

### Astronomia. — *Orbita della stella binaria A. D. S. 10188.*

Nota II di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

4. Nella Nota I sopra la binaria A.D.S. 10188, valendomi di tutte le osservazioni esistenti fino ad oggi, ho cercato di determinare gli elementi dell'orbita del satellite di questa stella; calcolandoli dapprima approssimativamente e poi migliorandoli col metodo dei minimi quadrati. Ho ottenuto<sup>(5)</sup> così con i noti simboli

$$(I) \Omega = 146^\circ,4 \quad ; \quad i = 120^\circ,8 \quad ; \quad \omega = 147^\circ,6 \quad ; \quad e = 0,384 \quad ; \quad a = 0'',88 \quad ; \\ \tau = 1894,56 \quad ; \quad n = 3^\circ,2667 \quad ; \quad P = 110,25$$

essendo il periodo P espresso in anni.

Riporto per confronto gli elementi dell'orbita più recente, anteriore alla mia, che è quella calcolata dal Van Biesbroeck nel 1925:

$$(II) \Omega = 144^\circ,7 \quad ; \quad i = 117^\circ,4 \quad ; \quad \omega = 149^\circ,8 \quad ; \quad e = 0,420 \quad ; \quad a = 0'',91 \quad ; \\ \tau = 1895,40 \quad ; \quad n = 3^\circ,0025 \quad ; \quad P = 119,9.$$

(11) T. LEVI-CIVITA (*Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità*, «Atti Istituto Veneto», tomo LIV, 1896, pp. 1004-8) ha considerato la sollecitazione attiva (21), limitandosi al caso  $\lambda = \text{cost.} < 0$ , e cioè ad una resistenza viscosa, ed ha mostrato che con il seguente cambio della scala del tempo  $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$ , le eq. di Lagrange (2) si riducono a quelle del moto spontaneo ( $Q_k = 0$ ); ciò è conforme alla nostra affermazione. La precedente conclusione di Levi-Civita è riportata nell'esercizio 24 del cap. V, vol. II, del suo trattato di meccanica razionale.

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(5) Non abbiamo messo il doppio segno innanzi all'inclinazione, giacché da osservazioni spettroscopiche risulta essere positiva.



TABELLA II.

t	θ	ρ	Van Biesbroeck		Giannuzzi		Autore	
			(O—C) <sub>θ</sub>	(O—C) <sub>ρ</sub>	(O—C) <sub>θ</sub>	(O—C) <sub>ρ</sub>		
1869,74	132 <sup>o</sup> ,7	0'',91	+	0 <sup>o</sup> ,4	0'',00	— 1 <sup>o</sup> ,5	— 0'',22	Dembowski
1871,49	130,0	0,96		0,0	+	1,4	+	Dembowski
1875,52	123,9	0,70	+	0,9	—	0,6	—	O. Struve
1877,00	116,8	0,66	—	2,8	+	2,5	+	Dembowski
1878,17	112,1	0,48	—	6,4	—	4,0	—	Schiaparelli
1881,42	104,9	0,46	+	0,6		3,3		Burnham
1882,47	99,9	0,42	+	1,3		4,2	—	Schiaparelli
1883,23	101,8	0,53	+	8,0	+	11,9	+	Engelmann
1883,73	88,8	0,42	—	1,3	+	2,9	+	Schiaparelli
1886,67	55,8	0,35	—	5,0	+	0,0	+	Schiaparelli
1887,56	45,3	0,30	—	4,1	+	0,2	—	Schiaparelli
1888,59	24,0	0,21	—	15,9	—	8,9	—	Schiaparelli
1889,69	14,2	0,20	—	8,2	—	6,6	—	Schiaparelli
1892,44	355,1	0,59	—	1,7	+	2,3	+	Wilson
1892,52	357,8	0,47	+	1,5	+	0,9	+	Bigourdan
1892,56	355,8	0,40	—	0,2	+	0,8	—	Comstock
1892,69	356,2	0,37	+	1,1	—	0,5	—	Schiaparelli
1893,54	347,6	0,44	—	1,9	+	2,8	—	Leavenworth
1894,53	347,4	0,49	+	3,4	+	2,4	+	Wilson
1895,26	339,6	0,59	—	0,7	+	1,7	+	Barnard
1895,54	341,1	0,43	+	2,0	—	1,1	—	Comstock
1895,74	340,6	0,45	+	2,4	—	1,5	—	See
1896,40	336,8	0,58	+	1,5	+	0,6	+	Leavenworth
1896,50	339,0	0,42	+	4,1	—	3,3	—	Comstock
1897,36	329,4	0,50	—	2,0	—	2,8	—	Aitken
1897,64	332,2	0,54	+	1,8	+	1,1	—	Comstock
1897,74	330,1	0,50	+	0,1	—	0,6	—	Doolittle
1898,70	325,9	0,49	—	0,6	—	1,3	—	Comstock; Greenw.
1899,31	326,9	0,62	+	2,5	+	2,1	+	Aitken
1899,35	325,5	0,54	+	1,2	—	0,9	—	Doolittle
1899,40	323,5	0,56	—	0,6	+	0,9	—	Brown
1899,55	324,1	0,44	+	0,5	—	0,2	—	Lewis
1900,58	315,2	0,51	—	5,4	—	5,0	—	Bryant
1901,30	316,6	0,54	—	1,2	—	1,0	—	Greenw. Obs.; Coms
1902,61	311,4	0,59	—	2,2	+	1,5	+	Comstock
1902,89	308,9	0,52	—	3,7	—	3,0	—	Lewis
1903,57	308,9	0,58	—	1,4	+	0,6	+	Doolittle—Gr. Obs. e
1904,00	312,9	0,52	+	4,0	—	5,8	—	V. Biesbroeck
1904,60	300,8	0,46	—	6,0	—	4,9	—	Comstock
1905,48	308,1	0,59	+	4,4	+	5,7	+	V. Biesbroeck
1906,71	295,8	0,47	—	3,0	—	1,7	—	Comstock
1907,85	294,2	0,52	—	0,6	+	1,4	—	Greenw. Obs.
1908,26	292,6	0,52	—	0,5	+	1,6	—	Comstock, ecc.
1909,42	289,5	0,35	+	1,3	—	3,6	—	Jonckheere
1910,49	283,4	0,50	+	0,1	+	2,6	—	V. Biesbroeck
1911,66	276,0	0,46	—	2,6		1,0	—	Leavenworth, ecc.
1912,58	269,5	0,42	—	3,5	—	0,8	—	Aitken
1913,47	278,0	0,49	+	9,7	+	12,4	+	Doberck
1913,57	267,3	0,50	—	0,5	+	2,2	+	Doolittle
1914,27	265,6	0,45	+	1,7	+	4,3	—	Comstock
1914,50	256,8	0,44	—	5,6	+	3,3	—	Aitken
1915,49	250,4	0,46	—	6,6	+	2,5	—	Rabe, Comstock
1916,47	244,9	0,34	—	6,5	—	4,4	—	Rabe
1916,50	250,9	0,46	—	0,3	+	1,7	—	Comstock, Aitken
1917,65	247,0	0,42	+	2,4	—	4,0	—	Comstock, ecc.
1918,70	240,2	0,38	+	1,5	—	2,6	—	Comstock
1919,60	236,2	0,32	+	2,5	—	3,3	—	Greenw. Obs.
1920,48	228,5	0,51	—	0,6	+	0,1	—	Fox, V. Biesbroeck
1921,45	226,6	0,50	+	2,4	—	2,5	—	Chandon, ecc.
1922,14	227,4	0,44	+	6,5	—	6,3	—	Bryant
1922,58	219,4	0,52	+	0,5	+	0,2	—	Berlin Obs., Olivier
1923,63	212,8	0,51	—	1,4	+	2,1	—	Przybyllok, ecc.

t	g	p	Van Biesbroeck		Giannuzzi		Autore
			(O - C) <sub>g</sub>	(O - C) <sub>p</sub>	(O - C) <sub>g</sub>	(O - C) <sub>p</sub>	
24,38	214°,2	0'',57	+ 3°,0	+ 0'',06	+ 2°,1	0'',00	V. Biesbroeck, ecc.
25,46	208°,4	0,61	+ 1,2	+	+ 0,2	+	V. den Boss, ecc.
26,46	210°,5	0,49	+ 6,9	+	+ 5,6	+	Rabe
26,57	202°,1	0,53	- 1,1	-	- 2,4	-	Leavenworth
26,72	202°,3	0,78	- 0,4	+	- 1,7	+	Witchell
26,74	225°,5	0,69	+ 29,9	+	+ 21,6	+	Cullen
26,93	204°,7	0,56	+ 2,7	-	+ 1,4	-	V. Biesbroeck
27,37	199°,2	0,58	- 1,4	+	- 2,8	-	Rabe
27,38	202°,0	0,62	+ 1,4	+	0,0	-	Greenw. Obs.
28,56	193°,5	0,77	- 3,6	+	- 5,0	+	Fatou
28,58	201°,0	0,66	+ 4,0	+	+ 2,5	+	Aitken
29,41	196°,7	0,65	+ 2,0	+	+ 0,4	-	V. Biesbroeck
29,57	197°,1	0,74	+ 2,8	+	+ 1,2	+	Bonnet
29,82	195°,4	0,50	+ 1,7	-	+ 0,2	-	Doberck
30,33	193°,1	0,66	+ 0,8	+	- 0,8	-	V. Biesbroeck
30,86	194°,4	0,70	+ 3,4	+	+ 1,7	-	Kuiper
31,34	189°,9	0,73	0,0	+	- 1,6	+	V. Biesbroeck
31,56	193°,0	0,60	+ 3,5	-	+ 1,9	-	Simonov
31,68	194°,2	0,74	+ 5,0	+	+ 3,3	+	Bonnet
32,45	189°,5	0,73	+ 2,0	+	+ 0,4	-	Simonov
33,60	186°,9	0,81	+ 1,7	+	+ 0,2	+	Baize
34,51	182°,9	0,77	- 0,5	+	- 2,0	-	Rabe
35,12	183°,3	0,90	+ 1,0	+	- 0,5	+	Baize
35,54	182°,4	0,86	+ 0,8	+	- 0,6	+	Rabe
36,48	182°,4	0,85	+ 2,4	+	+ 1,0	+	Duruy
36,55	178°,7	0,90	- 1,2	+	- 2,6	+	Rabe
36,60	183°,2	0,97	+ 3,2	+	+ 2,0	+	Greenw. Obs.
36,86	179°,4	0,94	0,0	+	- 1,4	+	Baize
37,53	178°,8	0,92	+ 0,4	+	- 0,9	+	Rabe
38,57	177°,3	0,93	+ 0,5	+	- 0,8	+	Rabe
39,49	179°,2	0,94	+ 3,6	+	+ 2,5	+	Greenw. Obs.
39,52	175°,2	0,90	- 0,5	+	- 1,4	-	Duruy
39,54	176°,1	0,96	+ 0,6	+	- 0,5	-	Rabe
39,56	179°,4	1,09	+ 3,9	+	+ 2,8	+	Sémirot
39,59	175°,3	1,03	- 0,1	+	- 1,2	+	Baize
40,53	173°,8	0,95	- 0,4	+	- 1,4	+	Rabe
41,39	174°,5	0,96	+ 1,4	+	+ 0,4	+	Korbut
41,53	173°,2	0,96	+ 0,3	+	- 0,7	+	Rabe
41,59	173°,0	1,04	+ 0,2	+	+ 0,8	+	Baize
41,71	174°,4	1,20	+ 1,7	+	+ 0,8	+	Duruy
42,57	171°,7	1,02	0,0	+	- 0,8	+	Rabe
42,58	175°,5	0,98	+ 3,9	+	+ 3,0	+	Duruy
43,53	170°,5	1,00	0,0	+	- 0,8	+	Rabe
44,27	173°,7	1,06	+ 3,9	+	+ 3,3	+	V. Biesbroeck
44,30	172°,7	1,04	+ 3,0	+	+ 2,3	+	Voûte
44,57	169°,2	1,07	- 0,2	+	- 0,8	+	Baize
45,34	172°,6	1,10	+ 4,0	+	+ 3,5	+	V. Biesbroeck
45,65	170°,2	1,10	+ 1,9	+	+ 1,4	+	Eggen
46,34	167°,3	1,09	- 0,3	+	- 0,7	+	Baize
46,55	168°,0	1,03	+ 0,6	+	+ 0,2	-	Rabe
47,50	169°,8	1,08	+ 3,4	+	+ 3,1	+	V. Biesbroeck
48,56	165°,1	1,12	- 0,3	+	- 0,5	+	Baize
48,57	166°,3	1,08	+ 0,9	+	+ 0,7	+	Rabe
49,42	165°,8	1,02	+ 1,2	-	+ 1,1	-	Fokker
49,48	163°,9	1,38	- 0,7	+	- 0,7	+	Guyot
49,54	165°,7	1,10	+ 1,2	+	+ 1,1	+	Rabe
50,50	167°,7	1,29	+ 4,0	+	+ 4,3	+	Pretre
50,53	164°,3	1,09	+ 0,6	+	+ 1,0	-	Rabe
51,53	163°,3	1,14	+ 0,5	+	+ 0,8	+	Rabe
51,59	162°,7	1,15	0,0	+	+ 0,2	+	Baize
4,66	161°,0	1,17	+ 0,8	+	+ 1,5	+	Baize

Con gli elementi orbitali (I) da me ottenuti ho calcolato le posizioni apparenti del satellite e le ho paragonate con i risultati delle osservazioni, riducendo sempre gli angoli di posizione all'equinozio 1950,0. Ho poi eseguito gli stessi calcoli con gli elementi (II) dell'orbita del Van Biesbroeck, onde esaminare quale delle due orbite rispondesse meglio alle osservazioni: in totale *ho calcolato circa duecentocinquanta angoli di posizione  $\vartheta$  ed altrettante distanze  $\rho$* , valendomi delle note formole della teoria <sup>(6)</sup> delle stelle binarie.

Riporto i risultati di questi lunghi calcoli nella Tabella II, dove nelle prime tre colonne figurano rispettivamente la data di ogni osservazione, l'angolo di posizione  $\vartheta$  osservato e la distanza  $\rho$  osservata; nella quarta e nella quinta colonna sono dati gli scarti  $O - C$  tra i valori osservati e quelli calcolati con gli elementi (II) del Van Biesbroeck; nella sesta e settima colonna gli analoghi scarti  $O - C$  tra i valori osservati e quelli calcolati con i miei elementi (I); infine l'ultima colonna reca il nome dell'osservatore.

5. - Come appare dalla tabella, se si eccettuano alcune poche osservazioni evidentemente inesatte (ciò che è facile spiegare, data la difficoltà di misurare stelle doppie molto strette), l'orbita (I) migliora per alcuni intervalli di tempo la rappresentazione delle osservazioni; mentre per altri intervalli di tempo - *alternati* con i primi - appare migliore l'orbita (II) del Van Biesbroeck. Così per esempio, per l'intervallo 1869-1889 e per l'intervallo 1904-1921, i valori di  $\vartheta$  calcolati con gli elementi (II) si avvicinano maggiormente a quelli osservati; all'opposto, negli intervalli 1890-1903 e nel trentennio successivo al 1921, la mia orbita (I) appare più esatta. Inoltre, deve notarsi che gli scarti  $O - C$  sono generalmente dello *stesso segno* per entrambe le orbite.

Ma possiamo fare ancora altre osservazioni.

Infatti, dopo aver calcolato le anomalie vere  $v$  che ha il satellite nella sua orbita, io ho potuto constatare che l'angolo di posizione  $\vartheta$  in ciascun quadrante sembra dapprima rallentare e poi accelerare; o viceversa. In particolare, per i tratti in cui il rallentamento è maggiore, l'orbita di Van Biesbroeck rappresenta meglio le osservazioni; invece, nei tratti ove il satellite sembra accelerare, la mia orbita risulta più esatta. Le differenze maggiori tra osservazioni e calcolo si hanno poi quando il satellite è nelle vicinanze del periastro, e cioè verso il 1895. Per i raggi vettoriali  $\rho$ , la tabella II mostra invece che - per entrambe le orbite - dal 1895 al 1915 le differenze  $O - C$  sono generalmente negative; mentre invece dopo il 1930 - e sempre per entrambe le orbite - esse sono generalmente positive.

Tutto ciò mi fa sorgere il dubbio che queste differenze siano dovute a cause sistematiche; e cioè probabilmente alle perturbazioni prodotte dall'attrazione di un secondo satellite oscuro, oppure al moto della linea degli apsidi dovuto alla forma allungata od allo schiacciamento polare dei due astri. E su ciò mi propongo di tornare in una prossima Nota.

(6) Cfr. per esempio G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II.

**Astronomia.** — *Sopra la BM Orionis.* Nota di TERESA FORTINI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La BM Orionis, importante ed ancora poco nota binaria fotometrica, è la componente più debole del così detto « Trapezio di Orione »; gruppo di stelle che fa parte della multipla  $\theta$  Orionis, situata nella nebulosa omonima. Tutte le stelle di questa multipla appartengono ai primi tipi spettrali (O e B) ed hanno pertanto temperatura effettiva molto elevata, da 18.000 a 22.000 gradi circa. In conseguenza, lo spettro della nebula a cui queste stelle sono associate, presenta le caratteristiche righe lucide di emissione; tra cui particolarmente intense quelle del nebulio (O III) nel verde, con lunghezze d'onda  $\lambda = 5007$  e  $\lambda = 4959$ .

Una buona conoscenza delle caratteristiche fisiche e cinematiche delle stelle del trapezio, sarebbe certamente assai importante. Ma le indagini sono pur troppo ostacolate dalla difficoltà delle osservazioni; e cioè, per la parte fotometrica, dalla grande vicinanza delle stelle e, per la spettroscopica, dalla presenza delle righe di emissione della nebula. E ciò spiega perché i risultati ottenuti da vari astronomi, specialmente per quanto riguarda l'ampiezza della variazione fotometrica della BM Orionis, siano contrastanti tra loro.

Per portare un qualche contributo alla questione, ho eseguito in questi ultimi anni una serie di osservazioni fotometriche sopra questa variabile, valendomi del grande equatoriale Steinheil di 39 cm. di apertura dell'Osservatorio di Monte Mario. Ma, prima di riportare i miei risultati, desidero fare qualche considerazione sopra la velocità radiale di questa stella e delle altre appartenenti al trapezio.

2. A tale proposito, ricordo anzi tutto che recentemente un notevole contributo in proposito è stato apportato (1) da O. Struve e J. Titus.

Essi hanno determinato gli spettrogrammi delle quattro stelle del trapezio, servendosi di un grande spettrografo a quarzo dell'Osservatorio Mac Donald. Sono presenti negli spettri da essi ottenuti anche le righe di emissione della nebula e quelle dovute all'assorbimento del calcio interstellare; ma poiché lo strumento è efficiente anche per la regione ultravioletta, compare negli spettrogrammi delle quattro stelle quella zona che non è disturbata dalle righe nebulari. In tal modo O. Struve e J. Titus hanno determinato le velocità radiali delle stelle del trapezio, ricavando da ogni spettrogramma anche le velocità radiali della nebulosa e della materia interstellare.

Ora, tra le quattro stelle studiate, soltanto la curva della velocità radiale della BM Orionis mostra un carattere periodico. Da tale curva, dedotta in

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

(1) Cfr. O. STRUVE and J. TITUS, *Radial velocities of the four stars of the trapezium in Orion*, in « *Astroph. Journ.* », vol. LXXXIX (1944).



base allo spettro della componente più luminosa, O. Struve ha ricavato gli elementi dell'orbita spettroscopica riportati qui appresso

$$K = 81 \text{ km/sec} ; P = 6^d,5 ; a \sin i = 7 \times 10^6 \text{ km}$$

$$e = 0,14 ; \frac{\mu_2^3}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \sin^3 i = 0,35 \mu'$$

$$\gamma = 24 \text{ km/sec} ; \omega = 194^\circ$$

dove  $\gamma$  indica la velocità radiale del baricentro del sistema;  $K$  la semi-ampiezza della curva della velocità radiale;  $P$  il periodo;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  e  $\mu'$  rispettivamente le masse dei due astri e la massa del Sole;  $i$  l'inclinazione del piano dell'orbita sul piano tangente alla sfera celeste passante per il baricentro del sistema;  $e$  l'eccentricità;  $a$  il semiasse maggiore ed  $\omega$  l'angolo che il pericentro forma con la linea dei nodi.

È da notare che il periodo  $P = 6,5^d$  della velocità radiale della BM Orionis, determinato da Struve, coincide presso a poco con il periodo fotometrico <sup>(2)</sup>, onde rimane accertato il carattere di variabile a eclisse della BM Orionis.

Dalle osservazioni fotometriche non è stata però dedotta fino a questo momento una accurata curva di luce, onde ricavarne le informazioni necessarie a completare i dati dedotti dalle osservazioni spettroscopiche; non si conoscono così le masse e le dimensioni del sistema binario che costituisce la BM Orionis.

3. Dal lavoro di Struve si possono fare però delle interessanti deduzioni sulle quattro stelle, se si paragonano le loro velocità radiali con quella della nebula nel punto stesso in cui esse sono immerse. A dare maggiore peso a queste considerazioni, si può associare alle stelle del trapezio la componente più luminosa della  $\theta_2$  Orionis, la HD 37041, le cui osservazioni sono dovute a Münch <sup>(3)</sup>.

TABELLA I.

			Stelle	nebula	Ca II (interstellare)
A	$\theta_1$ Orionis	HD 37020	+ 34,3 km/sec	+ 14,0 km/sec	+ 9,5 km/sec
B	»	» 37021	24,0 »	17,6 »	22,0 »
C	»	» 37022	37,4 »	0,5 »	20,3 »
D	»	» 37023	32,4 »	18,8 »	23,0 »
A	$\theta_2$ Orionis	» 37041	34,5 »	17,6 »	18,9 »

(2) H. SCHNELLER, *Mitteilungen über veränderliche Sterne*, 1948.

(3) Cfr. G. MUNCH, *A new orbit for the spectroscopic binary  $\theta_2$  Orionis A*; in « *Astroph. Journ.* », vol. XCVIII (1943).



Per maggiore chiarezza ho riportato nella Tabella I i valori delle velocità radiali delle cinque stelle (seconda colonna), della nebulosa (terza colonna), sempre nelle regioni nebulari circostanti le stelle medesime, e del calcio interstellare (quarta colonna).

Assegnando alla nebula una velocità radiale di 17,5 km/sec (valore che non coincide con quello medio dedotto dalla tabella, ma che si può ritenere come il più probabile per la parte centrale della nebulosa di Orione), si vede che le velocità radiali delle cinque stelle superano, in media, quella della nebula di circa 15 km/sec. Secondo Struve (mem. citata) questo eccesso di velocità si potrebbe attribuire sia a un moto delle stelle attraverso alla nebulosa di Orione, sia più probabilmente all'effetto Einstein; e cioè a uno spostamento rosso gravitazionale dovuto alla massa delle stelle che Struve suppone molto elevata. È noto infatti dalla teoria della relatività che, se una sorgente luminosa è sottoposta a un forte campo gravitazionale, tutte le righe appaiono spostate verso il rosso di una quantità  $\Delta\lambda$  proporzionale alla loro lunghezza d'onda  $\lambda$  e data dalla relazione:

$$(1) \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,000002 \frac{\mu}{R}$$

dove tanto la massa  $\mu$  che il raggio  $R$  sono espressi in termini della massa e del raggio solari. Usando tale relazione, Trumpler ha determinato la massa di stelle lontanissime di cui era nota la distanza, trovando in alcuni casi masse dell'ordine di centinaia di volte la massa solare; valori elevatissimi se si considera che in generale le masse delle stelle non sono inferiori a 1/10 e non superano 50 volte la massa solare. Molto recentemente però si sono avanzati forti dubbi sulla realtà fisica di queste masse. Struve stesso nel suo libro *Stellar evolution* <sup>(4)</sup>, cita esempi di alcune stelle per le quali in base alle orbite spettroscopiche si ritrovano masse del tutto normali e molto inferiori a quelle assegnate loro da Trumpler applicando la relazione (1). Prendendo in esame le cinque stelle riportate nella tabella I, notiamo che per un eccesso di velocità radiale di 15 km/sec si ottiene un valore del rapporto  $\mu/R = 25$ .

4. Sebbene, come abbiamo detto, non si abbiano informazioni dirette, pure per esaminare l'ipotesi di Struve sopra l'effetto Einstein, si può tentare di cercare le masse  $\mu$  e i raggi  $R$  di queste stelle, supponendo che esse ubbidiscano alla relazione massa-luminosità e appartengano alla sequenza principale. Si deve ammettere naturalmente che le stelle si trovino alla distanza della nebula di 540 parsecs <sup>(5)</sup>.

Ciò posto, poiché approssimativamente gli astri irradiano come corpi neri, il rapporto della quantità totale di energia  $L$  emessa da ognuna delle cinque stelle rispetto a quella  $L'$  emessa dal Sole è dato dalla relazione <sup>(6)</sup>:

$$(2) \quad \frac{L}{L'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \left(\frac{T}{T'}\right)^4.$$

(4) O. STRUVE, *Stellar evolution*, Princeton University Press, 1950, pp. 17, 18, 19.

(5) W. BECKER, *Sterne und Sternsysteme*, p. 180.

(6) G. ARPELLINI, *I fondamenti scientifici dell'Astrofisica*. Ed. Hoepli, p. 268.

Donde ricordando che la luminosità di un astro è proporzionale, a meno di una costante, al logaritmo della grandezza assoluta bolometrica si ha immediatamente

$$(3) \quad M_b - M'_b = 5 \lg \frac{R}{R'} + 10 \lg \frac{T}{T'}$$

Poiché abbiamo supposto che le stelle appartengono alla sequenza principale, si può assegnare a ognuna di esse la temperatura che nel diagramma di Hertzsprung-Russell, corrisponde al loro tipo spettrale.

Apportando alla grandezza visuale assoluta  $M$ , ottenuta (tenendo conto della distanza  $r$  della nebula) mediante la nota formula:

$$(4) \quad M = m + 5 - 5 \log r$$

la correzione bolometrica, la relazione (3) ci permette immediatamente di determinare il raggio  $R$  della stella in unità del raggio solare  $R'$ .

Ricordando la nota relazione di Russell  $L = \mu^{3.5}$  che lega la luminosità alla massa della stella, quando si prenda per unità di massa e di luminosità quelle del Sole, si ottengono direttamente le masse  $\mu$  delle stelle sempre in unità della massa solare.

I calcoli da me eseguiti per tutte e cinque le stelle sono riassunti nella Tabella II. Le grandezze visuali e i tipi spettrali sono quelli dati dall'H. D., mentre tanto le temperature effettive che le correzioni bolometriche sono state ricavate dalle tabelle più recenti, che sono quelle date da Kuiper <sup>(7)</sup>.

TABELLA II.

	HD 37020	HD 37021	HD 37022	HD 37023	HD 37041
$m_{\text{vis. app.}}$ . . . . .	6,8	7,9	5,4	6,8	5,2
tipo spettrale . . . . .	B <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	O <sub>7</sub>	B <sub>0</sub>	O <sub>9</sub>
$M_{\text{vis.}}$ . . . . .	— 1,9	— 0,8	— 3,3	— 1,9	— 3,5
Corr. bol. . . . .	— 1,8	— 1,8	— 2,7	— 2,3	— 2,4
$M_{\text{bol.}}^{(*)}$ . . . . .	— 4,2	— 3,1	— 6,5	— 4,7	— 6,4
$T_{\text{eff.}}$ . . . . .	17.000°	17.000°	21.000°	19.000°	20.000°
$R$ . . . . .	6,6	4,0	12,6	7,8	15,9
$\mu$ . . . . .	10,1	7,6	18,5	12,5	20,1
$\mu/R$ . . . . .	1,5	1,9	1,5	1,6	1,3

(\*) Alle grandezze assolute è stata apportata la correzione  $\Delta M = -0,5$  per tenere conto dell'assorbimento della materia interstellare, nella regione di Orione.

(7) W. BECKER, op. cit.

Come si vede dalla tabella II, i valori dei rapporti  $\mu/R$  da me trovati differiscono pochissimo tra loro e sono in piena contraddizione con quello dedotto in base alla relazione (1). Naturalmente i precedenti risultati sono basati sulla legge di Russell, ma si può tentare di provarli in altra maniera; giacché trattandosi di stelle con tipi spettrali presso a poco uguali, si può ammettere che le loro caratteristiche non differiscano troppo una dall'altra. Ora per quanto riguarda la BM Orionis, l'orbita spettroscopica aveva fornito la relazione:

$$(5) \quad \frac{\mu_2^3}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \sin^3 i = 0,35 \mu'.$$

Se si suppone che le masse delle due componenti siano una doppia dell'altra e cioè  $\mu_1/\mu_2 = 2$ , si avrà

$$(6) \quad \mu_2 \sin^3 i = 3,15 \mu'.$$

Ora è noto che nel caso di doppie fotometriche, l'inclinazione  $i$  del piano orbitale sul piano tangente alla sfera celeste non differisce mai molto da  $90^\circ$ . Fissando per  $i$  due valori estremi

$$i = 90^\circ \quad \text{e} \quad i = 64^\circ$$

si ha:

$$\begin{array}{lll} \text{nel I caso:} & \sin i = 1 & \mu_2 = 3,15 \mu' \quad \mu_1 = 6,3 \mu' \\ \text{e nel II caso:} & \sin i = 0,9 & \mu_2 = 4,5 \mu' \quad \mu_1 = 9 \mu'; \end{array}$$

valori come si vede in ottimo accordo con quello ricavato precedentemente nella Tabella II: ciò che prova che lo spostamento verso il rosso nello spettro di queste stelle *non* è dovuto all'effetto Einstein.

5. Per spiegare l'eccesso di velocità radiale di 15 km/sec non resta allora che ammettere la seconda ipotesi di Struve, e cioè che le stelle del trapezio di Orione siano in moto attraverso la nebula. Tale ipotesi è anzi in ottimo accordo con le moderne teorie sull'evoluzione stellare (secondo le quali le associazioni di tipo O e cioè di stelle molto giovani, come quelle del trapezio di Orione), sarebbero in una fase di espansione. A tale proposito, sono dovuti a Blaauw degli studi sull'evoluzione e l'espansione dei due ammassi  $\zeta$  Persei <sup>(8)</sup> e Scorpio-Centaurus <sup>(9)</sup>. A Blaauw e Morgan <sup>(10)</sup>

(8) A. BLAAUW, *The age and evolution of the  $\zeta$  Persei group of O and B type stars. The evolution of expanding stellar associations, the age and origin of the Scorpio-Centaurus Group.* «B. A. M.», n. 433 (1952).

(9) A. BLAAUW, *A study of the Scorpio-Centaurus Cluster.* «Groningen Publ.», n. 52 (1946).

(10) BLAAUW and MORGAN, *The space motions of AE Aurigae and  $\mu$  Columbae with respect to the Orion Nebula.* «Astroph. Journ.», vol. CXIX (1954).

è dovuto poi un interessantissimo studio sulle due stelle AE Aur. e  $\mu$  Col., le quali hanno una elevatissima velocità spaziale. Secondo i due autori, queste stelle che oggi si trovano da parti opposte rispetto alla nebulosa di Orione, sarebbero partite circa tre milioni di anni fa da uno stesso punto della nebulosa.

Stabilito questo punto di notevole importanza, riporterò in altra Nota i risultati delle mie osservazioni fotometriche sopra la BM Orionis e l'orbita che se ne deduce.

**Geodesia.** — *Sulla legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi dovuti all'imperfetto allineamento delle spranghe.* Nota di MICHELE CAPUTO, presentata (\*) dal Socio G. CASSINIS.

1. In questa ricerca mi sono proposto di determinare la legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi geodetiche, dovuti al mancato allineamento delle spranghe rispetto alla direzione della base.

Il procedimento che ho seguito per determinare tale legge si discosta, a quanto mi consta, da quelli usuali, e su di esso non mi sembra inopportuno richiamare l'attenzione anche perché esso si presta ad estensioni ed applicazioni ad altri casi più complicati.

D'altra parte il risultato è stato verificato mediante applicazione del metodo della funzione caratteristica.

2. Sia  $2L$  la lunghezza della spranga che si usa per misurare la base geodetica ed indichiamo con  $x_i$  l'angolo che essa forma colla direzione della base nell'operazione  $i$ -esima di riporto. Supponendo che l'operazione venga ripetuta  $n$  volte e nell'ipotesi che gli errori di allineamento non siano correlati, l'errore totale sarà:

$$\varepsilon = 2L \sum_{i=1}^n (1 - \cos x_i).$$

Sviluppando ora  $\cos x_i$  in serie, e, trascurando le potenze superiori alla seconda, come è lecito per il fatto che gli errori sono sufficientemente piccoli, si ha:

$$(1) \quad \varepsilon = L \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Supponendo poi che le  $x_i$  abbiano distribuzione normale con valore medio nullo e scarto quadratico medio  $\sigma$ , per determinare la densità di probabilità di  $\varepsilon$  cominceremo col determinare quella della  $\eta$  definita come segue:

$$(2) \quad \eta^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

poi troveremo la densità di  $\varepsilon = L\eta^2$ .

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

3. Considerando la (2) precedente, la densità di probabilità di una  $n$ -pla prefissata  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ , è data, per il teorema delle probabilità composte, da:

$$(3) \quad (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2}.$$

Per determinare la densità di probabilità di un prefissato  $\eta$  si dovrà poi fare, per il teorema della probabilità totali, la somma di tutti i termini (3) individuati da  $n$ -ple  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la cui somma dei quadrati dia  $\eta^2$ . Per fare ciò interpretiamo le  $x_i$  come coordinate cartesiane di punto in uno spazio  $S_n$  ad  $n$  dimensioni; in questo spazio l'equazione (2) rappresenta un'ipersfera  $\Sigma$  di raggio  $\eta$ ; orbene, le  $n$ -ple di  $x_i$  la cui somma dei quadrati dà  $\eta^2$ , individuano tutti i punti dell'ipersfera di equazione (2), e perciò la densità di  $\eta$  sarà data al limite dall'integrale ipersuperficiale esteso a  $\Sigma$ :

$$f(\eta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\Sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2} d\Sigma = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} \int_{\Sigma} d\Sigma$$

essendo  $\int_{\Sigma} d\Sigma$  la misura ipersuperficiale di  $\Sigma$ .

Osserviamo ora che la misura di tale ipersfera di raggio  $\eta$  vale, come noto:

$$\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \eta^{n-1}}{(n-2)!!} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$\frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} \eta^{n-1} \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

da cui risulta che:

$$f(\eta) = \frac{\eta^{n-1} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^n (n-2)!!} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$f(\eta) = \frac{2\eta^{n-1} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^n (n-2)!!} \quad \text{se } n \text{ è dispari}.$$

Introducendo poi la funzione Gamma, si ottiene per  $n$  pari o dispari:

$$(4) \quad f(\eta) = 2^{\frac{2-n}{2}} \sigma^{-n} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} \eta^{n-1}.$$



4. Per ricavare ora la densità di  $\varepsilon = L\eta^2$  osserviamo che la relazione  $\varepsilon \leq y$  è equivalente all'altra:

$$\sqrt{\frac{y}{L}} \leq \eta \leq \sqrt{\frac{y}{L}}$$

e indicando con  $F(\eta)$  la funzione di ripartizione delle  $\eta$ ,  $\varepsilon$  avrà come funzione di ripartizione la  $\Phi(y)$  così definita:

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ F\left(\sqrt{\frac{y}{L}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{y}{L}}\right) & \text{per } y > 0. \end{cases}$$

Poiché  $f(\eta) = F'(\eta)$  è la densità delle  $\eta$ , la densità di  $\varepsilon$  ha la seguente espressione:

$$\varphi(y) = F'(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{yL}} \left[ f\left(\sqrt{\frac{y}{L}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{y}{L}}\right) \right] & \text{per } y > 0 \end{cases}$$

ovvero per la (4):

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon L}} 2^{\frac{2-n}{2}} \sigma^{-n} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2 L}}$$

ed infine:

$$(5) \quad \varphi(\varepsilon) = (2L\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2 L}}$$

per  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi(\varepsilon) = 0$  per  $\varepsilon \leq 0$ .

5. La funzione di ripartizione delle  $\varepsilon$  definita come segue:

$$(6) \quad \Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{per } \varepsilon \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{\varepsilon} \varphi(t) dt & \text{per } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

vale, per  $n > 1$ , integrando successivamente per parti:

$$(7) \quad \Phi(\varepsilon) = (2L\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \left[ \frac{(n-2)!!}{(L\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}} \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{t}{2\sigma^2 L}}}{\sqrt{t}} dt - e^{-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2 L}} \left\{ \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}}{(2\sigma^2 L)^{\frac{n-1}{2}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\prod_{j=2}^i \left(\frac{n}{2} - j + 1\right) \varepsilon^{\frac{n}{2}-i}}{(2\sigma^2 L)^{-i}} \right\} \right]$$

per  $n$  dispari, e per  $n$  pari:

$$(8) \quad \Phi(\varepsilon) = (2L\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \left[ (2\sigma^2 L)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right)! - e^{-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2 L}} \left\{ \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}{(2\sigma^2 L)^{-\frac{n}{2}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\prod_{j=2}^i \left(\frac{n}{2} - j + 1\right) \varepsilon^{\frac{n}{2}-i}}{(2\sigma^2 L)^{-i}} + \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}}{(2\sigma^2 L)^{-1}} \right\} \right]$$

ove trasformando l'ultimo integrale mediante la sostituzione  $v^2 = t$  si ottiene per esso la funzione di ripartizione della legge normale di Gauss.

Sia per  $n$  pari che per  $n$  dispari si può verificare che la funzione  $\Phi(\varepsilon)$  gode delle proprietà caratteristiche delle funzioni di ripartizione; dalle formule precedenti si ha infatti, osservando che  $\Phi(\varepsilon) = 0$  se  $\varepsilon < 0$  per definizione, che  $\Phi(\varepsilon)$  è non decrescente, positiva, e che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi(\varepsilon) = 1.$$

Nel caso di  $n = 1$  funzione di ripartizione della (5) si riconduce alla funzione di ripartizione della legge normale di Gauss mediante la sostituzione  $v^2 = t$  da effettuarsi nella (6).

6. I momenti  $\mu_m$  della (5) sono dati dalla relazione:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^m \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

ovvero:

$$\mu_m = (2L\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^{\infty} \varepsilon^{m-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2 L}} d\varepsilon$$

e integrando successivamente per parti:

$$(9) \quad \mu_m = (2\sigma^2 L)^m \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) \left(\frac{n}{2} + m - 2\right) \cdots \left(\frac{n}{2}\right) = (2\sigma^2 L)^m \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{n}{2} - i\right).$$

Risulta in particolare che lo scarto quadratico medio delle  $\varepsilon$  vale  $L\sigma^2 \sqrt{n(n+1)}$ .

7. Verificheremo ora l'esattezza della (5) mediante applicazione del metodo della funzione caratteristica. Consideriamo la funzione  $\alpha = Lx^2$  e sia  $x$  una variabile casuale; abbiamo visto al n. 4 che se  $f(x)$  è la densità delle  $x$  allora la densità delle  $\alpha$  vale:

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{L\alpha}} \left[ f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{L}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{L}}\right) \right] & \text{per } \alpha > 0. \end{cases}$$

Se  $x$  è una variabile casuale normale di valor medio nullo e di scarto quadratico medio  $\sigma$ , la densità di  $\alpha$  sarà quindi

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha \leq 0 \\ (2\pi\sigma^2 L\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2 L}} & \text{per } \alpha > 0. \end{cases}$$

La funzione caratteristica di  $\alpha$  sarà perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\alpha} \Psi(\alpha) d\alpha = \int_0^{\infty} e^{i\omega\alpha} (2\pi\sigma^2 L\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2 L}} d\alpha = (1 - 2\sigma^2 Li\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

Siano ora  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  variabili casuali normali di valor medio nullo e scarto quadratico medio  $\sigma$ , e consideriamo la funzione:

$$\varepsilon = L \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

La funzione caratteristica di  $\varepsilon$ , per la proprietà fondamentale delle funzioni caratteristiche, è:

$$(1 - 2\sigma^2 Li\omega)^{-\frac{n}{2}}$$

la densità di  $\varepsilon$  sarà quindi la funzione  $g(\varepsilon)$  soluzione dell'equazione integrale

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - 2\sigma^2 Li\omega)^{-\frac{n}{2}}.$$

Non è difficile verificare che la (5) già trovata è soluzione dell'equazione (10).

Nel caso particolare di  $L = 1$  la formula (5) per la variabile

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

è stata già trovata da H. Cramér <sup>(1)</sup> col metodo della funzione caratteristica.

(1) H. CRAMÉR, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, 1946.

**Fisica matematica.** — *Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di Relatività finale.* Nota di GIUSEPPE ARCIDIACONO, presentata (\*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

1. PREMESSA. — Recentemente <sup>(1)</sup> il Fantappiè ha fatto vedere che la teoria di « relatività ristretta » (basata sul gruppo di Lorentz  $Lz_{3+1}^{10}$ ), può perfezionarsi in una teoria di « relatività finale » (basata sul gruppo finale  $Fn_{3+1}^{10}$ ), nel senso che il gruppo di Lorentz risulta caso limite del gruppo finale (per  $R \rightarrow \infty$ ), e quindi può considerarsi come una approssimazione del gruppo finale stesso.

Tale teoria di relatività finale, se rimaniamo con un gruppo base a 10 parametri, ed operante su uno spazio a 4 dimensioni, non risulta ulteriormente perfezionabile.

Nella Nota citata, si è visto poi che, con la introduzione di una 5<sup>a</sup> coordinata omogenea  $x_4$ , le trasformazioni del gruppo finale possono ottenersi da sostituzioni lineari omogenee sulle 5 coordinate, e cioè dalle sostituzioni che formano il gruppo pseudoortogonale speciale  $Os_{4+1}^{10}$ . Tale gruppo risulta inoltre isomorfo, dal punto di vista complesso, al gruppo delle rotazioni  $Os_5^{10}$  dello  $S_5$  (con la sostituzione  $x_0 = ict$ ).

Noi quindi scriveremo le equazioni di Maxwell nell'Universo che ha per gruppo base l' $Os_{4+1}^{10}$ , ma per far ciò occorre completare il campo elettromagnetico con l'aggiunta di altre 4 componenti: le equazioni di Maxwell generalizzate descrivono allora tale campo a 10 componenti.

In questa Nota e nella successiva faremo vedere come la teoria di Maxwell si possa interamente trasportare nella Relatività finale, proponendoci di approfondire in un secondo momento lo studio del nuovo campo (a 4 componenti), per vedere quale significato fisico effettivo esso abbia.

2. LA TEORIA DI MAXWELL NELLA RELATIVITÀ FINALE. — Come si è visto nella precedente Nota <sup>(2)</sup>, per scrivere le equazioni analoghe a quelle di Maxwell nella teoria di Relatività finale, occorre definire in ogni punto dell' $S_5$  un bivettore <sup>(3)</sup> a 10 componenti distinte, 6 delle quali possono interpretarsi come componenti del campo elettromagnetico (e. m.), mentre le altre

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) L. FANTAPPIÈ, *Su una nuova teoria di « relatività finale »*, « Rend. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, vol. 17, fasc. 5 (1954).

(2) G. ARCIDIACONO, *Sull'importanza del gruppo base nel problema della unificazione dei campi fisici*, « Rend. Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, vol. XVIII, fasc. 4 (1955).

(3) J. H. SCHOUTEN, *Tensor analysis for physicists*, II ed. Oxford at the Clarendon Press 1954. La definizione di rotore, data nella Nota precedente, deve essere modificata così:

$$\text{Rot } w_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} = (p + 1) \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p]}.$$

4 saranno componenti di un nuovo campo, che indicheremo con le lettere  $G_0, G_1, G_2, G_3$ , e chiameremo brevemente « campo  $g_0, g$  ». Tale bivettore sarà del tipo:

$$(2.1) \quad G_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -iB_1 & -iB_2 & -iB_3 & -iG_0 \\ iB_1 & 0 & E_3 & -E_2 & -G_1 \\ iB_2 & -E_3 & 0 & E_1 & -G_2 \\ iB_3 & E_2 & -E_1 & 0 & -G_3 \\ iG_0 & G_1 & G_2 & G_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Da questo bivettore si ricava il trivettore duale (cfr. <sup>(2)</sup>, n. 2)

$$(2.2) \quad G_{ikl}^* = \pm iG_{mn}$$

che ci dà la « intensità del campo » e quindi il trivettore « eccitazione » che ha le 10 componenti distinte  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{\bar{G}}, \bar{G}_0$  legate alle  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, G_0$  da relazioni che qui non interessa precisare. La « distribuzione »  $J_{jk}$  ed il « potenziale »  $\varphi_{jk}$  saranno adesso dei bivettori:

$$(2.3) \quad J_{jk} = \begin{bmatrix} 0 & -ih_1 & -ih_2 & -ih_3 & -iJ_0 \\ ih_1 & 0 & -k_3 & k_2 & -J_1 \\ ih_2 & k_3 & 0 & -k_1 & -J_2 \\ ih_3 & -k_2 & k_1 & 0 & -J_3 \\ iJ_0 & J_1 & J_2 & J_3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \varphi_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & iU_1 & iU_2 & iU_3 & iV_0 \\ -iU_1 & 0 & -V_3 & V_2 & -A_1 \\ -iU_2 & V_3 & 0 & -V_1 & -A_2 \\ -iU_3 & -V_2 & V_1 & 0 & -A_3 \\ -ia & -A_1 & -A_2 & -A_3 & 0 \end{bmatrix}$$

dove si sono indicati con  $J_0, \mathbf{J}$  la distribuzione elettrica e con  $a, \mathbf{A}$  il potenziale e. m., mentre i segni sono stati scelti in modo da riottenere per  $x_4 = \text{cost.}$  le equazioni di Maxwell della relatività ristretta.

Vediamo ora quali saranno le componenti dell'operatore differenziale « nabra » dell' $S_5$ :  $\nabla_i = \partial_i$ . Poiché le trasformazioni del gruppo  $Os_{4+1}^{to}$  lasciano invariante la forma quadratica:

$$f = -c^2 t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 x_4^2$$

e tale forma, con le posizioni

$$(2.4) \quad \bar{x}_0 = ict, \quad \bar{x}_i = x_i (i = 1, 2, 3), \quad \bar{x}_4 = Rx_4,$$

si riduce ad una somma di quadrati:

$$\bar{f} = \bar{x}_0^2 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2$$

si avrà  $\nabla_i = \partial_i = \partial/\partial \bar{x}_i$  cioè, per le (2.4):

$$(2.5) \quad \partial_0 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, 3); \quad \partial_4 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

da cui segue che l'operatore che generalizza il D'alambertiano sarà dato da

$$(2.6) \quad \square^2 = |\square| = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \square + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}.$$



Ciò premesso, le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di Relatività finale saranno (per quanto detto nella Nota precedente) formalmente analoghe alle equazioni della elettrostatica <sup>(4)</sup>:

$$(2.7) \quad \boxed{\text{Div } \bar{G}_{ikl}^* = J_{ik} \quad ; \quad \text{Rot } G_{ikl}^* = 0}$$

Dalla 1<sup>a</sup> equazione, ricordando che  $\text{Div Div} = 0$ , seguono le equazioni che generalizzano la *conservazione della elettricità*:

$$\text{Div } J_{ik} = 0$$

mentre dalla seconda equazione segue la esistenza di un bivettore potenziale:

$$G_{ikl}^* = \text{Rot } \varphi_{kl} = \partial_i \varphi_{kl} + \partial_k \varphi_{li} + \partial_l \varphi_{ik}.$$

Nel vuoto ( $\bar{G}_{ikl}^* = G_{ikl}^*$ ) e per  $J_{ik} = 0$ , il campo è irrotazionale e solenoidale nello  $S_5$  <sup>(5)</sup>, cioè è armonico:

$$(2.8) \quad \square G_{ikl}^* = 0.$$

3. LE EQUAZIONI DEL CAMPO IN FORMA TRIDIMENSIONALE. — Per tradurre le equazioni stabilite, in forma tridimensionale, è opportuno osservare che gli operatori grad, div, rot dell' $S_3$ , essendo il rotore di un vettore ancora un vettore (e non un bivettore), godono di proprietà diverse da quelle degli operatori differenziali Grad, Rot, Div dell' $S_n$ . Precisamente valgono le proprietà:

$$(3.1) \quad \text{div rot} = 0; \text{rot grad} = 0; \text{div grad} = \Delta; \Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}.$$

Calcolate con la (2.2) le componenti dei trivettori  $\bar{G}_{ikl}^*$ ,  $G_{ikl}^*$  a partire da  $G_{ik}$ , e con calcoli del tutto elementari, è facile scrivere esplicitamente le equazioni (2.7)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{Div } \bar{G}_{ikl}^* &= J_{ik}, \\ \text{cioè } \partial_l \bar{G}_{ik}^{*l} &= J_{ik} \end{aligned}$$

$$(I) \quad \text{div } \mathbf{D} = J_0$$

$$(II) \quad \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$(III) \quad \text{rot } \mathbf{G} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_4} = \mathbf{h}$$

$$(IV) \quad \text{grad } \bar{G}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_4} = \mathbf{k}$$

(4) Per la teoria di Maxwell vedi per esempio C. MØLLER, *The theory of Relativity*, Oxford, at the Clarendon Press 1952. Per le teorie unitarie negli  $S_5$ , vedi A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris 1955.

(5) Basta ricordare che se  $w$  è un  $p$ -vettore ( $p > 1$ ), si ha:  $\nabla^2 w = \partial_j \partial^j w = \text{Div Rot } w + \text{Rot Div } w$ . (SCHOUTEN, loc. cit. pag. 82)

$$(3.3) \quad \text{Rot } G_{ikl}^* = 0, \\ \text{cioè } \partial_j G_{.k}^j = 0$$

$$(V) \quad \text{div } \mathbf{B} + \frac{1}{R} \frac{\partial G_0}{\partial x_4} = 0$$

$$(VI) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_4} = 0$$

$$(VII) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial G_0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{G} = 0$$

così otteniamo 15 equazioni distinte, delle quali le I, II, V, VI si possono considerare come equazioni di Maxwell generalizzate, mentre le III, IV, VII costituiscono un nuovo gruppo di 7 equazioni.

Analogamente si vede che accanto alla equazione di conservazione della elettricità, compaiono altre 4 equazioni di conservazione:

$$(3.4) \quad \text{Div } J_{ik} = 0, \\ \text{cioè } \partial_i J_{.k}^i = 0$$

$$(VIII) \quad \text{div } \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial J_0}{\partial t} = 0$$

$$(IX) \quad \text{rot } \mathbf{k} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x_4} = 0$$

$$(X) \quad \text{div } \mathbf{h} + \frac{1}{R} \frac{\partial J_0}{\partial x_4} = 0$$

È interessante osservare che i primi membri delle equazioni I, II, VII, VIII non subiscono alcuna modifica nel passaggio dalla relatività ristretta a quella finale, mentre l'interazione tra il campo e.m. ed il campo  $g_0, g$  appare attraverso la 5<sup>a</sup> coordinata, nelle rimanenti equazioni.

4. LE EQUAZIONI DI MAXWELL GENERALIZZATE, NELLA RELATIVITÀ RISTRETTA. - Se nelle equazioni precedenti poniamo  $x_4 = \text{cost.}$ , cioè consideriamo il campo e la distribuzione come funzioni di sole 4 coordinate (e così ricadiamo nella relatività ristretta perché ciò equivale formalmente a porre  $R \rightarrow \infty$ ), accade il fatto interessante che *il campo e.m. si separa dal campo  $g_0, g$ :*

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{D} = J'_0 \\ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}' \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \bar{\mathbf{G}} = \mathbf{h}' \\ \text{grad } \bar{G}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial t} = \mathbf{k}' \\ \frac{1}{c} \frac{\partial G_0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{G} = 0 \end{array} \right.$$

dove si sono indicate con  $J'_0, \mathbf{J}', \mathbf{h}', \mathbf{k}'$  le distribuzioni precedenti per  $x_4 = \text{cost.}$  Il primo gruppo di equazioni viene allora a coincidere con le equazioni di Maxwell della relatività ristretta, mentre il 2° gruppo descrive il nuovo campo  $g_0, g$ , le cui equazioni sono formalmente analoghe a quelle della idrodinamica classica:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\omega} \quad ; \quad \text{grad } p + \frac{\partial (\mu \mathbf{v})}{\partial t} = \mathbf{F} \quad ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } (\mu \mathbf{v}) = 0$$

nelle quali, come è noto,  $\mathbf{v}$  è la velocità delle particelle,  $\omega$  la velocità angolare,  $p$  la pressione,  $\mu$  la densità di massa ed  $\mathbf{F}$  le forze agenti sulle particelle<sup>(1)</sup>.

Le (4.1), (4.2) possono scriversi in forma quadridimensionale, se introduciamo i seguenti vettori e tensori dell' $S_4$ :

$$\begin{aligned} F_{ik} &= (i\mathbf{E}, \mathbf{B}) & G_i &= (iG_0, \mathbf{G}) & J'_i &= (iJ'_0, \mathbf{J}') \\ J'_{ik} &= (-i\mathbf{k}', \mathbf{h}') & \varphi'_i &= (i\mathbf{a}', \mathbf{A}') & \varphi'_{ik} &= (i\mathbf{v}', \mathbf{u}'). \end{aligned}$$

Si ottengono così due gruppi di equazioni:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \text{Div } \bar{F}_{ik} = J'_k \\ \text{Rot } F_{ik} = 0 \end{cases} \quad (4.4) \quad \begin{cases} \text{Div } G_i = 0 \\ \text{Rot } \bar{G}_i = J'_{ik} \end{cases}$$

Le conseguenze del 1° gruppo di equazioni sono ben note. Dal 2° gruppo di equazioni (descriventi il campo  $g_0 g$ ) ricaviamo l'esistenza di un bivettore potenziale e la legge di conservazione:

$$G_i = \text{Div } \varphi'_{ik} \quad ; \quad \text{Rot } J'_{ik} = 0$$

mentre invece nel vuoto ( $\bar{G}_i = G_i$ ) e per  $J'_{ik} = 0$ , il campo  $g_0 g$  è armonico:  $\square G_i = 0$ .

È interessante poi osservare che *nel vuoto*, nelle equazioni (4.2) è possibile separare il campo  $G_0$  dal campo  $\mathbf{G}$ ; difatti prendendo la div nei due membri della seconda equazione e ricordando la terza, si ottiene:

$$\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{h}' \quad ; \quad \square G_0 = \text{div } \mathbf{k}'.$$

È questa una proprietà notevole del campo  $g_0 g$ .

5. CAMPI E DISTRIBUZIONI STATICHE. — Vediamo infine cosa succede per  $x_4 = \text{cost.}$  e  $t = \text{cost.}$  In tal caso è facile vedere che il campo e. m. si scinde in un campo elettrostatico e in uno magnetostatico, mentre il campo  $g_0 g$  si scinde a sua volta in un campo *scalare*  $G_0$  ed in un campo *vettoriale*  $\mathbf{G}$ . Otteniamo così 4 campi staccati, di cui uno scalare e 3 vettoriali,

$$(I) \begin{cases} \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{rot } \mathbf{E} = 0 \end{cases} ; (II) \begin{cases} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} = 0 \end{cases} ; (III) \begin{cases} \text{rot } \bar{\mathbf{G}} = \mathbf{h}'' \\ \text{div } \mathbf{G} = 0 \end{cases} ; (IV) \text{grad } \bar{G}_0 = \mathbf{k}''$$

dove si sono indicati con  $\mathbf{h}''$  e  $\mathbf{k}''$  i vettori a cui si riducono  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{k}$  per  $x_4 = \text{cost.}$  e  $t = \text{cost.}$  Nel vuoto e per distribuzioni nulle si ricava che i 4 campi considerati sono armonici nello  $S_3$ :

$$\Delta \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \Delta \mathbf{H} = 0 \quad ; \quad \Delta \mathbf{G} = 0 \quad ; \quad \Delta G_0 = 0.$$

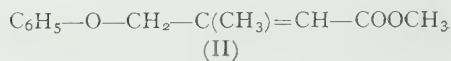
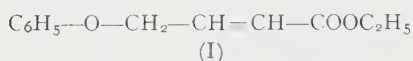
Ci sembra interessante notare che il legame tra i campi  $G_0$  e  $\mathbf{G}$  è analogo al legame che intercede tra i campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ . Inoltre dall'ultima delle (4.2) segue che se  $\mathbf{G} = 0$  il campo  $G_0$  è statico.

Nel successivo lavoro stabiliremo le equazioni cui soddisfano i potenziali, costruiremo il vettore  $f_i$  dell' $S_3$  che rappresenta le azioni meccaniche del campo ed il relativo tensore energetico generalizzato  $T_{ik}$ , faremo vedere che vale la identità  $f_i = \text{Div } T_{ik}$ , ed infine dedurremo le equazioni di Maxwell generalizzate da un principio variazionale.

(6) L. AUERBACH, *La idrodinamica teorica*, Mem. premiata dal R. Istituto Veneto nel 1880, Milano, Hoepli, 1881.

**Chimica organica.** — *Trasposizioni degli acidi  $\gamma$ -fenossicrotonici*<sup>(\*)</sup>. Nota di LUIGI CANONICA, ALBERTO FIECCHI ed UMBERTO VALCAVI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

In una precedente Nota<sup>(1)</sup> si descrissero gli esteri  $\gamma$ -fenossi e  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonici (I) e (II):



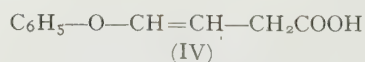
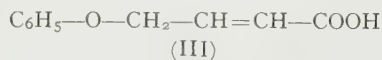
ottenuti per azione dei corrispondenti esteri  $\gamma$ -bromocrotonici sul fenolo in presenza di carbonato potassico.

La struttura dell'estere I era dimostrata dall'idrogenazione catalitica, quantitativa, ad estere  $\gamma$ -fenossibutirrico, dalla demolizione ossidativa ad acido fenossiacetico e dalla saponificazione ad acido  $\gamma$ -fenossicrotonico p. f. 136°, identico al prodotto ottenuto per altra via<sup>(2)</sup>.

Reazioni analoghe confermavano la struttura dell'estere (II), dalla saponificazione del quale si otteneva un acido p. f. 108°, di proprietà simili a quelle del  $\gamma$ -fenossicrotonico. Avevamo tuttavia osservato che dalla saponificazione alcalina dei due esteri si originavano, dopo acidificazione, accanto ai due acidi solidi ed in quantità spesso preponderante, frazioni acide, le quali rimanevano tenacemente liquide.

È stato ora possibile di ottenere l'acido liquido dell'estere (I) sotto forma di solido cristallino p. f. 32°. All'analisi ed alla determinazione dell'equivalente esso risulta isomero dell'acido p. f. 136°, dal quale tuttavia si differenzia nel comportamento chimico. Come l'acido  $\gamma$ -fenossicrotonico p. f. 136° esso si idrogena su carbone palladiato, a temperatura e pressione ambiente, a dare l'acido  $\gamma$ -fenossibutirrico: a differenza del primo viene facilmente alterato dagli acidi minerali diluiti, che liberano fenolo, e riduce la soluzione ammoniacale di argento. In soluzione acida la 2-4-dinitrofenilidrazina rapidamente lo attacca, ottenendosi, accanto al fenolo, individuato attraverso il triiododerivato, il 2-4-dinitrofenilidrazone dell'acido  $\beta$ -formilpropionico,  $\text{OHC---CH}_2\text{---CH}_2\text{---COOH}$ , identico al prodotto preparato per confronto, oppure, operando in metanolo, quello del suo metilestere.

Tale comportamento indica per l'acido p. f. 32° la struttura (IV) di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico, derivata dalla (III) dell'acido  $\gamma$ -fenossicrotonico per migrazione del doppio legame



(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

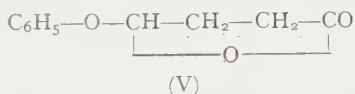
(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) CANONICA, FIECCHI e ADOBBATI, « Rend. Ist. Lombardo Scienze e Lettere », 87, 257 (1954).

(2) DEY, « J. Chem. Soc. », 1060 (1936).

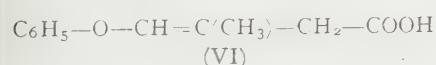
Dei vinileteri è nota la lability in mezzo acido: l'idrogenazione catalitica spesso comporta la frattura del legame ossidico <sup>(3)</sup>, che in qualche caso viene tuttavia conservato <sup>(4)</sup>, in analogia con il comportamento constatato per l'acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico. Quest'ultimo non è distillabile senza alterazione: un breve riscaldamento a 100–120° lo trasforma in un nuovo prodotto p. f. 83°, il quale costituisce l'unico ottenuto quando si operi senza qualche cautela, rimanendo allora inosservata l'intermedia formazione dell'acido p. f. 32°.

Isomero dell'acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico, il prodotto p. f. 83° non ha carattere acido, ma di lattone: insolubile nei bicarbonati alcalini, viene lentamente disciolto dagli idrati, a dare soluzioni dalle quali riprecipita inalterato per acidificazione. È inerte all'idrogenazione catalitica su carbone palladiato, a temperatura e pressione ambiente, riduce la soluzione ammoniacale d'argento e viene demolito dalla 2-4-dinitrofenilidrazina a dare fenolo ed il derivato dell'acido  $\beta$ -formilpropionico: è logico attribuirgli la struttura (V) di  $\gamma$ -fenossi- $\gamma$ -butirrolattone.



L'acido liquido, che risulta accanto a quello p. f. 108° dalla saponificazione dell'estere (II) può essere purificato per distillazione, a differenza del  $\gamma$ -fenossivinilacetico, ottenendo un prodotto omogeneo alla cromatografia su carta, condotta come si descrive nella parte sperimentale, caratterizzabile attraverso il sale di benzilisotiouonio.

Il rapporto tra i due acidi rappresentati dalle formule (VI) e (VII) appare il medesimo di quello degli acidi ottenuti dall'estere (I).



L'uno e l'altro forniscono per idrogenazione catalitica l'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilbutirrico, ma l'acido liquido riduce il Tollens e viene demolito dalla 2-4-dinitrofenilidrazina a fenolo e 2-4-dinitrofenilidrazone dell'acido  $\beta$ -formilbutirrico  $\text{OHC—CH(CH}_3\text{)—CH}_2\text{—COOH}$ .

L'esame degli spettri U.V., in cicloesano, conferma le strutture assegnate, indicando la stretta analogia tra le curve degli acidi  $\gamma$ -fenossi e  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico e quella del fenilviniletere <sup>(5)</sup>: per il lattone (V) e per i due acidi  $\alpha$ - $\beta$ -non saturi (III) e (VII) scompare il massimo a 225  $m\mu$ , sostituito, nello spettro di questi ultimi, da un altro, prossimo a quello del crotonato di etile su 212  $m\mu$  <sup>(6)</sup>.

(3) GENNE e NAGER, « J. Am. Chem. Soc. », 74, 650 (1952); KÖTZ e SCHAEFFER, « J. prakt. Chem. », 196, 604 (1913).

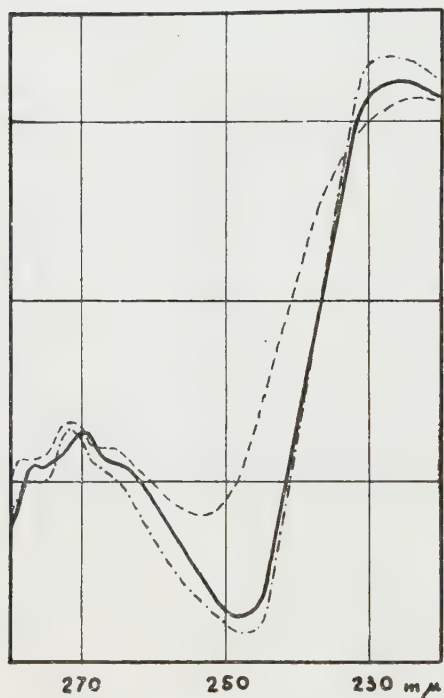
(4) BAKER e WEISS, « J. Am. Chem. Soc. », 66, 343 (1944); AUERHAHN e STADLER, « D.R.P. 601822, Frdl », 22, 53 (1937).

(5) JACOBS e PENN TUTTLE jr., « J. Am. Chem. Soc. », 71, 1313 (1949).

(6) PAIST, BLOUT, UHLE e ELDERFIELD, « J. Org. Chem. », 6, 280 (1941).

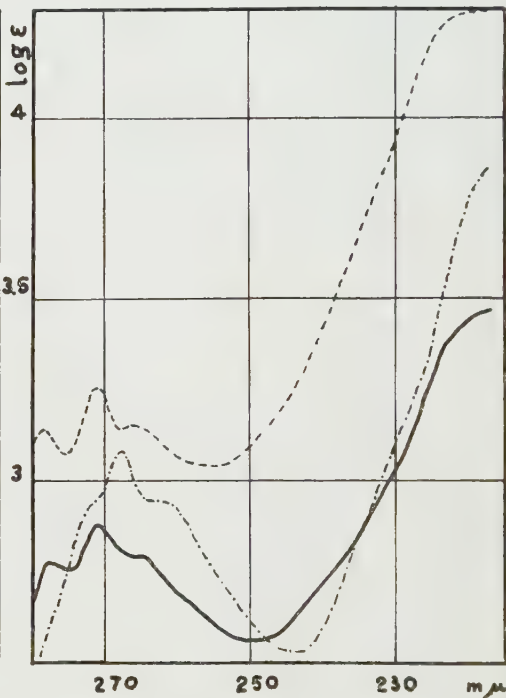


Il processo che trasforma gli esteri  $\gamma$ -fenossicrotonici in acidi  $\gamma$ -fenossivinilacetici è, presumibilmente, duplice: la trasposizione del doppio legame può prodursi sull'acido  $\gamma$ -fenossicrotonico generato dalla diretta saponificazione dell'estere; oppure su quest'ultimo, precedendo la saponificazione. Gli alcali caustici a caldo in effetti trasformano i due acidi altofondenti negli isomeri bassofondenti: il processo è tuttavia incompleto, raggiunge uno stato di equilibrio dimostrato dalla reazione inversa, che produce gli acidi altofondenti dai rispettivi isomeri, sempre per azione degli alcali caustici.



--- acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico  
 — acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico  
 - · - · fenil-vinil-etere

Fig. 1.



--- acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico  
 — acido  $\gamma$ -fenoossicrotonico  
 - · - ·  $\gamma$ -fenossibutirrolattone

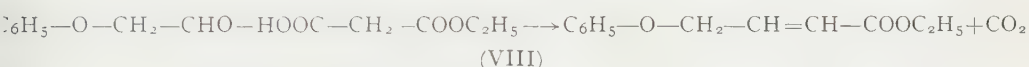
Fig. 2.

Su gli acidi, la migrazione del doppio legame è tuttavia lenta, nei confronti della saponificazione degli esteri, la quale procede con velocità insolitamente elevata anche a freddo e con quantità stechiometriche di alcali. Pur in queste moderate condizioni, le rese nei due acidi vinilacetici erano considerevoli: il fatto presupponeva una rapida trasposizione del doppio legame dell'estere, prodotta dall'alcali; ovvero un contenuto in esteri vinilacetici nei crotonici di partenza.

La seconda ipotesi, malgrado l'apparente omogeneità dei prodotti ottenuti dalla reazione tra fenolo ed esteri  $\gamma$ -bromocrotonici era giustificata, implicando la preparazione un prolungato riscaldamento su un alcali, quale

il carbonato potassico: né la quantitativa idrogenazione dei due esteri a  $\gamma$ -fenossibutirrici costituiva ormai una prova della loro purezza.

Parve opportuno preparare l'estere (I) per altra via, che escludesse l'intervento di alcali forti: si applicò al caso la condensazione delle aldeidi sul malonato monoetilico, che uno di noi altra volta descrisse <sup>(7)</sup>, secondo lo schema (VIII);

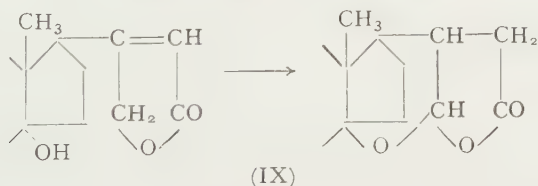


Il condensante usato, la piridina, non determina, almeno sull'acido, trasposizione alcuna pur dopo un trattamento prolungato. Il  $\gamma$ -fenossicrotonato di etile così ottenuto, saponificato a freddo ed evitando un eccesso di alcali, produce quantità di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico inferiori a quelle ottenute, nelle medesime condizioni, dall'estere preparato attraverso il  $\gamma$ -bromocrotonato: un prolungato riscaldamento su carbonato potassico, in soluzione di metiletichetone, pur non modificandone sensibilmente le costanti fisiche, aumenta le rese in acido bassofondente.

Anche il prodotto dalla fenossiacetaldeide non subisce, per prolungato riscaldamento a 210°, la trasposizione degli eteri allilici di Claisen, come in altra Nota <sup>(8)</sup> si descrisse per il prodotto del  $\gamma$ -bromocrotonato.

Pur riguardando strutture assai semplici, trasposizioni analoghe non erano mai state fino ad ora individuate, eccetto che per l'acido  $\gamma$ -metossicrotonico, il quale, come recentemente descrissero Owen e Sultanbawa <sup>(9)</sup>, genera per azione degli alcali una miscela di prodotti liquidi, parzialmente solubile in carbonato sodico, costituita verisimilmente dal lattone e dall'acido corrispondente al (V) ed al (IV).

Interessa il confronto tra la isomerizzazione degli acidi  $\gamma$ -fenossicrotonici e quella degli agliconi dei glucosidi del gruppo digitale-strofanto a dare, sempre per azione degli alcali, i cosiddetti isoagliconi secondo schemi del tipo (IX) <sup>(10)</sup>:



Esso indica che l'influenza del metile in  $\beta$ -, che nell'estere (II) attiva la trasposizione di Claisen <sup>(8)</sup>, ma inibisce la formazione del lattone del tipo (V) dall'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico (VI), pur in un prolungato riscaldamento a 150°, è presumibilmente di tipo elettrostatico, non sterico.

(7) CANONICA e BACCHETTI, «Gazz. Chim. Ital.», 83, 1043 (1953).

(8) Questi «Rendiconti», VIII, 17, 385 (1954).

(9) «J. Chem. Soc.», 3097 (1949).

(10) Cfr. FIESER e FIESER, *Natural products related to phenanthrene*. 3° Ed. Reinholds ed., New York (1949).

## PARTE SPERIMENTALE.

*γ-fenossicrotonato di etile dalla fenossiacetaldeide.* - In cm<sup>3</sup> 35 di piridina anidra si introducono, agitando energicamente e raffreddando in acqua, cm<sup>3</sup> 9,4 di acido solforico concentrato, indi g 27,5 di malonato etilpotassico finemente macinato e g 19,7 di fenossiacetaldeide <sup>(1)</sup>. Si riscalda sul b. m. per 4 h, fino a che lo sviluppo di anidride carbonica è terminato: la miscela di reazione, raffreddata, si versa poi, agitando, sulla miscela di g 200 di ghiaccio tritato, cm<sup>3</sup> 51 di acido cloridrico concentrato e cm<sup>3</sup> 30 di etere. La fase acquosa si estrae con etere; gli estratti riuniti si lavano con acqua, si essicano su solfato sodico e si distillano alla pressione di 2 mm ottenendo complessivamente, dopo rettifica delle frazioni di testa g 19,7 di prodotto bollente a 109-111°,  $n_D^{25} = 1,5160$  praticamente identico a quello del prodotto da fenolo e γ-bromocrotonato di etile. L'estere ottenuto non reagisce con la 2-4-dinitrofenilidrazina in soluzione alcoolica-cloridrica.

*Acido γ-fenossicrotonico.* - Alla soluzione di g 2 di γ-fenossicrotonato di etile, preparato dalla fenossiacetaldeide, in cm<sup>3</sup> 10 di etanolo, si aggiungono cm<sup>3</sup> 1,07 di soluzione acquosa al 33% di idrato sodico (il 20% di eccesso); dopo 30' si neutralizza alla fenolf taleina l'alcali libero, e si evapora nel vuoto la maggior parte del solvente. Il residuo si riprende con poca acqua, e la soluzione si acidifica con acido solforico diluito, del quale si evita un eccesso.

Il precipitato si estrae immediatamente con etere; gli estratti, essiccati su solfato sodico, lasciano per evaporazione un residuo cristallino solido, che si digerisce su b.m. con cm<sup>3</sup> 20 di etere di petrolio p. eb. 35-45°; l'etere di petrolio discioglie l'acido γ-fenossivinilacetico (ved. avanti). La parte insolubile si cristallizza da benzolo-etere di petrolio (1:1), ottenendo mg 650 di acido fenossicrotonico, p. f. 136° anche in miscela con il prodotto preparato per confronto dalla condensazione della fenossiacetaldeide sull'acido malonico in piridina (2).

Il γ-fenossicrotonato di etile preparato dalla condensazione tra il bromocrotonato ed il fenolo presenta in ogni caso reazione positiva più o meno intensa con la 2-4-dinitrofenilidrazina; saponificato, nel modo prima descritto, fornisce rese in acido γ-fenossicrotonico variabili, sempre inferiori a quelle ottenute dall'estere proveniente dalla fenossiacetaldeide mentre più elevate sono le rese in acido γ-fenossivinilacetico.

*Acido γ-fenossivinilacetico.* - L'acido si genera in ogni caso nella saponificazione dell'estere fenossicrotonico. Per ottenerlo con alta resa, g 4,8 di estere disciolti in cm<sup>3</sup> 20 di etanolo vengono riscaldati su b.m. con cm<sup>3</sup> 25 di idrato sodico acquoso 2 N per 2 h. Dopo raffreddamento si neutralizza alla fenolf taleina l'alcali libero, si evapora l'etanolo nel vuoto, e nella soluzione residua, raffreddata in ghiaccio, si introducono cm<sup>3</sup> 24,8 di acido solforico 2 N. L'olio separatosi si estrae con etere; il residuo ottenuto dall'evaporazione nel vuoto di tali estratti si cristallizza da etere di petrolio bassobollente, raffreddando a -5°. Dopo altra cristallizzazione p. f. 32° costante. All'analisi: trov.: C 67,46; H 5,86. Per C<sub>10</sub>H<sub>13</sub>O<sub>3</sub> calc.: C 67,40; H 5,66%. Alla determinazione dell'equivalente: trov. 177; per C<sub>9</sub>H<sub>9</sub>OCOOH calc. 178,2.

Alla temperatura ambiente ed allo stato solido, l'acido si conserva, almeno per qualche tempo, inalterato: si discioglie immediatamente nella soluzione di bicarbonato sodico e, a differenza del γ-fenossicrotonico, riduce rapidamente il reattivo di Tollens. Il sale di benzilisotiouonio, preparato nel modo consueto, si purifica per cristallizzazione dal diossano: p. f. 121° dec. All'analisi: trov.: N 8,19. Per C<sub>18</sub>H<sub>20</sub>O<sub>3</sub>N<sub>2</sub>S calc.: 8,13%.

Per la preparazione del p-fenilfenacilestere, mg 370 dell'acido, disciolti in cm<sup>3</sup> 15 di etanolo, vengono esattamente neutralizzati alla fenolf taleina con idrato sodico. Dopo l'aggiunta di mg 610 di bromuro di p-fenilfenacile si riscalda all'ebollizione per 40': per riposo di una notte in frigorifero si separa un abbondante precipitato cristallino, p. f. 110°

(11) SPEER e MAHLER, « J. Am. Chem. Soc. », 61, 1133 (1949).

dopo due cristallizzazioni da benzolo. All'analisi: trov.: C 77,35; H 5,70. Per  $C_{24}H_{20}O_4$  calc.: C 77,38; H 5,42.

*Idrogenazione catalitica dell'acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico.* — La soluzione di mg 60 di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico in  $cm^3$  5 di metanolo si idrogena a temperatura e pressione ambiente con mg 10 di carbone palladiato al 5 %. L'assorbimento si arresta dopo 5', con il consumo di  $cm^3$  7,5 di idrogeno (a c.n.: teorico, per un doppio legame,  $cm^3$  8,1). Filtrato il catalizzatore, si evapora il solvente nel vuoto, ed il residuo solido si cristallizza da benzolo-etero di petrolio: p. f.  $63^\circ$ , anche in miscela con un campione di acido  $\gamma$ -fenossibutirrico ottenuto per altra via <sup>(12)</sup>.

*Azione della 2-4-dinitrofenilidrazina sull'acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico.* — Si disciolgono in  $cm^3$  12 di metanolo e  $cm^3$  4 di acido solforico al 30 % mg 250 di 2-4-dinitrofenilidrazina e mg 188 di acido p. f.  $32^\circ$ ; dopo una notte di riposo alla temperatura ambiente, si separa un precipitato cristallino (mg 160), di colore giallo, mentre la soluzione odora nettamente di fenolo. Il solido si cristallizza da metanolo al 70 %: p. f.  $107^\circ$  costante. All'analisi: trov.: N 18,72. Per  $C_{11}H_{12}O_6N_4$  calc.: N 18,91 %. Insolubile nei bicarbonati alcalini, il prodotto si discioglie negli alcali caustici con colorazione rosso ciliegia.

Le prime acque madri del 2-4-dinitrofenilidrazone si distillano in corrente di vapore, il distillato si rende fortemente alcalino con idrato sodico e si concentra a piccolo volume nel vuoto. Dal residuo, con le modalità consuete, si precipita il fenolo come triodofenolo (mg 220), p. f.  $156^\circ$  anche in miscela con il prodotto di confronto.

*Azione degli alcali sull'estere e sull'acido  $\gamma$ -fenossicrotonico.* — Grammi 2 di  $\gamma$ -fenossicrotonato di etile dalla fenossiacetaldeide vengono bolliti per 8 h in  $cm^3$  7 di metiletilchetone con g 1,4 di carbonato potassico secco, finemente macinato; dopo filtrazione si allontana il solvente ed il residuo si distilla in tubo a bolle alla pressione di 2 mm:  $n_D^{180} = 1,5148$ . Dalla saponificazione a freddo dell'estere così ottenuto (g 1,70) vengono ottenuti mg 650 di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico p. f.  $32^\circ$ , accanto a mg 130 di acido  $\gamma$ -fenossicrotonico.

Milligrammi 200 di acido  $\gamma$ -fenossicrotonico disciolti in  $cm^3$  5 di idrato sodico 2 N vengono riscaldati a  $90^\circ$  per 5 h: il frazionamento della miscela di acidi così ottenuta fornisce mg. 95 di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico accanto a mg 20 di acido  $\gamma$ -fenossicrotonico inalterato. In altra esperienza, l'andamento della trasposizione veniva seguito precipitando da frazioni della soluzione, prelevate di tempo in tempo, il 2-4-dinitrofenilidrazone dell'estere  $\beta$ -formilpropionico: la sua quantità raggiunge il massimo dopo 3 h circa.

Alla cromatografia su carta Wathman n° 1, fase mobile il butanolo saturato con ugual volume di idrato ammonico 1,5 N, l'acido  $\gamma$ -fenossicrotonico e  $\gamma$ -fenossivinilacetico si differenziano ( $R_f = 0,49$  e rispettivamente  $R_f = 0,53$ ).

Milligrammi 135 di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico, nel quale si controllava con la cromatografia l'assenza di acido  $\gamma$ -fenossicrotonico, vengono riscaldati a  $90^\circ$  in  $cm^3$  3 di idrato sodico al 5 %: acidificando, dopo 3 h, l'acido ottenuto, estratto con etero, risulta alla cromatografia costituito da una miscela di  $\gamma$ -fenossivinilacetico con quantità minori di  $\gamma$ -fenossicrotonico. Il residuo dell'evaporazione degli estratti eteri, oleoso, (mg 120) separa, per digestione con tre successive frazioni di  $cm^3$  1,5 di etero di petrolio bassobollente, un solido cristallino (mg 10, a p. f.  $132-135^\circ$ , p. f.  $136^\circ$  dopo cristallizzazione), riconosciuto per acido  $\gamma$ -fenossicrotonico.

*$\gamma$ -fenossi- $\gamma$ -butirrolattone.* — Grammi 3 di acido  $\gamma$ -fenossivinilacetico vengono riscaldati per 1 h a  $120^\circ$ ; il prodotto si distilla poi in tubo a bolle, a  $140-145^\circ$  (temperatura del bagno) a 2 mm. Il distillato prontamente solidifica; lo si cristallizza da benzolo-etero di petrolio (1:1) fino a p. f.  $83^\circ$  costante: la resa è praticamente quantitativa. All'analisi: trov.: C 67,60; H 5,59. Per  $C_{10}H_{10}O_3$  calc.: C 67,40; H 5,66 %. Insolubile in carbonato sodico, il prodotto viene lentamente disciolto dall'idrato. Da questa soluzione, acidificata,



evitando un eccesso di acido minerale, riprecipita inalterato. In metanolo o in acido acetico, su carbone palladiato non assorbe idrogeno a temperatura e pressione ambiente. In soluzione alcoolica riduce immediatamente il reattivo di Tollens. Dalle sue soluzioni alcaline non riesce di ottenere un sale di benzilisotiouronio o un p-fenilfenacilestere.

*Azione della 2-4-dinitrofenildrazina sul  $\gamma$ -fenossi- $\gamma$ -butirrolattone.* - Alla soluzione di mg 300 di  $\gamma$ -fenossi- $\gamma$ -butirrolattone in cm<sup>3</sup> 8 di etanolo al 50 % si aggiungono, a temperatura ambiente, mg 375 di 2-4-dinitrofenildrazina solida e cm<sup>3</sup> 1 di acido cloridrico concentrato. Rapidamente si separa un voluminoso precipitato cristallino, giallo, mentre la soluzione manifesta odore di fenolo. Dopo 3 h il solido (mg 540) si filtra, lavando con etanolo diluito, e si cristallizza da metanolo al 75 %: p. f. 203°, in accordo con il dato della letteratura <sup>(13)</sup>, ed anche in miscela con il prodotto preparato per confronto dall'acido glutammico <sup>(14)</sup>. All'analisi: trov.: N. 20,10. Per C<sub>10</sub>H<sub>10</sub>O<sub>6</sub>N<sub>4</sub> calc.: N 19,90 %. Il prodotto è solubile nei bicarbonati alcalini con colorazione arancione, che volge al rosso bruno per aggiunta di idrato sodico. Nelle acque madri della precipitazione del 2-4-dinitrofenildrazione è dimostrabile, dopo distillazione in vapore, la presenza di fenolo.

*Acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico.* - Grammi 7 di  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonato di metile (da  $\gamma$ -bromo- $\beta$ -metilcrotonato di metile e fenolo su carbonato potassico) vengono disciolti in cm<sup>3</sup> 20 di metanolo con cm<sup>3</sup> 7,2 di idrato sodico 5 N. Si riscalda per 20' su b.m., si neutralizza l'alcali libero con cm<sup>3</sup> 0,2 di acido solforico 5 N e si evapora nel vuoto la maggior parte del metanolo. Al residuo, ripreso con poca acqua e raffreddato in ghiaccio, si aggiungono cm<sup>3</sup> 6,9 di acido solforico 5 N, estraendo con etere l'acido oleoso separatosi. Evaporato il solvente, il residuo si riprende con cm<sup>3</sup> 50 di etere di petrolio bassobollente: dopo due giorni di riposo a -5° il precipitato cristallino costituito dall'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico, si filtra alla pompa (g 1,6): il prodotto fu descritto nella precedente Nota <sup>(1)</sup>. Quando la saponificazione dell'estere si conduca con una quantità doppia di idrato sodico, riscaldando per 40', l'acido non risulta più isolabile. Le acque madri dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico si evaporano a secco: il residuo oleoso, che non riesce in alcun modo di cristallizzare, viene distillato alla pressione di 2 mm. a 140-145°, ottenendo un liquido limpido,  $n_D^{18^\circ} = 1,5342$ . All'analisi: trov.: C 68,81; H 6,49. Per C<sub>11</sub>H<sub>12</sub>O<sub>3</sub> calc.: C 68,73; H 6,29 %. Alla determinazione dell'equivalente: trov. 192; per C<sub>10</sub>H<sub>11</sub>OCO<sub>2</sub>H calc. 192,2. Il prodotto è solubile in bicarbonato sodico. Si recupera inalterato dopo un riscaldamento a 160° per 3 h. Riduce rapidamente il reattivo di Tollens, a differenza dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico, con il quale un principio di riduzione si manifesta dopo più ore.

L'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico può ottenersi anche per azione dell'idrato sodico sull'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico: mg 150 di quest'ultimo si riscaldano a 90° per 3 h in cm<sup>3</sup> 3 di idrato sodico al 5 %: il prodotto ottenuto dopo acidificazione è liquido, ha tutte le caratteristiche dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico.

Il sale di benzilisotiouronio dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico ha p.f. 121°, dopo cristallizzazione da diossano. All'analisi: trov.: N 7,35; per C<sub>19</sub>H<sub>22</sub>O<sub>3</sub>N<sub>2</sub>S calc. 7,81 %.

Il sale di benzilisotiouronio dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico ha p. f. 129° dopo cristallizzazione da diossano. All'analisi: trov.: N 7,64. Per C<sub>19</sub>H<sub>22</sub>O<sub>3</sub>N<sub>2</sub>S calc.: N. 7,81 %.

I due acidi si differenziano alla cromatografia su carta: per l'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico R<sub>f</sub> = 0,56; per l'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico R<sub>f</sub> = 0,62.

L'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico non viene alterato da un riscaldamento di 1 h a 150°. Riscaldando a 90° per 3 h mg 140 di acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico disciolti in cm<sup>3</sup> 3 di idrato sodico al 5 %, acidificando, estraendo con etere ed esaminando l'acido ottenuto con la cromatografia, si constata la presenza, accanto all'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico.

(13) KONDO e SUZUKI, « Ber. », 69, 2473 (1936).

(14) LANGHELD, « Ber. », 42, 2362 (1909).



*Idrogenazione catalitica dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico e dell'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico.* — Milligrammi 201 di acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilcrotonico vengono idrogenati a temperatura e pressione ambiente in  $\text{cm}^3$  10 di metanolo con mg 50 di carbone palladiato al 5 %. L'assorbimento di idrogeno si arresta dopo 30', con il consumo di  $\text{cm}^3$  27 (a c.n.; teorico per un doppio legame  $\text{cm}^3$  25,9). Dopo filtrazione ed evaporazione del solvente il residuo liquido risulta identico nel comportamento alla cromatografia su carta all'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilbutirrico<sup>(\*)</sup>; si usò carta Wathman n° 1, fase mobile il butanolo saturato con ugual volume di ammoniaca-carbonato ammonico 1,5 N, con un valore  $R_f = 0,61$ . Nelle medesime condizioni, mg 202 di acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico assorbono  $\text{cm}^3$  22 di idrogeno (a c.n.; teorico per un doppio legame  $\text{cm}^3$  25,6). Il prodotto di idrogenazione risulta identico all'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilbutirrico.

*Azione della 2-4-dinitrofenilidrazina sull'acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico.* — In  $\text{cm}^3$  10 di etanolo e  $\text{cm}^3$  6 di acido cloridrico al 20 % vengono disciolti mg 540 di acido  $\gamma$ -fenossi- $\beta$ -metilvinilacetico. Riscaldando su b. m. si separa un precipitato oleoso che dopo 1 h si decanta dalla soluzione, e si cristallizza da etanolo diluito. Il 2-4-dinitrofenilidrazone dell'estere etilico dell'acido  $\beta$ -formilbutirrico così ottenuto ha p. f. 101°. All'analisi: trov.: N. 17,82. Per  $\text{C}_{13}\text{H}_{16}\text{O}_6\text{N}_4$  calc.: N. 17,28 %. Il prodotto è insolubile in carbonato sodico. Dalle acque madri, rese fortemente alcaline con idrato sodico, si evapora completamente l'etanolo: dopo acidificazione e distillazione in vapore il trattamento consueto mg 335 di triiodofenolo p. f. 154°.

**Citologia.** — *L'evoluzione della poliploidia nelle planarie appartenenti alla superspecie «Dugesia gonocephala»<sup>(\*)</sup>.* Nota di MARIO BENAZZI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

I Tricladi di acqua dolce sono uno dei gruppi zoologici in cui la poliploidia ha potuto diffondersi e divenire un fattore microevolutivo di notevole importanza, senza dubbio in conseguenza dell'instaurarsi di peculiari modalità riproduttive che rappresentano la condizione necessaria alla sua affermazione.

È ben noto come la poliploidia, largamente diffusa nelle piante Angiosperme, sia assai meno frequente negli animali e ciò, secondo Muller, per il fatto che in questi ultimi, a differenza delle prime, prevale di gran lunga la condizione gonocorica con determinazione cromosomica del sesso, il cui meccanismo resterebbe alterato dalla poliploidia. In accordo col principio di Muller vediamo infatti che i casi più sicuri e tipici di poliploidia negli animali si riscontrano in forme ermafrodite e soprattutto partenogenetiche (partenogenesi poliploide).

L'esistenza di mutanti poliploidi in alcune specie di planarie, messa in luce da me e da miei collaboratori, si inquadra assai bene in tale schema

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Pisa. Ricerche in parte sovvenzionate da contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche e da un Grant della Rockefeller Foundation.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

interpretativo, in quanto le planarie non solo sono ermafrodite, ma presentano pure una modalità di riproduzione (pseudogamia o ginogenesi) sotto l'aspetto cromosomico equivalente alla partenogenesi, in quanto il nucleo spermatico ha il solo ufficio di attivare l'uovo.

Tra le specie da noi studiate la poliploidia è stata accertata in *Dugesia benazzii* (appartenente alla superspecie *D. gonocephala*), in *D. lugubris*, in *Polycelis nigra* e specialmente nelle due prime ha dato origine a molteplici biotipi, caratterizzati non solo da gradi vari di ploidia, ma pure da modalità diverse della gametogenesi e del ciclo cromosomico <sup>(1)</sup>. In questa Nota desidero riassumere i risultati conseguiti in un decennio di ricerche su *D. benazzii* e specie affini, cercando di delineare le modalità dell'evoluzione cariologica.

1. LA SUPERSPECIE «DUGESIA GONOCEPHALA». - È necessario premettere alcune notizie sistematiche, indispensabili per la interpretazione dei reperti cariologici. *Dugesia gonocephala* (Dugès) è una specie ben nota, alla quale è stato attribuito un areale amplissimo in tutta la regione Palearctica. Ricerche più recenti hanno però dimostrato l'esistenza, in vari territori mediterranei, di forme ad essa identiche per la morfologia esterna e la ecologia, ma differenziate da peculiarità dell'apparato copulatore. Il primo reperto al riguardo è la scoperta, ad opera di Meixner (1928), di *D. cretica* di Creta, ben illustrata da Kenk (1930) e successivamente segnalata anche in Persia da de Beauchamp (1936). In seguito (1946) io descrissi *D. etrusca* della Toscana peninsulare e segnalai un'altra specie (*D. ilvana*) nell'Isola d'Elba, descritta poi dal Lepori (1948). *D. benazzii* da me trovata in Sardegna (ed in un primo tempo attribuita a *gonocephala* con la quale è molto affine) è pure una specie a sé stante, studiata morfologicamente dal Lepori (1951); ad essa ho potuto attribuire in seguito anche la forma della Corsica (che precedenti AA. ritennero identica a *gonocephala*) e successivamente esemplari che ho trovato in Capraia. Infine è da ricordare *D. sicula* Lepori, presente in Sicilia ma che ho trovato anche in una località dell'Isola d'Elba.

Le caratteristiche morfologiche di queste specie sono sufficienti per una loro sicura individuazione, come risulta anche dall'esame comparativo compiuto dal Lepori; mi preme tuttavia rilevare che la loro validità specifica è stata da me affermata soprattutto sulla base dell'isolamento riproduttivo, accertato per tutte all'infuori di *D. cretica*, di cui non ho avuto finora materiale idoneo alla sperimentazione. Quindi, per quanto molto affini, esse hanno il valore di buone specie; è logico ritenere che derivino da *gonocephala sensu stricto*, insieme alla quale costituiscono un'unica entità sistematica intesa come superspecie (nel senso di Mayr, 1931) o Artenkreis (Rensch, 1929), cioè come un gruppo monofiletico di specie strettamente affini e allopatriche.

(1) Per la bibliografia cfr.: M. BENAZZI, *Un decennio di ricerche cariologiche sulle planarie*, «La Ricerca Scientifica», anno 24<sup>o</sup>, n. 5, 1954.

2. IL CORREDO CROMOSOMICO DELLE SPECIE DIPLOIDI. — *Dugesia gonocephala* (Dugès). Schleip (1906-07) in esemplari della Germania, stabilì che il corredo di questa specie è  $2n = 16$ ,  $n = 8$ ; la gametogenesi si svolge regolarmente: negli ovociti e negli spermatoцити si contano 8 bivalenti. Noi abbiamo confermato questi dati per popolazioni della Svizzera (Aarau), della Francia (Savoia, dintorni di Parigi), della Danimarca. *D. gonocephala*, specie primitiva, appare quindi normalmente diploide e deve ritenersi anfimittica. Secondo le osservazioni finora compiute, le popolazioni sono in generale eudiploidi, però quella di Aarau comprende anche individui i cui ovociti hanno un numero cromosomico superiore e che riteniamo polisomici (ricerche in corso).

*Dugesia etrusca* Benazzi. Anche questa specie è diploide, sono tuttavia frequenti i casi di polisomia. Debbo ricordare che *etrusca* presenta tre razze, interfeconde ma differenziate da peculiarità dell'apparato copulatore; la polisomia si riscontra nelle razze *biadenodactyla* e *labronica*, con presenza nei citi primi di bivalenti ed univalenti in numero vario, talora anche di multivalenti. La razza *monoadenodactyla* è invece di solito eudiploide. Negli esemplari diploidi il ciclo cromosomico è normale; nei polisomici l'ovogenesi si compie con formazione di uova iperaploidi, mentre la spermatogenesi ha luogo solo dopo eliminazione dei cromosomi eccedenti; la polisomia viene quindi mantenuta per via materna (Benazzi Lentati, 1954). Questa specie è tuttavia anfigonica, come risulta da ricerche tuttora in corso.

*Dugesia ilvana* Benazzi. Ci risulta di regola eudiploide.

*Dugesia sicula* Lepori. Si riproduce scarsamente in laboratorio per cui possediamo pochi dati; questi dimostrano che è una forma diploide, sembra però che il numero più frequente dei bivalenti negli ovociti sia 9 anziché 8; può darsi si tratti di individui polisomici con una coppia cromosomica in eccesso.

3. L'EVOLUZIONE CROMOSOMICA IN *Dugesia benazzii*. — Questa specie, il cui areale è rappresentato, come già detto, dalla Sardegna, Corsica e Capraia, mostra un differenziamento cariologico molto accentuato, comprendendo vari biotipi:

A) *Biotipo diploide*: presente in popolazioni delle tre isole; ha  $2n = 16$ ,  $n = 8$  e gametogenesi normale; da ricerche tuttora in corso risulta che è anfigonico con ciclo cromosomico normale. Debbo tuttavia rilevare che anche in popolazioni diploidi abbiamo constatato oscillazioni nel numero cromosomico, sia nelle linee germinali che somatica, indicanti fatti di polisomia.

B) *Biotipo tetraploide*: trovato nei dintorni di Sassari. Ha 32 cromosomi (quindi 4 serie aploidi) ed è asindetico nella linea femminile; negli ovociti si contano infatti 32 cromosomi univalenti, numero corrispondente a quello dei cromosomi delle cellule totipotenti da cui traggono origine gli ovogoni. Interessante ricordare che negli ovociti metafasici il fuso è tripolare (talora tetrapolare) e che lo stesso fatto si riscontra in tutte le forme

poliploidi e in quelle polisomiche; però due soli sono i poli che si manifestano funzionanti. L'ovogenesi, indotta dalla penetrazione dello spermio, consiste in una unica divisione di tipo mitotico; gli univalenti si sdoppiano in cromatidi, una metà dei quali resta nell'ovocita, mentre l'altra migra nel polocita. Il nucleo spermatico, che non evolve in pronucleo maschile, viene sempre espulso, o mediante il polocita (che in queste uova è unico), o con una gemma citoplasmatica. Non essendovi una seconda divisione di maturazione, l'uovo conserva il numero cromosomico non ridotto; può tuttavia accadere che una piccola parte dei cromosomi metafasici penetri insieme al nucleo spermatico nella gemma citoplasmatica, determinando un abbassamento del numero cromosomico, che non incide però sulla fecondità dell'uovo. La spermatogenesi, a differenza della ovogenesi, si svolge con meiosi; io avevo rilevato che il corredo degli spermatociti è in genere inferiore a quello degli ovociti; Benazzi Lentati e Nardi hanno dimostrato che ciò è dovuto alla eliminazione di un numero variabile di cromosomi al momento della formazione dei goni, fatto che si accompagna ad intensi fenomeni degenerativi.

C) *Biotipo esaploide nella linea femminile*: in questa forma, presente in Sardegna, si manifesta un complicato ciclo cromosomico. L'ovocita I contiene (salvo variazioni individuali) 24 bivalenti, che mediante normale meiosi si riducono a 24 cromosomi nell'uovo maturo; anche in questo biotipo si ha pseudogamia, in quanto lo spermio attiva l'uovo, ma poi viene espulso o degenera entro l'ovocita; lo sviluppo si compie quindi con corredo triploide che è quello del soma. La formazione del corredo esaploide nella linea femminile è dovuto ad un processo restituzionale. Anche la spermatogenesi è peculiare, in quanto la formazione dei goni avviene mediante espulsione di una serie aploide nelle cellule da cui essi traggono origine, per cui tutti hanno corredo diploide e danno, dopo normale meiosi, spermii aploidi.

D) *Biotipo iperesaploide nella linea femminile*: è fondamentalmente simile al precedente, tuttavia il corredo somatico è ipertriploide e quello degli ovociti iperesaploide. Questo biotipo appare frequente in popolazioni della Corsica; ad esempio in esemplari provenienti dai dintorni di Aiaccio gli ovociti presentano bivalenti in numero superiore a 24, fino a 32 o 33. Anche in questo biotipo gli spermii, secondo Benazzi Lentati, sono sempre aploidi, ciò che dimostra la eliminazione dei cromosomi eccedenti durante la formazione degli spermatogoni; come per gli altri biotipi poliploidi, lo spermio ha solo funzione attivatrice.

4. PRIME OSSERVAZIONI SU *Dugesia cretica*. - Era per me di particolare interesse conoscere le condizioni cromosomiche di questa specie, che sembra molto diffusa nel Mediterraneo orientale (da de Beauchamp è stata segnalata di recente anche nel Peloponneso e nei dintorni di Istanbul)<sup>(2)</sup> e differenziata in varie razze.

(2) P. DE BEAUCHAMP, *Sur quelques formes de Tricladés d'eau douce et leur répartition en Europe*, « Ann. St. Centr. Hydrobiol. Appliquée », 1953.



Grazie all'interessamento di uno studente della Facoltà Medica di Pisa, nativo di Creta, ho potuto avere un piccolo lotto di planarie da lui raccolte nella località Argyropolis di detta isola. Purtroppo gli esemplari sono risultati agami e scissipari (carattere assai frequente nelle forme mediterranee del gruppo *gonocephala*), ad eccezione di uno, di dimensioni assai cospicue (oltre mm. 25 in piena maturità), che divenuto sessuato all'inizio del corrente anno ha deposto tre bozzoli. Degli ovociti esaminati, alcuni non si prestavano all'esame citologico causa l'ammassamento dei cromosomi, in altri il corredo è apparso di difficile interpretazione e apparentemente variabile nei diversi ovociti. Tuttavia nei casi più favorevoli ho potuto contare un numero elevato di bivalenti (fino a 16) e forse qualche univalente. Questi scarsi dati non permettono certo conclusioni sicure, ma riterrei poter fin d'ora affermare trattarsi di una specie poliploide o, in senso generico, eteroploide. Onde accertare l'identità sistematica dell'esemplare in questione, l'ho diviso in tre frammenti, esaminando istologicamente quello posteriore ove trovasi l'apparato copulatore, che ha mostrato caratteri simili a quelli descritti per *cretica*. Mi auguro di poter compiere ulteriori osservazioni citologiche sugli esemplari provenienti dai frammenti rigenerati.

5. CONSIDERAZIONI GENERALI. — L'esposizione sintetica dei nostri risultati dimostra dunque, nell'ambito della superspecie *gonocephala*, accentuate variazioni numeriche dei cromosomi. Mentre le popolazioni di *gonocephala sensu stricto* dell'Europa centrale e settentrionale appaiono in genere eudiploidi, in quelle a distribuzione meridionale il corredo si modifica variamente. Anzitutto si nota la comparsa, in forme diploidi, di condizioni di aneuploidia, caratterizzate dalla presenza di un numero di cromosomi superiore a 16; tale fatto è particolarmente frequente, come si è detto, in razze di *D. etrusca*. Lo studio dei kariogrammi dimostra che i cromosomi eccedenti il numero diploide sono simili a membri del genoma normale e ciò induce a ritenere che si tratti di polisomia, confermata dalla presenza di multivalenti nei citi primi. Infatti, come rileva White <sup>(3)</sup>, è necessario distinguere i cromosomi soprannumerari propriamente detti, che sono membri non omologhi o solo parzialmente omologhi a quelli dell'assetto regolare, dalla polisomia in cui uno o più membri di un cariotipo, per il resto diploide, sono in numero superiore a due. Si tratterebbe quindi di una mutazione genomica esprimente la tendenza di queste planarie ad una ripetizione di membri del proprio genoma; confermato ciò dal fatto che in uno stesso individuo diploide si riscontrano talora cellule germinali poliploidi.

La poliploidia si è poi pienamente affermata ed è divenuta condizione normale in varie popolazioni di *Dugesia benazzii*. Sembra indubbio che tale evento sia correlato con la pseudogamia, come dimostra il fatto che le forme poliploidi sono costantemente pseudogamiche, mentre quelle diploidi sono anfimittiche, almeno in molti casi, in quanto non possiamo escludere

(3) M. J. D. WHITE, *Animal Cytology and Evolution*, II Ed., 1954.



la eventuale esistenza di diploidi pseudogamici. Si può pensare che sia stato proprio l'insorgere della pseudogamia a favorire l'evoluzione dei biotipi poliploidi, fissando, per così dire, la tendenza alla poliploidizzazione delle planarie; si può pure pensare che la presenza nell'ovocita di un corredo poliploide sia stata la condizione che ha determinato la scomparsa dell'anfimissi, potendo l'uovo, dopo semplice attivazione da parte dello spermio, svilupparsi col solo corredo materno; pseudogamia e poliploidia starebbero quindi in un reciproco rapporto di causalità<sup>(4)</sup>.

Abbiamo visto che l'ovocita compensa la perdita dell'anfimissi con due diverse modalità (che trovano un parallelo anche in forme partenogenetiche): eliminando cioè la meiosi (forme asindetiche), per cui il corredo somatico resta immutato dopo l'ovogenesi; oppure conservando la meiosi ma duplicando il corredo cromosomico negli ovogoni, per cui la riduzione ripristina il corredo somatico. Questi diversi adattamenti dell'ovogenesi all'assenza di anfimissi (propri non solo a *D. benazzii*, ma presenti con modalità identiche in biotipi di *D. lugubris*), dimostrano il polifiletismo evolutivo di queste planarie.

Significativo è poi il fatto che nella linea maschile (in *D. benazzii* e *D. etrusca* come pure in *D. lugubris*) il corredo è diploide o comunque mostra tendenza alla eliminazione dei cromosomi eccedenti. Si può pensare che il nuovo equilibrio instaurato dalla poliploidia nelle linee somatica e germinale femminile, non sia idoneo al normale svolgimento della spermatogenesi; lo spermio degli eteroploidi può conservare il corredo originario essendo il suo ufficio limitato all'attivazione.

Un'ultima considerazione che merita di essere fatta si riferisce ad un eventuale rapporto tra poliploidia e distribuzione geografica. È ben noto dagli studi sulla partenogenesi poliploide come questi mutanti abbiano sovente un areale diverso da quello degli stipiti diploidi, tanto che il Vandel chiamò *geografica* tale tipo di partenogenesi. In generale si rileva che i biotipi poliploidi partenogenetici sono più ampiamente distribuiti di quelli affini diploidi, occupando sovente territori di più difficile colonizzazione. Suggestivi al riguardo sono gli studi di Seiler su *Solenobia triquetrella* e di Suomalainen sui Curculionidi, circa i rapporti fra distribuzione geografica delle forme poliploidi partenogenetiche ed eventi del glaciale. Nel caso delle planarie del gruppo *gonocephala* non mancano indizi della influenza dei fattori ambientali. La forma che si ritiene più antica, cioè *gonocephala sensu stricto*, diffusa nell'Europa centro-settentrionale, ha conservato una condizione eudiploide, mentre nei territori meridionali si sono instaurati stati vari di eteroploidia, culminanti nella fioritura di biotipi poliploidi di *D. benazzii* della Sardegna e Corsica; anche *D. cretica*, se i miei primi reperti

(4) Il significato della pseudogamia nella conservazione di individui poliploidi apparirà ancor più evidente se si tien conto che le planarie sono, salvo rare eccezioni, ermafroditi insufficienti: è ovvio che la fecondazione di un individuo poliploide con uno diploide produrrebbe, in seguito ad anfimissi, uno zigote con corredo cromosomico squilibrato.

troveranno conferma, appare eteroploide. Si può quindi pensare che l'*habitat* originario della specie sia rappresentato dai corsi d'acqua dell'Europa media e settentrionale con temperatura relativamente bassa e costante; la colonizzazione delle acque meridionali ed insulari è stata accompagnata (o favorita) dallo sviluppo di forme eteroploidi ed in particolare poliploidi, maggiormente idonee ad adattarsi alle nuove condizioni.

È interessante rilevare che mentre in numerosissimi casi, illustrati specialmente dalla citologia vegetale, sono le zone fredde quelle più ricche di forme poliploidi, nel caso della superspecie *gonocephala*, forma in origine adattata a temperature basse e relativamente stenoterme, sono le condizioni degli ambienti meridionali ed insulari mediterranei che hanno favorito la evoluzione della poliploidia.

**Fisiologia vegetale.** - *L'azione del berillio sull'assorbimento del fosforo e sull'aumento in peso di apici radicali* (\*). Nota di F. M. GEROLA e E. GILARDI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Da più autori è stata esaminata, di recente, l'azione esercitata dal Be sia sui processi di crescita (Chèvremont e Firket, Hoagland, Raven e Spronk, Lepierre, Steinberg, ecc.) <sup>(1)</sup> e di rigenerazione (Needham, Thornton) <sup>(2)</sup> sia, in modo particolare, su alcuni enzimi interessati direttamente nel ricambio (« turnover ») del fosforo (Hoagland, ecc.) <sup>(3)</sup>.

Per quanto riguarda la crescita, i risultati non sono sempre concordanti. Ciò non stupisce, dato che è stato ultimamente riconosciuto che il Be può avere ora azione stimolante, ora azione inibente, in diretta dipendenza sia della concentrazione, sia del pH della soluzione in cui il Be è disciolto.

Il modo di azione del Be sulla crescita non appare, allo stato attuale delle nostre conoscenze, affatto chiaro. Tanto più che tale elemento, pur stimolando la crescita, può agire da inibitore di importantissimi enzimi legati al ricambio del fosforo. È stato accertato infatti (Hoagland; Teubner e collaboratori) <sup>(4)</sup> per il Be una azione specifica inibente sulle fosfatasi e specialmente sulla adenosintrifosfatasi (ATPasi).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) M. CHÈVREMONT e H. FIRKET, « Nature », 176, 772 (1954); M. B. HOAGLAND, « Arch. of Biochem. a. Biophys. », 35, 249 (1952); CH. P. RAVEN, a. N. SPRONK, « Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. », ser. C, 55, 541 (1952); C. LEPIERRE, « C. R. Ac. Sc. Paris », 156, 409 (1913); R. A. STEINBERG, « Am. Journ. Bot. », 33, 210 (1946).

(2) A. E., NEEDHAM, « Proc. Zool. Sc. », 3, 59 (1941); C. S. THORNTON, « Journ. of exper. Zool. », 114, 305 (1950).

(3) M. B. HOAGLAND, « Arch. of Bioch. a. Biophys. », 35, 259 (1952).

(4) M. B. HOAGLAND, « Arch. of Bioch. a. Biophys. », 35, 259 (1952); F. G. TEUBNER, E. MARRÈ e A. E. MURNEEK, « Nuovo Giorn. Bot. it. », n. s., 61, 9 (1954).

Tale ultimo fatto può far supporre che tale elemento possa interferire anche sui normali processi di trasporto del P nell'interno della cellula. Tale trasporto, infatti, è stato posto in relazione <sup>(5)</sup> alla presenza ed alla trasformazione dell'ATP alla superficie cellulare.

D'altro lato è stato osservato <sup>(6)</sup> che altri enzimi (ribonucleasi) pure interessati nel ricambio del P sono attivi modificatori dei normali processi di assorbimento di radici di frumento.

Nostra intenzione è stata quella di esaminare appunto l'azione del Be sia sulla crescita in peso, sia sull'assorbimento del P, sia sul consumo di ossigeno (in radici di Pisello; *Pisum sativum*).

METODI E RISULTATI. - A Piselli della var. Alaska, posti a germinare in segatura al buio a 25 °C., si asportarono (dopo quattro giorni dalla semina) i tratti più apicali delle radici, per una lunghezza di 3 cm. Tali apici, privi completamente di peli radicali, furono posti successivamente (sempre al buio ed a 25 °C.) in scatole Petri contenenti: 1) Soluzione di Knop + Be (nitrato) in tre differenti concentrazioni ( $10^{-2}$  M;  $5 \cdot 10^{-3}$  M;  $10^{-3}$  M); 2) Soluzione di Knop +  $\text{NaNO}_3 \cdot 10^{-3}$  M (l'aggiunta di quest'ultimo sale si rese necessaria per escludere la possibilità di interferenze dovute alla diversa quantità di ioni nitrici, che altrimenti sarebbe esistita tra soluzioni nutritive controllo e contenenti Be); 3) Soluzione di Knop priva di P; 4) Soluzione di Knop + NaF, a due differenti concentrazioni ( $10^{-3}$  M e  $10^{-4}$  M).

Dopo permanenza per 20 ore nelle soluzioni sopra menzionate, le radici furono rapidamente asciugate in carta da filtro, pesate, e quindi frantumate in mortaio in presenza di acido tricloroacetico freddo. Con tale procedimento è possibile successivamente determinare il contenuto in P inorganico ed organico (vennero seguite le indicazioni di Umbreit) <sup>(7)</sup> sia dell'estratto, sia del residuo non solubile.

Dalla tabella I appare evidente, innanzi tutto, che le radici poste in soluzione di Knop prive di fosforo non manifestano alcuna crescita in peso, mentre non subiscono modificazioni i quantitativi di P libero e totale in essa contenuti.

Gli apici radicali posti nelle concentrazioni più elevate di Be ( $10^{-2}$  M) hanno un incremento in peso inferiore ai controlli, come minore che nei controlli risulta il P libero e quello organico, sia in riferimento al peso iniziale sia a quello finale delle radici. A queste concentrazioni il Be agisce, quindi in maniera sfavorevole all'assorbimento tanto dell'acqua (crescita in peso), quanto del fosforo.

Risultati completamente opposti ai precedenti si hanno invece per le radici poste in soluzioni più diluite di Be (specialmente in quelle con Be  $10^{-3}$  M). Appare infatti fortemente stimolata sia la crescita in peso, sia l'assunzione del fosforo. Il P libero nella cellula, anzi, viene a raggiungere con-

(5) F. C. STEWART, a. H. E. STREET, «An. Rev. Biochem.», 16, 471 (1947); J. SACKS, «Arch. of Biochem.», 30, 423 (1950); D. R. H. GOURLEY, «Arch. of Biochem.», 40, 1 (1952); J. F. DANIELLI, *Cytochemistry*, London (1953); A. ROTHSTEIN, «Symp. Soc. exp. Biol.», 8, 165 (1954).

(6) J. BRACHET, «Nature», 174, 876 (1954).

(7) W. W. UMBREIT, R. H. BURRIS a. J. F. STAUFFER, *Manometric Techniques and Tissue Metabolism*, Minneapolis (1949).

centrazioni molto superiori (0.43 ‰, in riferimento al peso fresco finale) a quelle della soluzione in cui sono immerse le radici (0.25 ‰, di KH PO), ciò che dimostra l'esercitarsi anche di un forte potere di accumulo.

TABELLA I.

*Modificazioni in peso ed in contenuto in P di radici poste in Knop + Be, (nitrato) e in Knop + NaF <sup>(8)</sup>.*

Soluzione di Knop	Variazione in peso in ‰	P in γ/gr peso fresco	
		libero	organico
+ NaNO <sub>3</sub> · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	5.40	273	468
Priva di P . . . . .	0	69	245
+ Be (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> · 3H <sub>2</sub> O · 10 <sup>-2</sup> M . . . . .	+ 2.31	204	386
+ Be (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> · 3H <sub>2</sub> O · 5 · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	+ 6.00	385	576
+ Be (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> · 3H <sub>2</sub> O · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	+ 8.10	401	609
+ NaF · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	— 10.5	49	171
+ NaF · 10 <sup>-4</sup> M . . . . .	—	145	277

Anche il fluoruro è un potente inibitore delle fosfatasi, tuttavia esso agisce in modo più attivo sulla monosfofoesterasi che non sull'ATPasi (Teubner e coll.) <sup>(9)</sup> ed inoltre la sua azione riveste una molto minore specificità, in quanto esso influisce pure sui processi di fosforilazione, sui sistemi dei citocromi e sull'enolasi <sup>(10)</sup>. Questa sua inibizione su diversi sistemi enzimatici è probabilmente la causa non solo dell'arresto della crescita in peso delle radici (che anzi subiscono una perdita di acqua) ma anche della diminuzione del P libero ed organico. Da rilevare però che l'azione inibente è notevole anche a concentrazioni basse di fluoruro (10<sup>-4</sup>), a concentrazioni cioè alle quali il NaF dovrebbe avere solo una limitata azione sopra gli enzimi interessati nella respirazione.

In base ai risultati sopra riferiti, ed in dipendenza del fatto che i processi di crescita sono in stretta relazione con i processi respiratori, ci è sembrato innanzi tutto indispensabile accertare se il Be eserciti una qualche azione sul consumo in ossigeno.

Tratti apicali di radici di Pisello (ottenuti come nell'esperienza precedente) sono stati posti in soluzione di Knop + NaNO<sub>3</sub> · 10<sup>-3</sup> M ed in soluzione di Knop + Be (nitrato) 10<sup>-3</sup> M, in scatole Petri al buio a 25°. Dopo otto ore sono stati sezionati trasversalmente a metà e l'entità della loro respirazione determinata, come consumo di ossigeno, in apparecchio di Warburg.

(8) Il contenuto in P dei tratti apicali delle radici di pisello, per gr. di peso fresco all'inizio dell'esperienza, corrisponde a quello delle radici poste in soluzione di Knop priva di fosforo.

(9) F. G. TEUBNER, e coll., op. cit.

(10) W. O. JAMES, *Plant Respiration*. Oxford (1953).



Il loro consumo di ossigeno non appare affatto stimolato dalla presenza del Be, ma all'opposto leggermente inibito.

	Consumo in O <sub>2</sub> /gr. peso fresco/ora	Variazione %
Knop + NaNO <sub>3</sub> · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	34.4	—
Knop + Be (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> · 3H <sub>2</sub> O · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	31.8	—7.85

Da tener presente che il consumo di ossigeno è stato calcolato in base al peso iniziale delle radici e che quindi si avrebbe in effetti un ancor minore consumo di ossigeno per gr. di peso fresco, qualora si tenesse conto dell'incremento in peso subito dalle radici poste in Be nelle otto ore antecedenti alla misura nel Warburg.

Questi dati sono in accordo con quanto aveva rilevato Klemperer<sup>(11)</sup> per il consumo di O<sub>2</sub>, su sezioni di fegato. Tale autore ha inoltre riconosciuto che il Be non ha alcuna azione sui processi di glicolisi e su vari altri enzimi.

In una successiva esperienza venne esaminata l'eventuale influenza del sezionamento a metà delle radici e della continua agitazione nelle vaschette dell'apparecchio di Warburg.

Radici, come nell'esperienza precedente, sono state poste per 18 ore nel Warburg. Viene quindi determinato il loro consumo di O<sub>2</sub> all'inizio dell'esperienza e dopo 16 ore. Gli stessi apici sono stati successivamente pesati ed analizzati per il loro contenuto in P libero.

TABELLA II.

*Crescita in peso, consumo di O<sub>2</sub> e contenuto in P di radici in Knop + Be (nitrato).*

Soluzione di Knop	Incremento in peso	Consumo O <sub>2</sub> /gr. peso fresco/ora		P libero γ/gr. peso fresco (iniziale)
		inizio esperienza	dopo 16 ore	
+ NaNO <sub>3</sub> · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	7.82 %	40.49	22.69	0.228
+ Be (NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> · 3H <sub>2</sub> O · 10 <sup>-3</sup> M . . . . .	13.33 %	40.06	20.88	0.321

Dalla tabella sopra riferita appare chiaro, che, all'inizio dell'esperienza, la respirazione delle radici è molto più elevata che non dopo 16 ore. Questo fatto può ritenersi solo in parte limitata dipendente dalla reazione alle lesioni apportate alle radici mediante il loro sezionamento in tratti di 1.5 cm. Infatti si può constatare che i valori del consumo in O<sub>2</sub> per ora, dopo 8 ore, sono intermedi (34.4) a quelli osservati all'inizio (40.49) e quelli dopo 16 ore (22.69).

(11) F. W. KLEMPERER, « Journ. Biol. Chem. », 187, 189 (1950).



Risulta evidente inoltre che il Be all'inizio dell'esperienza, non essendo ancora penetrato nella radice, non ha arrecato alcuna modifica al consumo in  $O_2$ , mentre dopo 16 ore tale consumo risulta inferiore di circa l'8 %, in accordo notevole con l'esperienza precedente nella quale, dopo 8 ore dall'inizio dell'esperienza, si constataba per le radici in Be un consumo di  $O_2$  inferiore pure di circa l'8 % a quello dei controlli.

Per ciò che si riferisce ai valori del P e della crescita, il sezionamento delle radici in tratti di 1.5 cm e la loro permanenza per 18 ore nelle vaschette del Warburg in continuo movimento, non modifica quanto già in precedenza descritto e cioè che radici poste in Be hanno un incremento in peso ed un assorbimento di P molto maggiori dei controlli.

Si è voluto infine accertare se il Be determina un incremento dell'ATP nelle radici.

Pezzi apicali di radici ottenute come nella I esperienza e lasciate per 18 ore al buio a 25 gradi in scatole Petri con soluzione di Knop+ $NaNO_3 \cdot 10^{-3} M$ , oppure con Be (nitrato)  $10^{-3} M$ , sono sottoposti ad estrazione con acido tricloroacetico a freddo e successivamente analizzati sia per il P libero sia per la frazione Be insolubile (Umbreit e coll.).

TABELLA III.

*Variazione di contenuto in P libero ed in ATP, in radici poste in Knop+Be (nitrato).*

Soluzione	P in $\gamma$ /gr. peso fresco iniziale	
	libero	ATP
Knop + $NaNO_3 \cdot 10^{-3} M$ . . . . .	180	15
Knop + $Be(NO_3)_2 \cdot 3H_2O \cdot 10^{-3} M$ . . . . .	302	38

Come era prevedibile il Be è causa di un aumento dell'ATP nelle radici trattate ciò che fa ritenere probabile che esso eserciti, anche nelle condizioni di esperienza sopra descritte, una sensibile inibizione dell'ATPasi, tanto più che, mentre l'incremento del P libero, rispetto ai controlli, è pari al 68 %, quello dell'ATP è più del doppio (135 %), in netta opposizione alle variazioni tra P libero ed organico (come risulta dalla tabella I), in quanto il primo, per azione del Be, appare aumentato in confronto ai controlli molto più della complessiva frazione organica.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — I risultati più significativi delle esperienze sopra descritte, possono brevemente riassumersi dicendo che il Be, a concentrazioni opportune ( $10^{-3} M$ ), determina in segmenti apicali di radici di Pisello (var. Alaska), sia un sensibile incremento della crescita in peso, sia una stimolazione dell'assorbimento del P, sia un maggior contenuto cellulare di ATP (a causa probabilmente di una inibizione dell'ATPasi), pur non agendo in modo positivo sul consumo in  $O_2$ , che risulta anzi lievemente diminuito.

L'azione stimolante sulla crescita delle radici da parte del Be dev'essere intesa come derivante soprattutto da un maggior assorbimento di acqua. Il Be tuttavia sembra che possa incrementare pure la crescita protoplasmatica (Hoagland) in dipendenza, secondo Hoagland, di un risparmio di  $\sim P$  dell'ATP che non verrebbe idrolizzata a causa del blocco dell'ATPasi (pur non essendo invece inibito il trasporto di  $\sim P$  su qualche altro accettore).

Per ciò che si riferisce all'incremento, causato dal Be, dell'assorbimento del P, è da tener presente, come abbiamo già osservato nella parte introduttiva, l'importanza che da vari autori viene attribuita all'ATP ed al trasporto del  $\sim P$  per la penetrazione e l'accumulo di P nelle cellule.

Tuttavia il fatto più significativo ci sembra sia da ricercarsi nella constatazione che l'incremento dell'assorbimento, tanto del P quanto dell'acqua, avvengono senza che nelle radici appaia affatto aumentato il consumo in  $O_2$ .

Tale fatto risulta tanto più degno di rilievo in quanto è ben noto come, sia la crescita sia l'assorbimento radicale, siano in stretta relazione con i processi respiratori, e come sostanze (2-4 dinitrofenolo) capaci di separare i processi di sintesi dei legami fosforici da quelli ossidativi possano limitare o anche ridurre a zero, l'assorbimento in genere <sup>(12)</sup> e quello del P in particolare <sup>(13)</sup>.

Ma l'azione del Be può (come risultato) considerarsi opposta, almeno sotto alcuni aspetti, a quella del 2-4 dinitrofenolo, in quanto il consumo di ossigeno non sarebbe aumentato ma anzi ridotto, e non verrebbero continuamente « dispersi », ma all'opposto accantonati, i legami  $\sim P$  dell'ATP.

I risultati delle presenti esperienze sembrerebbero infatti indicare che il maggior assorbimento di acqua e di P sia dovuto non tanto ad una aumentata velocità dei processi ossidativi nelle radici in Be, quanto piuttosto ad un loro più elevato funzionamento dovuto alla semplice presenza di maggior quantitativi di ATP nelle cellule.

Al riguardo sono interessanti le osservazioni e le ipotesi di Ling <sup>(14)</sup>. Secondo tale A. infatti, nel muscolo il potenziale di riposo sarebbe mantenuto da ATP e da creatinfosfato, semplicemente per il loro assorbimento alle proteine e senza che quindi venga utilizzata la loro elevata energia. L'adsorbimento di ioni multivalenti (come ATP) determinerebbe la liberazione di cariche proteiche fissate, ciò che faciliterebbe l'adsorbimento di altri anioni (ad esempio fosfati inorganici, ecc.).

Il minor consumo di ossigeno ed i più elevati quantitativi di ATP delle radici immerse in Be, potrebbe quindi trovare in queste ipotesi di Ling la spiegazione logica del fatto, certamente interessante, di un maggior assorbimento di P senza un contemporaneo aumento dei processi respiratori.

(12) C. E. CLIFTON, « Enzymol. », 4, 246 (1937); E. H. NEWCOMB, « Am. Journ. Bot. », 37, 264 (1950); R. N. ROBERTSON, M. J. WILKINS, A. D. C. WAKS, « Austr. J. Sc. Res. », 4, 248 (1951); E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Nuovo Giorn. Bot. it. », n. s., 61, 29 (1954).

(13) R. HOTCHKISS, « Adv. in Enzymol. », 4, 153 (1944); C. E. CLIFTON, « Adv. in Enzymol. », 6, 269 (1946); G. W. BUTLER, « Physiol. Plant. », 6, 637 (1953).

(14) G. N. LING, in *Phosphorus metabolism*, Baltimora (1952).

**Fisiologia vegetale.** — *Ulteriori ricerche sull'azione inibente dell'auxina nei confronti dell'ossidasi dell'acido ascorbico* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORESTE ARRIGONI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Tra i problemi fondamentali della fisiologia vegetale, uno dei più vivamente sentiti è, oramai da molti anni, quello del meccanismo d'azione delle auxine; problema che, in certo modo, trascende dal campo della regolazione dell'accrescimento per investire quello più vasto del meccanismo d'azione degli ormoni, in genere, sui vari aspetti metabolico-funzionali della vita della cellula. La stimolazione della crescita non può ormai intendersi che come condizionata da precedenti profonde modificazioni dello stato chimico-fisico (e quindi anche enzimatico-metabolico) del protoplasma. La soluzione del problema dell'auxina comporta quindi, necessariamente, l'individuazione del loro primo punto di inserimento (o di reazione) su qualche processo fisiologico di base, sito in una posizione iniziale della catena di reazioni fisiologiche destinate a manifestarsi, in condizioni favorevoli, nei fenomeni di accrescimento.

Che questo primo punto di inserimento dell'azione dell'auxina sia da cercarsi a livello di sistemi enzimatici o, più genericamente, proteici, è stato suggerito da diversi Autori (Skoog et al. [1], Thimann [2], Tonzig e Trezzi [3]). Numerose ricerche hanno avuto per scopo l'individuazione dell'eventuale sistema enzimatico primariamente e specificatamente coinvolto. In esperienze su cellule vive, è stata così studiata l'azione dell'auxina su diverse deidrogenasi (Berger e Avery [4], Teubner e Murneek [5], Marrè [6], Hsiang [7]), sull'ascorbico-ossidasi (Newcomb [8]), sulla catalasi (Hsiang [7]), sul ricambio dell'amido (Bausor [9], Mitchell et al. [10], Marrè [11]) e sugli enzimi ad esso interessati: amilasi (Janicky [12], Marrè [13]), fosforilasi, ATP-asi e fosfatasi (Teubner et al. [14]).

In tutti questi casi i risultati sono stati positivi nel senso che il trattamento con auxina dei tessuti vivi ha indotto reazioni ben evidenti sull'attività degli enzimi in questione; senonché, questa stessa generica positività dei risultati, mentre da un lato conferma la profondità dell'azione delle auxine sulla fisionomia metabolica della cellula, dall'altro rende pressoché impossibile il discriminare quali, tra questi molteplici effetti, siano da considerare come diretti, e quindi iniziali, e quali altri invece indiretti, e cioè indotti dai primi solo in via secondaria.

Appariva ragionevole che risultati più precisi potessero attendersi dallo studio dell'azione dell'auxina su estratti, o preparati enzimatici a vario grado di purificazione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 16 aprile 1955.

Un aspetto interessante dei risultati ottenuti su questa linea di ricerca è costituito dalla scarsità dei casi in cui si è potuto dimostrare un'azione degli ormoni di crescita su quegli stessi sistemi che apparivano così decisamente influenzati dal trattamento *in vivo*. Così l'amilasi, in estratti, non reagisce all'auxina (Eyster [15]), come non reagiscono le deidrogenasi del malico e dell'alcool nelle esperienze di Berger e di Avery [16], la gl-6-P deidrogenasi della foglia (Gibbs [17]), la fosforilasi e la fosfatasi (Marrè e Laudi [18]). In altri casi, pur osservandosi un effetto dell'auxina sull'attività degli enzimi studiati, l'effetto sembra tuttavia legato, nella sua ampiezza, nella sua riproducibilità e nella sua stessa comparsa, a particolari condizioni del materiale di partenza per la preparazione dei sistemi enzimatici, tuttora non chiaramente individuate.

Genericamente positivo, anche se insoddisfacientemente riproducibile, sembra essere l'effetto attivante dell'auxina su determinati sistemi deidrogenasici (Teubner e Murneek [5], Marrè [19], Marrè e Arrigoni [20]). Più riproducibili, per contro, risultano gli effetti dell'auxina su un sistema enzimatico finora considerato con attenzione minore dei precedenti, anche per la mancanza di dati sicuri circa il suo significato fisiologico: e cioè l'ascorbico-ossidasi.

Nel 1951 Wagenknecht et al. [21] hanno comunicato che l'ossidazione dell'acido ascorbico in estratti grezzi, misurata come consumo di ossigeno, era influenzata da varie auxine; rilevando, però, come il senso dell'effetto variasse, almeno nel caso dell'acido indolacetico, in base alla concentrazione, effetti inibenti avendosi per le alte, ed effetti stimolanti per le basse concentrazioni, mentre altre auxine inibivano a tutte le concentrazioni usate. Più recentemente, Arrigoni e Marrè [22] hanno rilevato un'azione inibente sia per l'acido naftalenacetico (NA) che per l'acido indolacetico (AIA) e per tutta la gamma di concentrazioni usate, sull'ossidazione dell'acido ascorbico (AA) in estratti grezzi di tessuti di piantine eziolate di Pisello. Quest'azione inibente veniva messa in rapporto con altri dati, secondo i quali da un lato il trattamento con auxina mantiene alto, in sezioni sia di coleptile d'Avena che di internodi di plantule di Pisello, il tenore in acido ascorbico ridotto (Marrè [23]); e, dall'altro, modificazioni nello spettro d'assorbimento nell'ultravioletto di un'auxina, il NA, compaiono quando questa viene messa in presenza d'una frazione proteica, ottenuta per precipitazione con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ , particolarmente ricca in ascorbico-ossidasi (Marrè [24]).

A quest'insieme di dati che prospetta nell'effetto *in vitro* dell'auxina sull'ossidazione dell'acido ascorbico una reazione suscettibile di una certa riproducibilità di risultati, si aggiungeva, per noi, un altro potente motivo di interesse; motivo costituito dalle larghe ripercussioni fisiologiche che variazioni del metabolismo dell'AA possono indurre nei tessuti vegetali. Le ricerche di Tonzig e coll. hanno infatti posto in luce la singolare importanza che spetta all'AA nella regolazione della crescita sia meristematica [25] che per distensione [26], della viscosità del plasma [27], del metabolismo respiratorio e infine, della stessa attività dell'auxina come ormone di crescita [28]. Questo



complesso di dati e di osservazioni ci ha indotti a perseverare nello studio dell'azione delle auxine sull'ossidazione dell'AA *in vitro*.

I risultati che riferiamo in questa Nota dimostrano come un'azione inibente delle auxine sull'ascorbico-ossidasi sia chiaramente dimostrabile anche in preparati a grado elevato di purificazione, suggerendo quindi un'interazione diretta tra ormone ed enzima. Essi sembrano inoltre mettere in luce anche alcuni primi punti circa il meccanismo di questa interazione: in particolare l'interessamento, in essa, di radicali sulfidrilici liberi, rilevabile dall'annullamento dell'effetto in questione da parte di sostanze che bloccano l'attività di questi gruppi, quali l'acido paracloromercuribenzoico e paracloromercurifenilsulfonico.

### MATERIALE E METODI.

Nelle nostre esperienze abbiamo utilizzato, come materiale per la preparazione dell'ascorbico-ossidasi, i tessuti della parte apicale (0,5 cm.) di piantine eziolate di Pisello (*Pisum sativum*) coltivate su segatura, all'oscurità ed a 25°C. fino all'età di 7-8 giorni.

Nella maggior parte dei casi abbiamo seguito, nella purificazione dell'enzima, una delle due seguenti procedure:

a) estrazione mediante pressa, dopo tritramento dei tessuti (100 gr. circa) in mortaio in presenza di 1 volume di tampone al Tris 0,1 M, pH 7,3. L'estratto così ottenuto veniva frazionato con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ . La frazione precipitata tra 30-60 % di saturazione, risospesa in Tris, veniva liberata, per centrifugazione a 20.000 g, dal residuo insolubile, riprecipitata con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  0,6 saturo, sciolta in fosfati 0,05 M, pH 6.

b) Preparati a più alto grado di purezza sono stati ottenuti seguendo, nelle grandi linee, i primi cinque passaggi della procedura descritta da Powers et al. [29]: gli estratti, ottenuti come nel caso precedente, venivano portati con tetraborato di sodio a pH 7,5; successivamente chiarificati con acetato di bario e, dopo centrifugazione, frazionati con solfato ammonico; la frazione precipitata tra il 30 ed il 60 % di saturazione, ripresa in  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  0,07 M e ulteriormente frazionata con  $\text{MgSO}_4$ . La frazione precipitata tra il 40 ed il 70 % di  $\text{MgSO}_4$ , disciolta in  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  0,07 M, veniva quindi dializzata per 24 ore contro acqua di fonte a 3°C.

La determinazione dell'attività ascorbico-ossidasi è stata eseguita sia dosando col metodo al diclorofenolindofenolo la scomparsa dell'AA, sia determinando, nell'apparecchio di Warburg, il consumo di ossigeno corrispondente all'ossidazione dell'AA. In queste esperienze abbiamo trovato conveniente, al fine di seguire la reazione con precisione fin dai suoi primi momenti, operare in atmosfera a tenore in ossigeno molto basso; e cioè in una miscela contenente il 95 % di azoto ed il 5 % di ossigeno. Tanto le auxine che gli inibitori dei gruppi sulfidrilici venivano aggiunti all'estratto circa 10 minuti prima del substrato (AA); pH e volumi finali degli incubati venivano sempre rigorosamente controllati.

Come reagenti abbiamo usato: acido indolacetico e acido ascorbico « Merck », acido nafenacetico « Ciba », acido paraclorofenossacetico (pCIPA) « Eastman », acido paracloromercuribenzoico (pClHgB) « Bios », acido paracloromercurifenilsulfonico (pClHgP) e triidrossimetilaminometano (Tris) « Sigma ».

### ESPERIENZE E RISULTATI.

I dati delle figg. 1 e 2, e della tabella I, dimostrano come l'effetto inibente delle auxine sull'ossidazione dell'acido ascorbico si riveli anche su preparati a grado notevole di purificazione. Essi mettono pure in evidenza come



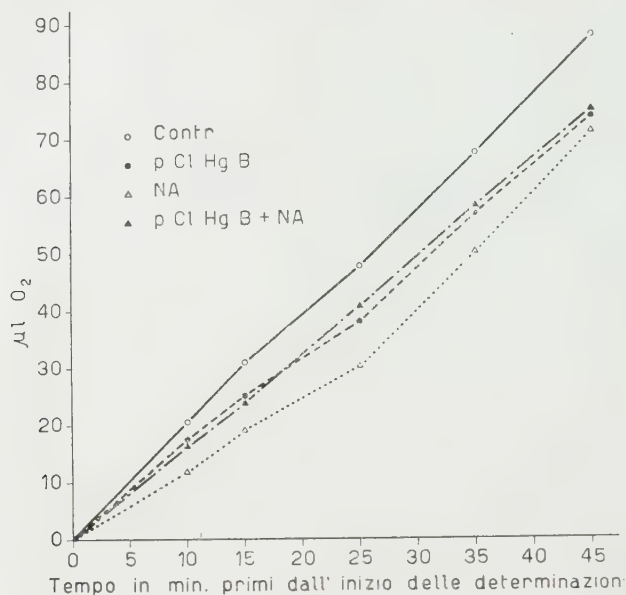


Fig. 1. - Azione del NA ( $5 \cdot 10^{-5}$  M) e del pClHgB ( $5 \cdot 10^{-4}$  M) sull'ossidazione dell'acido ascorbico. Determinazioni in respirometro di Warburg, in atmosfera contenente  $O_2$  5 %,  $N_2$  95 %. Temperatura 25 gradi C. Ogni vaschetta conteneva: Enzima (preparato secondo la procedura B) in quantità equivalente a 1 gm. peso fresco; acido ascorbico 1500  $\gamma$ ; tampone ai fosfati 0,05 M, pH 6. Volume finale 3 cc. Dati come medie dei valori di tre vaschette, corretti per i valori, peraltro molto bassi, di autoossidazione dell'acido ascorbico.

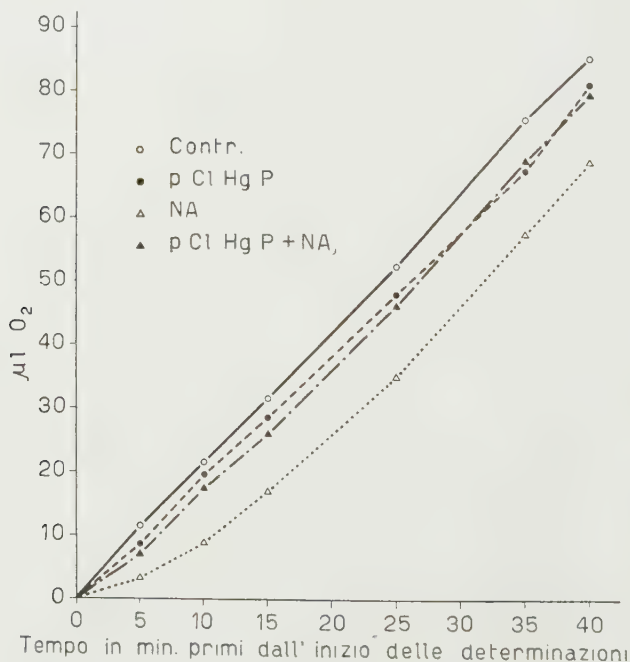


Fig. 2. - Azione del NA ( $5 \cdot 10^{-5}$  M) e del pClHgP ( $5 \cdot 10^{-4}$  M) sull'ossidazione dell'acido ascorbico. Condizioni sperimentali come alla fig. 1.

tale effetto, ben evidente nei primi momenti della reazione, vada poi man mano attenuandosi, fino a quasi annullarsi. Una possibile spiegazione di questo comportamento poteva cercarsi nel progressivo aumento, col procedere della reazione, dei prodotti di ossidazione dell'acido ascorbico nel mezzo. Ipotesi che è risultata pienamente confermata dall'esperienze riferite in Tabella II, in cui l'aggiunta, simultanea a quella dell'auxina, di quantità anche modeste di acido deidroascorbico, è apparsa ridurre di molto l'azione inibente dell'auxina sull'ascorbico-ossidasi.

TABELLA I.

*Azione di alcune auxine sull'ascorbico-ossidasi.*

Preparato enzimatico purificato secondo la procedura B.

Condizioni sperimentali: enzima, quantità corrispondente a 100 mg di tessuto fresco/cc. Acido ascorbico 1 mg/cc, tampone ai fosfati, pH 6. Auxine aggiunte 10 minuti prima del substrato. Reazione in vaschette agitate al ritmo di 60 oscillazioni al minuto primo, temperatura 25 gradi C. Determinazione col metodo al diclorofenolindofenolo. Dati come medie di tre esperienze.

Aggiunte	$\gamma$ Acido ascorbico scomparso in 5 min. pr. di reazione (dosaggio su 1 cc.)	Inibizione
Nessuna . . . . .	71	—
IAA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . . . .	49	30 %
pCIPA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . . . .	47	34 %
NA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . . . .	45	37 %

TABELLA II.

*Effetto dell'acido deidroascorbico (DHA) sull'azione dell'auxina sull'ascorbico ossidasi.*

Preparato enzimatico purificato secondo la procedura B. DHA aggiunto contemporaneamente all'auxina, altre condizioni sperimentali come alla Tabella I.

Dati come medie di quattro esperienze.

Aggiunte	$\gamma$ Acido ascorbico scomparso in 5 min. pr. (dosaggi su 1 cc.)	Inibizione
Nessuna . . . . .	89	—
NA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . . . .	60	32 %
DHA 300 $\gamma$ /cc . . . . .	85	—
DHA 300 $\gamma$ /cc + NA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . .	73	14 %

Infine, poiché ricerche precedenti ci facevano ritenere che nell'interazione tra auxina e proteine enzimatiche i gruppi sulfidrilici liberi delle molecole proteiche fossero profondamente coinvolti, abbiamo voluto studiare l'effetto di inibitori specifici di questi gruppi, quali il paracloromercuribenzoico e il paracloromercurifenilsulfonico, sull'azione delle auxine sull'ascorbico-ossidasi. Dai risultati della Tabella III e della fig. 2 appare come gli inibitori dei gruppi —SH in assenza di auxina esplicano sull'ascorbico-ossidasi un effetto molto simile a quello dell'auxina stessa, cioè inibiscono l'attività dell'enzima. D'altro lato, in presenza d'auxina, gli effetti delle due classi di sostanze non mostrano la benché minima tendenza a sommarsi; in altri termini, quando i gruppi sulfidrilici dell'enzima sono bloccati, l'azione inibente dell'auxina scompare.

TABELLA III.

*Azione dell'acido naftalenacetico (NA) e dell'acido paracloromercuribenzoico (pClHgB), soli e combinati, sull'ascorbico ossidasi.*

Preparato enzimatico ottenuto secondo la procedura B. Altre condizioni sperimentali come alla Tabella I. Dati come medie di 4 esperienze.

Aggiunte	$\gamma$ Acido ascorbico scomparso in 5 min. pr. (dosaggi su 1 cc.)	Inibizione
Nessuna . . . . .	110	—
NA $5 \cdot 10^{-5}$ M . . . . .	70	36 %
pClHgB $5 \cdot 10^{-4}$ M . . . . .	75	32 %
NA e pClHgB . . . . .	72	34 %

Entrambi i dati sembrano quindi pienamente favorevoli al concetto che l'auxina agisca sull'ascorbico-ossidasi legandosi a questa a livello dei radicali —SH.

## CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I) Le auxine AIA, NA, pCIPA, usate a concentrazioni relativamente modeste ( $5 \cdot 10^{-5}$  M), inibiscono chiaramente l'attività dell'ascorbico-ossidasi in preparati enzimatici a grado anche spinto di purificazione.

II) L'effetto inibente dell'auxina (NA) appare massimo nei primi momenti della reazione, quindi progressivamente decresce. Tale comportamento sembra imputabile all'aumento dell'acido deidroascorbico nel mezzo; aumento che, sebbene fortemente ostacolato dalla presenza dell'auxina, è peraltro in senso assoluto, sempre rapido. L'aggiunta, contemporanea a quella dell'auxina, di acido deidroascorbico al preparato enzimatico riduce di molto l'effetto inibente dell'ormone.

III) Composti noti per la specificità con cui si legano ai radicali sulfidrilici, quali il paracloromercuribenzoico ed il paracloromercurifenilsulfonico, ap-

paiono essi pure dotati di azione inibente sull'ascorbico-ossidasi. L'effetto inibente di questi composti e quello dell'auxina non si sommano per nulla tra loro.

Questi dati suggeriscono, come interpretazione più semplice, quella di un'interazione diretta tra auxina e ascorbico-ossidasi, e indicano nei gruppi sulfidrilici il luogo biochimico di questa interazione.

Il possibile significato fisiologico di questa interazione sembra risaltare in modo suggestivo dall'esame di molti tra i dati della letteratura sull'auxina e sull'acido ascorbico. Come si è detto nell'introduzione, crescita [26], moltiplicazione cellulare [25], viscosità del plasma [27], sembrano strettamente controllati dal tenore in ascorbico nei tessuti. Per quanto riguarda poi la nota azione dell'auxina sulla respirazione e sull'attività deidrogenasica, *in vivo* [30, 4] come *in vitro* [5, 19, 20] nulla si oppone al pensiero che essa possa essere mediata attraverso un'azione dell'ormone sull'ascorbico-ossidasi: l'ascorbico, nella forma ossidata, risulta, infatti un deciso inibitore dell'attività di diverse deidrogenasi *in vitro* (Tonzig, et al. [28]); e, d'altra parte, la comune occorrenza dell'ascorbico-riduttasi, enzima che ossida il glutatione riducendo il deidroascorbico, crea una condizione per cui un alto tenore in deidroascorbico nella cellula si tradurrebbe in un aumento della forma ossidata del glutatione, di cui è nota l'azione inibente su diversi enzimi respiratori, e in particolare sulla succinico deidrogenasi (Hopkins e Morgan [31]. D'altro lato, altri sistemi enzimatici, noti per le loro variazioni *in vivo* in seguito a trattamento auxinico, come le amilasi, sono notoriamente sensibili sia all'acido ascorbico che al glutatione (Purr [32]). Se quindi l'auxina operasse *in vivo* nello stesso modo che nelle nostre esperienze risulta operare *in vitro*, molti per lo meno dei suoi effetti fisiologici potrebbero spiegarsi semplicemente in base alla sua azione di freno sull'ossidazione dell'ascorbico, e quindi di controllo dell'equilibrio ascorbico/deidroascorbico e, quindi, glutatione ossidato/glutazione ridotto. Di fatto, in segmenti di coleptili d'avena e di internodi di pisello l'auxina agisce mantenendo alto il tenore in ascorbico ridotto, alle spese, secondo ogni evidenza, del deidroascorbico (Marrè [23]).

In base a queste considerazioni, e ad altre che ci riserviamo di presentare in altra sede, ci sembra sia possibile, già al momento attuale, avanzare l'ipotesi che almeno larga parte degli effetti fisiologici dell'auxina siano imputabili alla sua capacità di regolare, tramite un'interazione diretta con l'ascorbico-ossidasi, l'equilibrio tra forma ridotta e forma ossidata dell'acido ascorbico.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. SKOOG, C. L. SCHNEIDER e P. MALAN, « Am. Jour. Bot. », 19, p. 568 (1952).
- [2] K. V. THIMANN, in: *Plant Growth Substances di F. Skoog*, Univ. Wis. Press (1951).
- [3] S. TONZIG e F. TREZZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, pp. 603 e 696 (1954).
- [4] S. BERGER e G. S. AVERY, « Science », 98, p. 454 (1943).
- [5] F. S. TEUBNER e A. E. MURNEEK, « Science », 116, p. 39 (1952).
- [6] E. MARRÈ, « Rend. Ist. Lombardo Sc. e Lett. », 87, p. 37 (1954).
- [7] T. T. HSIANG, « Plant. Phys. », 26, p. 708 (1950).

- [8] E. H. NEWCOMB, «Proc. Soc. Exp. Biol. and Med.», 76, p. 504 (1951).
- [9] S. C. BAUSOR, «Bot. Gaz.», 102, p. 115 (1938).
- [10] J. W. MITCHELL e M. R. WHITEHEAD, «Bot. Gaz.», 104, p. 115 (1940).
- [11] E. MARRÈ, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 25, p. 231 (1949).
- [12] J. JANICKY, «Enzymology», 7, p. 182 (1939).
- [13] E. MARRÈ, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 25, p. 234 (1949).
- [14] F. S. TEUBNER, E. MARRÈ e A. E. MURNEEK, «N. Gior. Bot. It.», 61, p. 9 (1954).
- [15] H. C. EYSTER, «Plant Phys.», 21, p. 68 (1946).
- [16] S. BERGER e G. S. AVERY, «Am. Jour. Bor.», 31, p. 11 (1944).
- [17] M. GIBBS, «Plant. Phys.», (1954).
- [18] E. MARRÈ e G. LAUDI. Non pubblicato.
- [19] E. MARRÈ, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 15, p. 433 (1953).
- [20] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 16, p. 264 (1954).
- [21] A. C. WAGENKNECHT, A. J. RIKER, T. C. ALLEN e R. H. BURRIS, «Amer. Jour. Bot.», 38, p. 550 (1951).
- [22] O. ARRIGONI e E. MARRÈ, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 17, p. 391 (1954).
- [23] E. MARRÈ, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 16, p. 758 (1954).
- [24] E. MARRÈ, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 18, p. 88 (1955).
- [25] S. TONZIG e L. BRACCI, «N. Gior. Bot. It.», n. s., 57, p. 237 (1950) e 58 p. 258 (1951).
- [26] S. TONZIG e F. TREZZI, «N. Gior. Bot. It.», n. s., 57, pp. 515 e 549 (1950).
- [27] S. TONZIG, «N. Gior. Bot. It.», n. s., 57, p. 468 (1950).
- [28] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, «Memorie, Acc. Naz. Lincei» (1955), i corso di stampa.
- [29] W. H. POWERS, S. LEWIS e CH. R. DAWSON, «Jour. Gen. Phys.», 27, p. 167 (1944).
- [30] B. COMMONER e K. V. THIMANN, «Jour. Gen. Phys.», 24, p. 279 (1941).
- [31] F. S. HOPKINS e E. J. MORGAN, «Bioc. Jour.», 32, p. 611 e 1829 (1938).
- [32] A. PURR, «Bioch. Jour.», 28, p. 1411 (1943).

**Fisiologia vegetale.** — *Sul parallelismo tra azione di stimolo sulla crescita e azione sull'attività deidrogenasica «in vitro» di alcuni inibitori dei gruppi sulfidrilici a concentrazioni subinibenti* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORIETTA SERVETTAZ, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Il carattere genericamente stimolante dell'azione delle auxine sui più diversi processi fisiologici ha indotto gli studiosi a cercarne l'origine prima nell'attivazione di una qualche reazione metabolica di base. Sembra tuttavia legittimo osservare che, nel gioco di equilibri tra forze in reciproca opposizione, così caratteristico del metabolismo cellulare, aprioristicamente equivalgono le probabilità che ad un'azione finale di stimolo si giunga sia in conseguenza di un effetto iniziale di tipo inibente che di uno di tipo attivante, l'inibizione di una determinata forza portando ovviamente al prevalere di quelle ad essa contrarie. Appare quindi possibile che l'effetto primario dell'auxina possa consistere in un suo intervento inibente su un qualche sistema che normalmente controlla, mantenendolo a un livello inferiore a quello potenzialmente possibile, determinate forze fisiologiche presenti nella cellula.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.



Un simile concetto sembra trovar conferma in diversi dati, tra quelli più recenti: in particolare, in quelli relativi all'azione inibente che le auxine, a concentrazioni fisiologiche, esplicano sull'attività ascorbico-ossidasi in preparati enzimatici a grado elevato di purificazione (Arrigoni e Marrè [1]; Marrè e Arrigoni [2]).

Scopo della presente Nota è il rilevare come altri dati, ottenuti *in vivo* e ormai classici tra quelli della letteratura sull'auxina, possano essi pure, se integrati con ricerche condotte a livello subcellulare, essere interpretati in senso favorevole al concetto di un'azione primaria inibente dall'auxina.

In una serie di lavori di fondamentale interesse Commoner e Thimann [3], Thimann e Bonner [4] e ancora Thimann e Bonner [5], studiando l'azione antagonista a quella auxinica di alcuni inibitori respiratori, osservano come a concentrazioni molto basse, immediatamente inferiori a quella minima inibente, due composti noti come inibitori dei gruppi sulfidrilici, e cioè gli acidi monojodoacetico e para-cloromercuribenzoico, esplicano un modesto ma pure ben definito effetto di stimolo sulla crescita per distensione. Gli Autori citati, constatato il fatto, non si soffermano sul suo possibile meccanismo e significato.

A richiamare la nostra attenzione sulla singolare azione attivante degli acidi para-cloromercuribenzoico e monojodoacetico a concentrazioni subinibenti è stato principalmente il recente reperto circa l'effetto inibente che reagenti specifici dei gruppi sulfidrilici esplicano, a concentrazioni relativamente modeste, sull'ossidasi dell'acido ascorbico (Frieden [6]; Marrè e Arrigoni [2]); e cioè proprio su quello stesso sistema enzimatico che, come si è detto sopra, risulta sino ad oggi il solo a reagire *in vitro* all'auxina in modo costante e in preparati a grado di purificazione tale da rendere improbabile un effetto indiretto.

D'altra parte, da altre ricerche emergeva pure un'azione di stimolo, statisticamente consistente, seppure incompletamente riproducibile, delle auxine sull'attività di sistemi deidrogenasici studiati *in vitro*, su estratti grezzi o parzialmente purificati (Marrè e Arrigoni [7]), azione probabilmente indiretta e forse legata a quella, ben più regolare e meglio definita, di inibizione sull'ascorbico-ossidasi. Infatti il prodotto primo dell'ossidazione dell'acido ascorbico, il deidroascorbico, appare dotato di una singolare attività inibente su diversi sistemi deidrogenasici (Tonzig et al. [8]).

La constatazione dell'analogia di azione tra auxina e inibitori dei radicali sulfidrilici, a bassa concentrazione, sull'ascorbico-ossidasi ci suggeriva così la possibilità che una corrispondente analogia si potesse ritrovare anche nei riguardi dell'attività deidrogenasica *in vitro*: il che avrebbe evidentemente suggerito un meccanismo sostanzialmente analogo per l'azione attivante dei due tipi di sostanze sulla crescita.

I dati che qui riferiamo, dimostrando come – in determinate condizioni sperimentali – basse concentrazioni dei due inibitori in questione possano stimolare in misura sensibile l'attività deidrogenasica *in vitro*, sembrano pienamente favorevoli all'idea di un meccanismo comune per le auxine e

gli inibitori studiati nell'attivazione della crescita; d'altro lato, essi vengono a portare una conferma indiretta all'ipotesi, precedentemente espressa (Marrè e Arrigoni [2]) che il momento iniziale di inserimento dell'auxina sul metabolismo cellulare possa cercarsi nell'inibizione, a livello di gruppi sulfidrilici liberi, di un sistema enzimatico probabilmente individuabile nell'ossidasi dell'acido ascorbico.

#### MATERIALI E METODI.

Abbiamo studiato l'azione degli acidi monojodoacetico e p-cloromercuribenzoico sulla attività deidrogenasica in estratti, sia grezzi che purificati per precipitazione con solfato di ammonio, ottenuti, seguendo la tecnica usata in altri lavori, dai tessuti apicali di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum* var. Alaska) coltivate per 7 giorni in camera oscura, termoregolata a 25°C. Il sistema enzimatico preso in considerazione è stato quello ossidante il glucoso-6-fosfato, particolarmente attivo in questo materiale (Marrè e Servettaz [9]). L'attività deidrogenasica è stata da noi determinata mediante il metodo al tetrazolio nel vuoto (Marrè e Servettaz [10]). Ricordiamo come tale metodo fornisca la misura dell'attività non tanto della singola deidrogenasi specifica studiata, quanto di un sistema costituito da questa e da una flavoproteina (Smith [11]; Arrigoni [12]); per cui le variazioni di attività osservate possono derivare da variazioni a carico di uno qualsiasi dei due componenti enzimatici del sistema.

Come reagenti abbiamo usato: acidi monojodoacetico (IoAc) e acido ascorbico Merck, acido p-cloromercuribenzoico (ClHgB) Bios, trifosfopiridinnucleotide (TPN), Glucoso-6-fosfato (Gl-6-P) e trisidrossimetilaminometano (tris) Sigma.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

Il grafico della fig. 1 illustra l'azione dell'acido paracloromercuribenzoico sull'attività del sistema ossidante il glucoso-6-P. Concentrazioni superiori a  $10^{-5}$  M risultano nettamente inibenti, suggerendo l'essenzialità di gruppi sulfidrilici liberi per il normale svolgimento della reazione enzi-

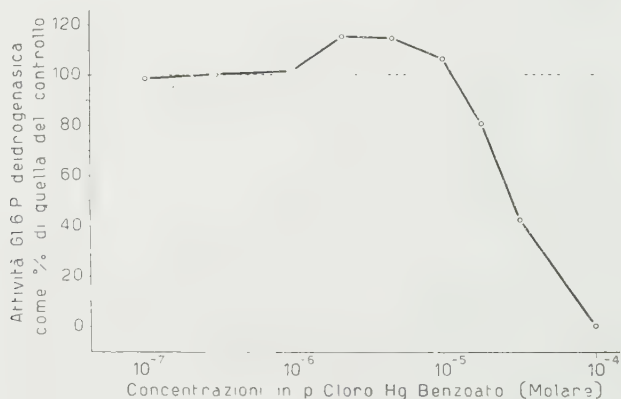


Fig. 1. - Azione del pClHgB sull'attività glucoso-6-P deidrogenasica di estratti di apici di piantine eziolate di pisello. Estratti parzialmente purificati per precipitazione con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  a saturazione 40%. Condizioni sperimentali come alla Tabella I, ma pClHgB anziché IoAc.

matica. Per contro, una modesta ma ben definita attivazione appare per concentrazioni tra  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$  M. Il grafico riferisce i dati di un'esperienza scelta come rappresentativa dell'andamento medio delle numerose eseguite. Rileviamo però come, mentre l'inibizione alle concentrazioni superiori è risultata fenomeno costante, per contro l'attivazione a quelle inferiori sia apparsa notevolmente irregolare, variando da nulla, in alcune esperienze, fino a molto notevole (fino a valori del 35 %) in altre serie; irregolarità che, del resto, si ritrova anche nel caso dell'attivazione da auxine, e che trae presumibilmente origine da una natura indiretta dell'effetto attivante.

I dati della tabella I mostrano come effetti analoghi a quelli del paracloromercuribenzoico si osservino anche per l'altro inibitore dei gruppi sulfidrilici studiato, l'acido monojodoacetico; salvo che per questo molto ridotto, anzi quasi assente appare l'effetto inibente alle concentrazioni superiori, mentre più estesa risulta la gamma delle concentrazioni attivanti (tra  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$  M). Anche qui, notevoli irregolarità abbiamo riscontrato per quanto riguarda sia l'entità, che la dipendenza dell'effetto attivante dalla concentrazione in inibitore.

TABELLA I.

*Azione dell'acido monojodoacetico sull'attività Gl-6-P della deidrogenasica di estratti grezzi della parte apicale di piantine eziolate di pisello.*

Estratto incubato per 30 min. primi con IoAc prima dell'aggiunta di substrato e coenzima. Composizione dell'incubato: tessuto 10 %, tampone tris 0,1 M ; pH 7,2 ; Gl-6-P 0,02 M ; TPN 20  $\gamma$ /cc. Vol. finale 1 cc. Tempo di incubazione (dopo aggiunta del Gl-6-P) 45 primi. Temperatura, 20 gradi C. Dati come medie di 3 determinazioni.

Concentrazione in IoAc.	$\gamma$ TTC ridotto per ora	Attivazione
0 . . . . .	40	—
$10^{-3}$ M . . . . .	39	— 2 %
$10^{-4}$ M . . . . .	42	5 %
$10^{-5}$ M . . . . .	47	17 %
$10^{-6}$ M . . . . .	43	7,5 %
$10^{-7}$ M . . . . .	40	0

Infine, degni di notevole interesse appaiono i dati della fig. 2, che dimostrano come attivazioni molto maggiori possano ottenersi, almeno nel caso del monojodoacetato, quando l'estratto venga incubato per un breve periodo (5 primi) all'aria, prima dell'aggiunta del Glucosio-6-fosfato, del TPN e

dell'indicatore (TTC), con una modesta concentrazione in acido ascorbico e monojodoacetato, anziché monojodoacetato solo. Poiché l'analisi di un'aliquota dell'estratto al termine di questo periodo di incubazione dimostrava che l'ossidazione dell'acido ascorbico si era svolta con velocità considerevolmente minore in presenza di monojodoacetato che nei controlli (tabella II)

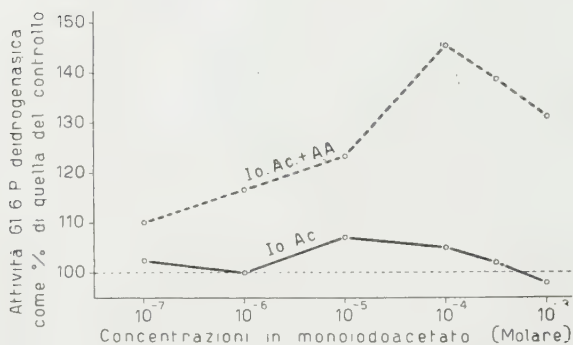


Fig. 2. - Azione dello IoAc., in presenza e assenza di acido ascorbico, sull'attività glucoso-6-P deidrogenasica di estratti grezzi di apici di piantine eziolate di *Pisum*. Per le condizioni sperimentali vedi le Tabelle I e II.

che suggerisce che anche l'attivazione senza aggiunta dall'esterno di acido ascorbico possa ricondursi a un meccanismo analogo, data la presenza, negli estratti grezzi come pure (anche se in misura minore) in quelli parzialmente purificati, di piccole quantità di acido ascorbico e deidroascorbico, tra loro in una situazione di equilibrio instabile, regolata da un lato dall'attività dei processi riducenti il deidroascorbico ad ascorbico (Marrè e Laudi [13]) dall'altro dall'attività dell'ascorbico-ossidasi, sensibile, appunto, all'azione degli inibitori dei gruppi sulfidrilici.

TABELLA II.

*Ossidazione dell'acido ascorbico in estratti grezzi della parte apicale di piantine eziolate di pisello, in presenza o meno di monojodoacetato.*

Tessuto 10 %. Tampone tris 0,1 M; pH 7,3; acido ascorbico 200  $\gamma$ /cc. Tempo di incubazione 5 min. primi. Jodoacetato aggiunto all'estratto 30 min. primi prima dell'acido ascorbico. Vol. fin. 1 cc.

Concentrazione in IoAc.	Acido ascorbico ossidato in 5 primi
0 . . . . .	75
$10^{-3}$ M . . . . .	57

sembra potersi dedurre che la minore attività deidrogenasica successivamente riscontrata in questi ultimi sia da imputarsi al maggior contenuto in acido deidroascorbico, composto ad azione inibente sull'attività di diverse deidrogenasi. (Tonzig e al. [8]). In questo caso, quindi, l'effetto apparentemente stimolante del monojodoacetato appare riconducibile alla sua capacità di inibire la comparsa di un composto ad azione inibente: il



## CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I) Concentrazioni in acido para-cloromercuribenzoico superiori a  $10^{-5}$  M inibiscono nettamente l'attività del sistema Gl-6-P deidrogenasi-flavoproteina responsabile dell'ossidazione del Gl-6-P, suggerendo l'importanza di radicali sulfidrilici liberi per l'attività di questo sistema.

II) Concentrazioni in acido para-cloromercuribenzoico subito inferiori a quelle inibenti dimostrano una consistente, seppure irregolare, tendenza all'attivazione dello stesso sistema enzimatico.

III) L'acido monojodoacetico mentre a concentrazioni elevate ( $10^{-3}$  M) esplica azione inibente debolissima o nulla sull'ossidazione del Gl-6-P, per contro a concentrazioni tra  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$  M attiva, anch'esso irregolarmente ma consistentemente, la stessa reazione.

IV) L'azione stimolante del monojodoacetato risulta nettamente intensificata quando il preparato enzimatico venga incubato per un certo periodo all'aria, prima dell'aggiunta del Gl-6-P e del coenzima, con acido ascorbico e monojodoacetato, in condizioni in cui il monojodoacetato inibisca l'ossidazione dell'acido ascorbico a deidroascorbico: dato che suggerisce che l'azione apparentemente attivante degli inibitori dei gruppi SH sull'attività deidrogenasica possa derivare, nelle nostre esperienze, dalla loro capacità di inibire la comparsa di composti, come il deidroascorbico, dotati di azione inibente sull'attività deidrogenasica.

Questi risultati suggeriscono una possibilità di spiegazione per l'azione attivante sulla crescita delle concentrazioni subinibenti di acido monojodoacetico e para-cloromercuribenzoico. Attivazione della crescita e metabolismo respiratorio appaiono infatti sicuramente, anche se oscuramente, legati tra loro; cosicché sembra molto probabile che un medesimo meccanismo sia in gioco sia nell'attivazione della crescita *in vivo*, che nell'attivazione dell'attività deidrogenasica *in vitro*, indotte, l'una e l'altra, dalle basse concentrazioni dei due inibitori dei gruppi sulfidrilici. D'altro lato, il fatto apparentemente paradossale che sostanze caratteristicamente inibenti gruppi di attività biologica essenziale come quelli sulfidrilici possano attivare processi come la crescita, in un caso, e reazioni di trasporto d'idrogeno, nell'altro, diventa facilmente comprensibile qualora si ammetta che l'azione attivante non sia, in entrambi i fenomeni, che indiretta, e derivi dall'inibizione di un sistema enzimatico catalizzante la formazione di un qualche fattore inibente: quali sembrano essere, rispettivamente, l'ascorbico-ossidasi e l'acido deidroascorbico.

Ma l'aspetto più interessante di questi risultati ci sembra sia quello che investe il problema del meccanismo d'azione delle stesse auxine. L'azione di questi ormoni viene infatti a convergere in diversi punti, in base a questi dati e ad altri precedenti ([2, 7, 8] Marrè [14]), con quella degli inibitori dei gruppi sulfidrilici. Affinità specifica per i sulfidrilici, azione inibente (presumibilmente diretta) sull'ascorbico-ossidasi, e azione stimolante a basse con-



centrazioni (presumibilmente indiretta) su determinati sistemi deidrogenasici sarebbero infatti caratteri comuni ai due gruppi di sostanze, la cui fondamentale differenza di comportamento, a concentrazioni più elevate, potrebbe forse cercarsi nel carattere estremamente specifico dell'auxina, per cui la sua azione resterebbe praticamente confinata, a concentrazioni fisiologiche, a un numero molto ristretto di sistemi enzimatici, di fronte alla azione aspecificamente brutale del paracloromercuribenzoato e del monojodoacetato.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] O. ARRIGONI e E. MARRÈ, 1954, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 18, 391.
- [2] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, 1955, « Rend. Acc. Naz. Lincci », in corso di stampa.
- [3] B. COMMONER and K. V. THIMANN, 1941, « Jour. Gen. Phys. », 24, 279.
- [4] K. V. THIMANN and W. D. BONNER, 1948, « Amer. Jour. Bot. », 35, 271.
- [5] K. V. THIMANN and W. D. BONNER, 1949, « Amer. Jour. Bot. », 36.
- [6] E. FRIEDEN, 1953 « Fed. Proc. », 12, 205.
- [7] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, 1954, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 18, 264.
- [8] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, 1955, « Atti Acc. Naz. Lincci » in corso di stampa.
- [9] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, 1954, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 16, 521.
- [10] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, 1955, « Giorn. Bioch. », 4, 10.
- [11] G. F. SMITH, 1952, « Plant. Phys. », 27, 445.
- [12] O. ARRIGONI, 1955, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 18, 94.
- [13] E. MARRÈ e G. LAUDI, 1954, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 16, 649.
- [14] E. MARRÈ, 1955, « Rend. Acc. Naz. Lincci », 18, 89.

**Biologia** (Biochimica). — *Sintesi dell'ipotaurina* <sup>(\*)</sup>. Nota di DORIANO CAVALLINI, CARLO DE MARCO, BRUNO MONDOVÌ e FIORENZO STIRPE, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Il nome di ipotaurina è stato assegnato da Fromageot all'omologo solfinico della taurina, ac. 2-aminoetansolfonico:



Questo composto ha assunto una notevole importanza biologica dopo la scoperta del suo ruolo di intermediario nel metabolismo della cistina, della cisteina, dell'ac. cisteinsolfonico e della cistamina. La sintesi della ipotaurina è stata realizzata per la prima volta, circa nello stesso tempo da Awapara <sup>(1)</sup> e da Cavallini, De Marco e Mondovì <sup>(2)</sup>, con due metodi diversi. Il metodo impiegato da Awapara, date le drastiche condizioni di preparazione, produce un composto contenente una notevole quantità di taurina,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma con il contributo del C.N.R. e della Rockefeller Foundation.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) J. AWAPARA, « J. Biol. Chem. », 203, 183 (1953).

(2) D. CAVALLINI, C. DE MARCO e B. MONDOVÌ, « Giorn. Biochim. », 2, 338 (1953).

come impurezza, visibile negli stessi cromatogrammi riportati da Awapara, che lo rende poco adatto ad una utilizzazione per esperimenti metabolici. Con il metodo impiegato da Cavallini, De Marco e Mondovì, pur avendosi l'inconveniente di una resa assai bassa, si ottiene un preparato assai puro con un procedimento relativamente semplice. Avendo dovuto ripetere varie volte la preparazione dell'ipotaurina, abbiamo introdotto delle variazioni al metodo originale che ne rendono assai più agevole il procedimento elevando al tempo stesso la resa, senza pregiudizio della purezza del composto. Intendiamo con la presente Nota di fornire i dettagli del metodo modificato necessari alla sua riproducibilità.

**PRINCIPIO DEL METODO.** — Come sostanza di partenza può essere usata tanto la cistamina che la cisteinamina. Con una quantità appropriata di  $\text{H}_2\text{O}_2$ , ed in presenza di tracce di iodio che funziona da catalizzatore, si ottiene il disolfossido della cistamina. Senza isolare il disolfossido dalla soluzione questo viene dismutato in ipotaurina e cistamina portando la soluzione in alcalino. L'ipotaurina viene separata mediante cromatografia su resine a scambio ionico dalla cistamina che eventualmente non ha reagito, da quella prodotta dalla dismutazione del disolfossido, dalla taurina formatasi come sottoprodotto e dai sali presenti nella soluzione. L'impiego delle resine per l'estrazione dell'ipotaurina si fonda sui seguenti dati ricavati sperimentalmente. Le resine cationiche solfoniche (Dowex 50) trattengono l'ipotaurina in soluzione di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  1 N, trattengono inoltre la cistamina ed i cationi inorganici presenti nel liquido; la taurina ed gli anioni inorganici passano nel percolato e nei lavaggi. Con  $\text{NH}_3$  1 N viene eluita totalmente l'ipotaurina insieme a piccole tracce di cistamina e di eventuali composti basici presenti come impurezza nella cistamina di partenza. Le resine cationiche carbossiliche (Amberlite IRC-50) non trattengono l'ipotaurina disciolta in  $\text{NH}_3$  1 N, mentre trattengono l' $\text{NH}_3$ , la cistamina ed altri eventuali composti basici.

**PREPARAZIONE DELLE COLONNE DI RESINE SCAMBIATRICI.** — La colonna di resina solfonica era preparata con Dowex 50 (80–100 mesh). Dopo frantumazione meccanica e graduazione con setacci, la resina era lavata più volte per decantazione con acqua di fonte fino ad ottenere un'acqua di lavaggio limpida. Con la sospensione di resina si riempiva una colonna cromatografica di 2,5 cm di diametro portante al fondo un setto di vetro poroso, fino a raggiungere un'altezza di resina di 40 cm. Quindi si procedeva ad un ciclo di preparazione facendo passare nell'ordine:  $\text{NaOH}$  2 N, 1 L;  $\text{H}_2\text{O}$ , fino a neutralità dell'effluente;  $\text{HCl}$  5 N, 1 L;  $\text{H}_2\text{O}$  fino a neutralità dell'effluente. La colonna di resina carbossilica era preparata con Amberlite IRC-50 allo stesso modo della colonna precedente mentre i cicli di lavaggio e di rigenerazione erano eseguiti con  $\text{NaOH}$  1 N e con  $\text{HCl}$  1 N, lasciando per il resto invariate le condizioni sopra esposte. Le stesse colonne erano usate più volte dopo aver sottoposto la resina ad un ciclo di rigenerazione identico al ciclo di preparazione sopra esposto.

SINTESI DELLA CISTAMINA E DELLA CISTEINAMINA. - Abbiamo trovato più conveniente abbandonare il metodo di sintesi della cistamina utilizzato in precedenza <sup>(3)</sup>, perché assai laborioso, ed utilizzare il metodo di Barnett. Con quest'ultimo metodo si ottiene un prodotto meno puro ma in quantità assai più elevate. La cisteinamina base era ottenuta secondo il metodo di Barnett <sup>(4)</sup> a partire dalla etilenimina che era preparata

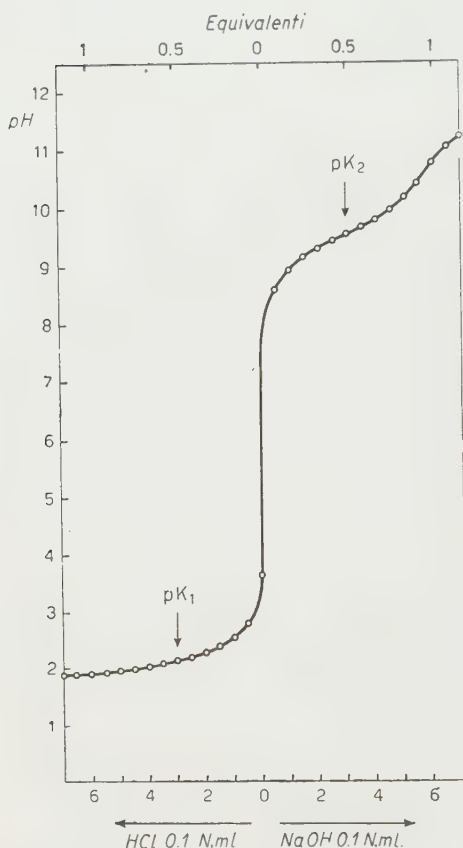


Fig. 1. - Curva di titolazione dell'ipotaurina sintetica eseguita su campioni di 65 mg a 17°.

il cloridrato di cisteinamina (Cisteamina Cilag) che può essere direttamente utilizzato come sostanza di partenza per la preparazione dell'ipotaurina o può essere prima ossidato a cistamina nella maniera descritta sopra.

secondo il metodo di Wenker <sup>(5)</sup>. Il cloridrato di cisteinamina era ottenuto acidificando con eccesso di HCl conc. una soluzione di cisteinamina base portando a secchezza a pressione ridotta su bagno d'acqua bollente e ricristallizzando il residuo dall'alcool. Il dicloridrato di cistamina era preparato per ossidazione con iodio del cloridrato di cisteinamina. Per liberare totalmente il prodotto dall'HI formato nella reazione, la soluzione dopo ossidazione era passata attraverso una colonna di resina anionica (Dowex 2) raccogliendo il percolato ed i lavaggi con H<sub>2</sub>O positivi alla reazione al nitroprussiato con NaCN. Questa colonna era preparata come la colonna di Dowex 50 con la differenza che l'ordine dei cicli di lavaggio e di rigenerazione era invertito, si terminava cioè con il lavaggio con NaOH seguito dal lavaggio con H<sub>2</sub>O fino a neutralità dell'effluente. Il liquido contenente la cistamina dopo acidificazione con HCl conc. era portato a secco a pressione ridotta su bagno d'acqua bollente e la cistamina era ricristallizzata dall'alcool. Attualmente si trova in commercio

(3) D. CAVALLINI, C. DE MARCO, B. MONDOVI e P. MERUCCI, «Giorn. Biochim.», 455 (1952).

(4) W. H. BARNETT, «J. Chem. Soc.», 1944, 5.

(5) H. WENKER, «J. Am. Chem. Soc.», 57, 2328 (1935).

PROCEDIMENTO. — G. 2,25 (0,01 M) di cistamina dicloridrato sono sciolti in 10 ml  $H_2O$ , si aggiungono 30 mg di NaI e, agitando, 2,3 ml (0,02 M) di  $H_2O_2$ , al 30 % (Peridrolo Merck) a gocce. Il liquido che si colora per lo sviluppo di iodio, si lascia a temp. ambiente per una notte. Partendo dal cloridrato di cisteinamina le quantità sono modificate come segue: cisteinamina cloridrato 2,27 g,  $H_2O_2$  30 % 3,5 ml, le altre condizioni restano invariate. Il giorno seguente si dismuta il disolfossido alcalinizzando la soluzione fino a pH 10–12 con NaOH 2 N (10–15 ml). Si lascia un'ora a temp. ambiente, si neutralizza con  $H_2SO_4$  50 %, e si rende quindi la soluzione 1 N in  $H_2SO_4$  aggiungendovi 1/4 del volume di  $H_2SO_4$  5 N. La soluzione è trasferita nella colonna di Dowex 50, si lava la resina prima con 50 ml  $H_2SO_4$  1 N, quindi con  $H_2O$  fino a neutralità dell'effluente. Si eluisce con  $NH_3$  1 N e si raccolgono i primi 50 ml dalla comparsa del fronte alcalino; è bene raccogliere anche qualche ml prima della comparsa del fronte. La discesa del fronte alcalino nella colonna può essere seguita osservando l'alone chiaro che discende col fronte stesso. È utile ma non indispensabile, l'uso di un raccoglitore di frazioni per questa operazione. L'effluente raccolto viene passato direttamente nella colonna di Amberlite IRC-50. Si raccoglie il percolato ed il successivo lavaggio con 200 ml di acqua in uno stesso recipiente. Si porta a secco su bagno d'acqua caldo e a pressione ridotta. Abbiamo potuto osservare che la liofilizzazione o la distillazione in corrente di azoto come eseguita nel primo lavoro non è indispensabile. In questo modo si ottiene una massa solida bianca attaccata alle pareti del recipiente. Anche senza procedere alla cristallizzazione si ottiene un prodotto analiticamente puro, P.F. 175–177°<sup>(6)</sup>.

$C_2H_7NO_2S$	calc.	N 12,83 %	S 29,37 %
P. M. 109,138	trov.	N 12,62 %	S 29,20 %

Con il composto ottenuto abbiamo eseguito una curva di titolazione che ha dato i risultati riportati nella figura. Da questa curva abbiamo ricavate le costanti di dissociazione che sono risultate:  $pK_1 = 2,16$   $pK_2 = 9,56$ . Queste costanti confrontate con quelle esistenti in letteratura per la taurina ( $pK_1 = 1,5$   $pK_2 = 8,74$ )<sup>(7)</sup>, dimostrano una minore dissociazione acida della ipotaurina ed un P. I. più elevato, come si poteva già dedurre dal diverso comportamento cromatografico<sup>(8)</sup> dei due composti.

Siamo grati al prof. D. Marotta per aver concesso di far eseguire le analisi nel Laboratorio di Microanalisi dell'Istituto Superiore di Sanità dalla dott.ssa M. Marzadro, e alla Ditta Cilag di Milano per un generoso dono di cisteinamina.

(6) E. BRICAS, F. KIEFFER e C. FROMAGEST hanno recentemente sintetizzato l'ipotaurina con un metodo diverso ottenendo un composto cristallino (comunicazione personale al momento della correzione delle bozze).

(7) J. C. ANDREWS e C. L. A. SCHMIDT, « J. Biol. Chem. », 73, 651 (1927).

(8) D. CAVALLINI, C. DE MARCO e B. MONDOVÌ, « Ric. Scient. », 24, 1021 (1954).



**Genetica.** — *Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche.* Nota III di MARCELLO SINISCALCO, presentata (\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Nelle due Note precedenti <sup>(1)</sup> si sono discusse le ipotesi più probabili per spiegare il mantenersi dell'elevata frequenza del gene *M*, autosomico letale in condizione omozigote.

In particolare si è richiamata l'attenzione sul fatto che l'equilibrio genico potrebbe essere in effetti facilmente mantenuto attraverso un vantaggio selettivo, anche modesto, a favore degli eterozigoti *Mm*. Per una frequenza genica del 0,05 si è calcolato ad esempio, in base alle equazioni proposte da Penrose (1949) <sup>(2)</sup>, che un « vantaggio » dell'ordine del 5 % degli *Mm* (microcitemici) sugli *mm* (normali) sarebbe stato sufficiente a compensare la perdita genica che si verifica ad ogni generazione con la morte precoce degli *MM* (Cooley).

Seguendo tale ipotesi di lavoro si era poi tentata una stima diretta della « fitness » o « adattanza » di ciascun genotipo servendosi di una serie di dati raccolti da Silvestroni e Bianco nel 1951 <sup>(3)</sup> con i quali veniva descritta la distribuzione dei tre genotipi in una popolazione di genitori e di figli. Tale stima, seguendo Penrose (1950) <sup>(4)</sup>, era ottenuta dal rapporto diretto tra le frequenze dei tre genotipi nelle due generazioni consecutive di padri e figli. I risultati dell'indagine pur non essendo sufficienti di per se stessi a provare l'ipotesi formulata, non erano comunque in contrasto con essa, in quanto la differenza osservata tra la « fitness » degli *Mm* e quella degli *mm*, pur non essendo significativa, sembrava essere dello stesso ordine di grandezza di quella richiesta per l'equilibrio.

In realtà un esame più attento del metodo proposto e delle caratteristiche della popolazione studiata, rendevano necessaria una più accurata impostazione del problema.

Appare infatti chiaro che il metodo suggerito da Penrose per la stima diretta della « fitness », è capace di dare risultati attendibili solo quando vengano rispettate alcune circostanze; in particolare: 1° quando i dati siano stati raccolti con « accertamento completo » <sup>(5)</sup>; 2° quando la popolazione sia più o meno in equilibrio per il gene considerato; 3° quando la perdita

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1955.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVI, fasc. I, pp. 141-146 e 298-302 (1954).

(2) L. S. PENROSE, « Annals of Eugenics », Lond., 14, 301 (1949).

(3) Cfr. G. MONTALENTI, « Atti del IX Congresso Internazionale di Genetica », Belgio, Italia, Suppl. al vol. VI di « Caryologia » (1954).

(4) L. S. PENROSE, « Lancet », ii, 425 (1950).

(5) Si traduce con questa espressione quella inglese « complete ascertainment » che viene riferita ai dati raccolti con completezza d'informazione, senza incorrere cioè in sistematici errori di selezione.



fetale e la fecondità siano eguali, nei genotipi messi a confronto, poiché solo quando il vantaggio selettivo si stabilisca tra la nascita e l'età riproduttiva, esso può venire espresso in termini del rapporto delle frequenze genotipiche tra due generazioni successive.

Riesaminando dunque i dati riportati nella tabella II della Nota precedente <sup>(6)</sup>, è subito chiaro che essi non rispondono a tali requisiti. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che tali dati non furono raccolti « con accertamento completo », in quanto la proporzione degli individui non esaminati (e perciò non riportati in tale tabella) non era costante per i diversi tipi d'incrocio, specialmente nella popolazione dei figli.

A questo punto, piuttosto che indugiarsi a discutere la possibilità di correggere i dati di cui sopra per l'errore sistematico di selezione da cui sono affetti, si propone di riprendere in considerazione il problema della stima della « fitness » servendosi di un collettivo di dati più omogeneo e perciò più adatto allo scopo. È opportuno descrivere qui accuratamente le caratteristiche della popolazione cui ci si riferisce.

Si tratta di un collettivo di dati relativi a 10 piccoli centri del Ferrarese di cui alla Tabella II da Montalenti e coll. (1953) <sup>(7)</sup> (da Codigoro a Lagosanto incluso) e alla Tabella III della Nota I, già pubblicata <sup>(8)</sup> su questi « Rendiconti ». Tali dati, che vengono riprodotti nella Tabella I, si possono considerare raccolti con accertamento completo solo per quanto riguarda la distribuzione dei diversi genotipi tra i genitori <sup>(9)</sup>; per i figli si hanno invece informazioni incomplete e limitate a solo quattro villaggi (Codigoro, Mezzogoro, Caprile, Pomposa); si conosce tuttavia il numero totale dei figli per ciascun tipo d'incrocio attraverso lo spoglio delle schede anagrafiche comunali <sup>(10)</sup>.

Inoltre grazie alle numerose ricerche precedenti e dai dati stessi relativi ai quattro villaggi su menzionati <sup>(11)</sup>, risulta chiaro che in ogni tipo di incrocio e indipendentemente dall'età dei genitori e dei figli, le segregazioni osservate concordano pienamente con l'ipotesi mendeliana di un gene dominante monomero.

Pertanto, sulla base dei dati raccolti con accertamento completo (numero dei diversi tipi d'incrocio e totale dei figli per ciascun tipo), si è cercato di ricostruire quella che sarebbe stata la distribuzione dei vari geno-

(6) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVI, fasc. 1, p. 301 (1954).

(7) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XIV, fasc. 2, p. 186 (1953).

(8) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVI, fasc. 1, p. 144.

(9) Infatti la distribuzione dei vari genotipi nella popolazione adulta fu determinata da Silvestroni e Bianco invitando tutte le coppie di coniugi esistenti in ciascuna località e sottoponendole ad esame ematologico. L'invito veniva rivolto attraverso le autorità comunali e la composizione delle famiglie veniva conosciuta dallo spoglio delle schede anagrafiche.

(10) Nel numero totale dei figli non è compreso il numero degli aborti che comunque risulta praticamente uguale nei diversi tipi d'incrocio. Cfr. MONTALENTI e coll. (7); Tabella III, p. 187.

(11) Per una completa rassegna bibliografica si rinvia alla monografia di MONTALENTI di cui alla nota (3).

tipi nella popolazione dei figli, se fosse stato possibile raggiungere anche per quest'ultimi la stessa completezza d'informazione. Per l'indagine si è infine preferito di scegliere soltanto le famiglie complete <sup>(12)</sup> allo scopo di permettere realmente un confronto tra due generazioni successive.

TABELLA I.

Dati 1951 e 1952: famiglie complete: (con genitrici al di sopra dei 40 anni)						
Tipo d'incrocio	N° di famiglie	N° medio dei figli	Probabile distribuzione dei diversi genotipi secondo le leggi di Mendel			
			<i>mm</i>	<i>Mm</i>	<i>MM</i>	Totali
<i>mm</i> × <i>mm</i>	1886 (1888,95)	4.89 ± 0.138	9217	—	—	9217
<i>Mm</i> × <i>mm</i>	793 (787,13)	5.02 ± 0.217	1989	1989	—	3978
<i>Mm</i> × <i>Mm</i>	79 (81,92)	4.99 ± 0.749	98.5	197	98.5	394
	2758		11304,5 (11339,15)	2186 (2138,69)	98.5 (101,16)	15389

$\chi^2$  per la selezione matrimoniale: 0.1518; g. l. = 1;  $P > 0.70$

$\chi^2$  per la deviazione dalla legge di Hardy tra i figli: 1.2224; g. l. = 1;  $0.30 > P > 0.20$

Per quanto viene riportato nella Tabella I si può concludere:

- 1° che la popolazione dei genitori s'incrocia a caso;
- 2° che, quando le segregazioni mendeliane sono rispettate, la ripartizione dei tre genotipi tra i figli non si discosta significativamente dalle frequenze attese secondo la legge di Hardy;
- 3° che la fecondità dei vari tipi d'incrocio sembra essere praticamente la stessa.

Assumendo pertanto che la popolazione in oggetto sia in equilibrio nei confronti del gene *M* si può ora calcolare nuovamente, in base alle formule di Penrose, i valori di «fitness» attesi per i genotipi *mm* e *Mm* per una frequenza genica di circa 0.09 come nella generazione parentale. Tali valori attesi vengono riportati nella Tabella II accanto a quelli stimati direttamente con il criterio già precedentemente usato.

(12) Come già si è fatto per studiare la fecondità nei diversi tipi d'incrocio (cfr. nota <sup>(8)</sup>) sono state considerate «complete» le famiglie con genitrici al di sopra dei 40 anni, si può in tal modo essere abbastanza sicuri che il ciclo riproduttivo sia terminato e che pertanto tali famiglie non siano suscettibili di variazioni nel numero dei figli.

TABELLA II.

*Stima diretta della « fitness » per i diversi genotipi dai dati di cui alla tabella I.*

Genotipo	Frequenza tra 5516 genitori (a)	Frequenza tra 13589 figli (b)	Stima diretta della « fitness » (a/b)	Valore teorico per l'equilibrio ( $M = q = 0.09$ )
<i>mm</i> . . . . .	0.8276	0.8319	0.994	$1 - kq^2 = 0.990$
<i>Mm</i> . . . . .	0.1724	0.1609	1.071	$1 + kpq = 1.099$
<i>MM</i> . . . . .	0.0000	0.0072	0.000	$1 - kp^2 = 0.000$

Dalla tabella II si ricava dunque che il genotipo *Mm* sembra presentare un valore di « fitness » superiore a quello degli *mm*, ma non sufficiente comunque a consentire l'equilibrio genico nel corso delle generazioni. Il vantaggio stimato degli *Mm* sugli *mm* è infatti dell'ordine del 7 %; quello richiesto per l'equilibrio, dell'11 %.

Tutto ciò potrebbe sembrare in contrasto con il dato di fatto che in alcune popolazioni, come per esempio quella studiata, la frequenza genica si mantiene ancora ad un livello molto elevato. Una situazione del genere potrebbe forse trovare una spiegazione ammettendo l'esistenza di una pressione selettiva contro gli *mm* e un eterosi per gli *Mm* solo fino a 50-60 anni or sono; il decremento nella frequenza degli *Mm* osservato nella popolazione presa in considerazione nel corso delle due generazioni studiate è infatti dello stesso ordine di grandezza di quello atteso per un meccanismo di selezione totale contro l'omozigote *MM* e senza eterosi a favore degli *Mm*.

Alcune circostanze, come l'elevata incidenza della malaria nelle provincie del Ferrarese fino a 50-60 anni or sono e la peculiare distribuzione degli *Mm* nei dati della Tabella III, sembrano favorire particolarmente tale ipotesi.

Dalla tabella III si deduce che la distribuzione degli *Mm* nelle varie età non è significativamente diversa ma colpisce tuttavia il fatto che la loro frequenza decresca uniformemente dai 30 anni ai 50, e vada accrescendosi invece dai 60 ai 90 anni: tale distribuzione è appunto compatibile con l'ipotesi che la malaria - endemica nella zona fino a 50 anni or sono - abbia potuto agire da fattore selettivo a favore degli *Mm*. L'idea che una anomalia ematologica come la microcitemia sia capace di conferire una sorta di protezione contro una malattia come la malaria non è poi così assurda a concepirsi dopo la dimostrazione, data da Allison (1954)<sup>(13)</sup>, della reale esistenza di un analogo meccanismo di protezione negli eterozigoti per il gene della falcemia, altro autosomico sub-letale in condizione omozigote.

(13) C. A. ALLISON, « *Annals of Hum. Genetics* », Lond., 19, 39 (1954).

TABELLA III.

*Frequenza degli mm e degli Mm nelle varie età. Dati relativi alla popolazione di genitori di Codigoro, Mezzogoro, Pomposa, Caprile e Lagosanto (da Silvestroni e Bianco, 1951 e 1952)<sup>(14)</sup>.*

Genotipo	Età							Totali
	> 30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	
<i>mm</i> . . .	1836	1931	1843	1051	589	209	9	7468
<i>Mm</i> . . .	387	374	338	212	132	45	2	1492
‰ <i>Mm</i> .	17.4	16.2	15.5	16.8	18.7	17.7	18.2	
	2223	2305	2181	1263	721	254	11	8958

$\chi^2$  per l'eterogeneità nella distribuzione degli *Mm* secondo l'età = 4.17; g. l. = 6;  $P > 0.5$

È opportuno notare a proposito che tutte le zone dove si rileva tuttora un elevata frequenza del gene *M* sono state un tempo fortemente malariche, per quanto sia anche vero che aree colpite per lungo tempo dalla malaria siano oggi del tutto o quasi prive di microcitemici. Tutto ciò può ancora essere d'accordo con l'ipotesi predetta in quanto è noto che la pressione di selezione (specialmente se modesta come nel caso presente per il quale si è visto che la « fitness » degli *Mm* dovrebbe essere solo 1.11 volte quella degli *mm*) può avere effetto solo a partire da determinati livelli critici di frequenza genica: è perfettamente compatibile con l'ipotesi che nel gioco delle fluttuazioni casuali di frequenza genica tale livello critico sia stato raggiunto in alcune zone malariche (Ferrarese, Sardegna, Sicilia) e non in altre (Maremma toscana, campagna romana, Puglie). Non è da escludere poi che fenomeni di migrazione collettiva, non certo rari nella storia delle popolazioni del Mediterraneo, possano aver avuto la loro importanza.

È chiaro comunque che il problema è ancora lungi dall'essere risolto e che una più completa serie di dati e di informazioni statistiche e sperimentali sono necessarie per tentare di risolvere questo interessante problema di genetica della popolazione umana.

(14) Cfr. MONTALENTI, nota (3).

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Giordani rivolge un pensiero di reverente omaggio alla memoria di Albert Einstein, morto il 18 aprile c. a., che l'Accademia ha avuto l'onore di annoverare tra i suoi più illustri Soci Stranieri e, a nome di tutti i Colleghi, si associa all'universale cordoglio per la scomparsa del grande scienziato che, con la sua geniale opera, ha dato al progresso degli studi fisico-matematici contributi di inestimabile valore.

Il Presidente comunica poi che un altro grave lutto ha colpito la Classe per l'improvvisa morte, avvenuta il 28 aprile u. s., del Socio Nazionale Mario Tenani, della Categoria II (Sezione Geodesia e Geofisica).

Il prof. Giordani, dopo aver ricordato con commosse parole che il compianto Collega gli era stato accanto, fino a pochissimi giorni prima della morte, nella Commissione per il Premio Nazionale di Categoria e aveva partecipato ai lavori della Commissione stessa con una scrupolosità ed una energia veramente ammirevoli, propone alla Classe di designare, per la commemorazione del prof. Tenani, alla cui memoria invia un reverente saluto, il Collega Caloi.

La proposta del Presidente è accolta all'unanimità.

Il Socio Dore comunica ai Colleghi la dolorosa notizia della morte del Socio Corrispondente prof. Antonio Renato Toniolo il quale, pur appartenendo alla Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, può anche essere considerato, dal punto di vista scientifico, un naturalista.

Il prof. Dore propone pertanto che la Classe di Scienze Fisiche si associ al lutto dei Colleghi delle Scienze Morali per la perdita del valoroso studioso.

La proposta è accolta all'unanimità.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Giordani è lieto di presentare alla Classe il fascicolo speciale (vol. X, nn. 11 e 12, novembre-dicembre 1954) di « Igiene e Sanità pubblica », dedicato al Socio Dante De Blasi, insieme al « curriculum vitae » del Professore stesso, estratto dalla predetta rivista.

Il prof. Giordani, mentre si congratula vivamente con il Collega De Blasi, è lieto di rendere omaggio, a nome della Classe, all'illustre Maestro e all'amico carissimo che seppe unire ai fastigi della cattedra e della sperimentazione anche l'alacre e difficile operosità del realizzatore nel campo organizzativo dell'igiene e della sanità pubblica.

La Classe si associa con un vibrante applauso.

Il Socio Rondoni presenta la sua relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale di Milano per lo studio e la cura dei tumori per l'anno 1954 e un numeroso gruppo di lavori, alcuni dei quali suoi, riguardanti ricerche



sperimentali, anatomo-patologiche e cliniche, svolte dal personale scientifico del predetto Istituto.

Il Presidente Giordani ringrazia il Socio Rondoni e si rallegra vivamente con lui per la poderosa attività svolta dall'Istituto Nazionale di Milano per lo studio e la cura dei tumori.

Il Socio Polvani, a nome dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica, presenta, dell'Edizione Nazionale dell'«Epistolario» di Alessandro Volta, il V volume, contenente lettere e documenti che vanno dal 1° luglio 1805 al 5 marzo 1827, giorno della morte di Volta.

Il Socio Polvani, illustrando il contenuto del volume, fa notare come esso, oltre che per gli argomenti scientifici trattati (tra i quali principali sono il «galvanismo», la formazione della grandine, il comportamento dei vapori ecc.) abbia notevole interesse anche perché fornisce moltissime notizie circa un periodo - quale quello coperto dal volume - denso di vicende storiche di eccezionale importanza sia per l'Europa sia per l'Italia.

Con questo volume si chiude l'«Epistolario». Ad esso seguirà un'«Aggiunta», destinata a raccogliere quegli scritti di Volta e quei documenti notevoli a lui relativi che, già conosciuti, non hanno, per il loro carattere, trovato posto nelle «Opere» o nell'«Epistolario» o che sono venuti a conoscenza della Commissione dopo la pubblicazione di quelle e di questo. Un ultimo volume, infine, sarà dedicato agli «Indici».

Il Socio Polvani ricorda che cinquantadue anni sono passati da quando l'Accademia Nazionale dei Lincei e l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere costituirono la Commissione incaricata della pubblicazione degli scritti voltiani e che, dei membri originariamente appartenenti a tale Commissione, il solo ancora vivente è l'illustre Socio Carlo Somigliana il quale, nonostante i suoi 95 anni, partecipa ancora, valido di membra e di mente, ai lavori della Commissione stessa, ai quali dedica il più assiduo interessamento.

Il Socio Polvani conclude, ricordando in modo particolare il prof. Francesco Massardi, che ha compilato, ordinato e curato gli ultimi cinque volumi delle «Opere» e i cinque dell'«Epistolario» e che ha sempre atteso a questa sua fatica voltiana, ininterrottamente dal 1925 ad oggi, con una passione, una meticolosità, uno zelo ed una alacrità che destano veramente ammirazione, specie considerando che in questi ultimi anni la gravezza dell'età ha cercato, inutilmente, di essergli di remora.

Il Socio Polvani propone pertanto che la Classe formuli un voto di plauso per il prof. Massardi e che la Presidenza, qualora la proposta sia accolta, voglia tramettere il voto all'interessato.

La proposta è accolta all'unanimità e il Presidente prof. Giordani, mentre prega il Socio Polvani di rendersi interprete del più vivo ringraziamento dell'Accademia presso l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e la Società Italiana di Fisica, assicura che sarà lieto di adempiere il mandato conferitogli dai Colleghi.

Il Socio Polvani vivamente ringrazia.

Il Segretario Accademico presenta quindi le opere inviate in omaggio all'Accademia.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe che l'Associazione degli Ingegneri Italiani in Argentina, denominata «Leonardo da Vinci», ha richiesto alla Presidenza dell'Accademia l'invio in omaggio di tutte le pubblicazioni accademiche che sono molto ricercate in Argentina, sia da lettori italiani che da studiosi locali.

Il prof. Giordani chiede alla Classe se si debba aderire alla richiesta della «Leonardo da Vinci» e la Classe, ad unanimità, si pronuncia favorevolmente circa l'invio in omaggio delle pubblicazioni della Classe stessa.

Il Presidente informa quindi i Colleghi del contenuto di una lettera inviata al Presidente della Società Italiana di Fisica e, per conoscenza, all'Accademia, dal sig. L. Sandonnini, il quale formula delle osservazioni in merito alle teorie di Einstein, e di un'altra lettera, indirizzata all'Accademia dall'australiano sig. John Fistr, che dà notizia di alcune pretese scoperte sui campi magnetici molecolari di energia.

La Classe prende atto di tali comunicazioni.

### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Presidente presenta, per incarico del Collega Grandi, una Memoria dello stesso, dal titolo: «Gli insetti a regime specializzato ed i loro adattamenti morfologici».

Detta Memoria, trattandosi di un lavoro di un Socio, non richiede l'esame da parte di apposita Commissione e sarà quindi sottoposta soltanto al Consiglio di Presidenza per l'approvazione della spesa.

Il prof. Giordani presenta anche, per incarico del Collega Meneghetti, una Memoria dei dott. P. Benigno, P. Visentini e V. Franceschini, dal titolo: «Influenza dell'ossitettraciclina sul metabolismo proteico dell'*E. Coli* in stasi riproduttiva e di sviluppo».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dal predetto Socio Meneghetti e dai Colleghi Pupilli e Vernoni.

Il Socio Picone presenta una Memoria del dott. Marino dal titolo: «Sulla risposta delle strutture elettriche filtranti ideali a forme d'onda rappresentabili con la trasformata di Fourier».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso prof. Picone e dal Collega Vallauri.

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci: Cambi, Zagar, Severi, Chisini, Tonzig, Cotronei, Majorana, Segre, Fantappiè, Picone, Rossi Fanelli e Margaria.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega Sansone, legge la relazione sulla Memoria del dott. Carlo Pucci dal titolo: «Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave» che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche.

Il Socio Zagar, anche a nome del Collega Abetti, legge la relazione sulla Memoria di Margherita Hack dal titolo: «Studio dell'atmosfera della cefeide FF Aquilae», che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche.

Entrambe le suddette relazioni sono messe ai voti dal Presidente e approvate all'unanimità.

## PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

### ELENCO DEI CONCORRENTI

#### CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI* ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1954 - Premio lire 1.000.000).

1. NICOLA ROLLO. — «L'Essenza del Moto di fronte ai due Principi della Termo Dinamica».

2. Prof. ing. MARIO ROSASPINA. — 1. «Contributo per la determinazione del corpo di aratro razionale». — 2. «I parametri della resistenza totale all'avanzamento dell'aratro». — 3. «Equazioni e rendimenti di alcuni meccanismi da torchio per uso enologico». — 4. «La meccanizzazione rurale fattore di industrializzazione della Sardegna». — 5. «La prevenzione degli infortuni agricoli e la meccanizzazione rurale».

#### PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA *ASTRONOMIA, GEODESIA E GEOFISICA*

(Scadenza 31 dicembre 1954 - Premio lire 1.000.000).

1. Prof. PIETRO CALOI. — 1. «La determinazione degli epicentri di terremoti lontani coi dati di una o più stazioni». — 2. «Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana». — 3. «Nuova onda a lungo periodo oscillante nel piano principale: sue caratteristiche e confronto con l'onda G». — 4. «Sulle profondità ipocentrali, con particolare riguardo ai terremoti delle Prealpi Carniche (8 giugno 1934) e del Lago di Costanza (31 gennaio 1935)». — 5. «Il terremoto adriatico del 30 novembre 1934» — 6.

« Sur une onde longue oscillant dans le plan principal ». — 7. « Ricerche su terremoti ad origine vicina. Scosse del Cansiglio del 18 ottobre 1936 ». — 8. « Analisi periodale delle onde sismiche e problemi ad essa connessi ». — 9. « Tempi di tragitto per terremoti ad origine vicina ». — 10. « Nuovi metodi per la determinazione delle coordinate epicentrali e della profondità ipocentrale di un terremoto ad origine vicina ». — 11. « Terremoto dell'Appennino Tosco-romagnolo dell'11 novembre 1939 ». — 12. « Sopra un nuovo metodo per calcolare le profondità ipocentrali ». 13. « Sui terremoti ad ipocentro molto profondo ». — 14. « Caratteristiche sismiche dell'Appennino Tosco-romagnolo ». — 15. « Sopra alcuni sistemi di onde sismiche. . . ». — 16. « Determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto ad origine vicina con i tempi delle onde longitudinali e trasversali dirette ». — 17. « Onde sismiche superficiali e loro assorbimento da parte del mezzo ». — 18. « Attività sismica in Italia nel decennio 1930-39 ». In appendice: « Edilizia asismica e reazione degli edifici e del sottosuolo alle sollecitazioni sismiche ». — 19. « Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e la velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette ». — 20. « Caratteristiche sismiche fondamentali dell'Europa centrale, quali risultano dallo studio di 17 terremoti centro-europei ». — 21. « Epicentro e profondità ipocentrali del terremoto di Salò del 24 gennaio 1943 (La prima superficie di discontinuità in corrispondenza della Val Padana) ». — 22. « Sulla propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso indefinito ». — 23. « Sulla determinazione delle coordinate di un terremoto ad origine vicina con i dati di quattro stazioni ». — 24. « Onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, stratificato ». — 25. « Sull'origine delle onde superficiali associate alle onde S, SS, SSS, . . . ». — 26. « Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico, indefinito ». — 27. « Il terremoto del Turkestan del 2 novembre 1946 » (in collaborazione con il dott. Peronaci). — 28. « Onde superficiali associate alle onde S, SS, . . . nel terremoto del Turkestan del 2 novembre 1946 » (in collaborazione con il dott. Peronaci). — 29. « Agitazioni microsismiche originate da attività vulcaniche ». (in collaborazione con A. Lo Surdo e G. Ponte). — 30. « Ancora sulle onde di tipo superficiale associate alle S, SS, . . . nel terremoto del Turkestan del 2 novembre 1946 » (in collaborazione con il dott. F. Peronaci). — 31. « Due caratteristici tipi di microsismi ». — 32. « Sismologia ». — 33. « Terremoto ». — 34. « Comportement des ondes de Rayleigh dans un milieu firmo-élastique indéfini ». — 35. « Sur l'origine des ondes de type superficiel, associées aux ondes S, SS, SSS. . . ». — 36. « Ondes de type superficiel associées aux ondes S, SS, . . . dans le tremblement de terre du Turkestan du 2 novembre 1946 ». — 37. « Effetti dell'attrito interno sulla velocità delle onde sismiche superficiali a brevissimo periodo ». — 38. « Sull'origine dei microsismi con particolare riguardo all'alto Adriatico. — 39. « Studio del terremoto delle isole Lipari del 13 aprile 1938 ». — 40. « Teoria delle onde di Rayleigh in mezzi elastici e firmo-elastici, esposta con le omografie vettoriali ». — 41. « Sur l'origine des microséismes ». — 42. « Sopra lo spessore dello strato delle onde Pg nell'Europa centrale ». — 43. « Sulla velocità di propagazione delle onde P\* e sullo spessore dello strato del granito nell'Europa centrale ». — 44. « Movimento iniziale delle onde sismiche e natura fisica della scossa ». — 45. « Sull'attrito interno nella crosta terrestre ». — 46. « Sulla velocità di propagazione delle onde superficiali in corrispondenza dell'Atlantico » (in collaborazione con L. Marcelli e G. Pannocchia). — 47. « Il battismo del 28 agosto 1946 e la profondità del nucleo terrestre » (in collaborazione con F. Peronaci). — 48. « Ancora sulla velocità di propagazione delle onde superficiali per tragitti subatlantici. Tentativo di prospezione profonda del bacino Atlantico, mediante le curve di dispersione delle onde L » (in collaborazione con L. Marcelli e G. Pannocchia). — 49. « Sulla superficie di discontinuità alla profondità di 950 km. » (in collaborazione con F. Peronaci). — 50. « Onde superficiali attraverso il bacino dell'Atlantico ». — 51. « Struttura geologico-sismica dell'Europa centro-meridionale, dell'Italia e del Mediterraneo centro-occidentale, quale risulta da recenti ricerche compiute in Italia ». — 52. « Onde longitudinali e trasversali guidate dall'Astenosfera ». — 53. « L'astenosfera come canale-guida dell'energia sismica ». — 54. « Ci, j ». — 55. « Onde sismiche guidate dagli strati superficiali ». — 56. « Prime indicazioni di registrazioni clinografiche ottenute in una zona ad elevata sismicità ». — 57. « Sulla ricerca di cariche elettriche nell'atmosfera ». — 58. « Ricerca di cariche elettriche



nell'atmosfera». — 59. «Oscillazioni del mare e perturbazioni della verticale apparente nel golfo di Trieste, durante il rapido transitare di alcuni cicloni attraverso l'alto Adriatico». — 60. «Il pendolo orizzontale come clinometro». — 61. «Interpretazioni geofisiche di misure geodetiche». — 62. «Osservazioni sismiche e clinografiche presso grandi dighe di sbarramento». — 63. «La prospection séismique appliquée à la détermination de l'épaisseur du glacier (glacier de la Marmolada)». — 64. «Sul decadimento del modulo elastico in roccia a contatto con bacini idroelettrici». — 65. «Il comportamento delle grandi dighe dal punto di vista geofisico». — 66. «Sesse dell'alto Adriatico, con particolare riguardo al golfo di Trieste». — 67. «Notevoli onde interne (sesse termiche) nel Lago di Garda». — 68. «Le sesse del lago di Garda - Parte I». — 69. «Le sesse del lago di Garda - Parte II». — 70. «Le sesse del lago Maggiore. Parte I» (in collaborazione con M. De Panfilis, M. Giorgi e F. Peronaci). — 71. «Sui periodi di oscillazione libera del Verbano». — 72. «Le sesse del lago di Garda. Parte III». — 73. «Oscillazioni libere del golfo di Napoli» (in collaborazione con L. Marcelli). — 74. «Sui possibili modi d'oscillazione libera del lago di Bracciano». — 75. «Oscillazioni libere del lago di Levico». — 76. «Ulteriore studio sulle oscillazioni, libere del lago di Scanno» (in collaborazione con D. Di Filippo e M. C. Spadea). — 77. «Sulle oscillazioni libere del lago di Albano» (in collaborazione con M. Giorgi). — 78. «Sulle oscillazioni libere del lago di Caldonazzo» (in collaborazione con M. C. Spadea). — 79. «Su una questione di idrodinamica concernente il lago di Garda». — 80. «Oscillazioni libere dei laghi di Caldonazzo e di Levico». — 81. «Le sesse del lago di Garda. Parte IV». — 82. «Oscillazioni libere del lago di Garda».

N. B. - Di ogni pubblicazione sono unite 5 copie; escluse le pubblicazioni 1, 6, 15, 20, 42, 51, 57 e 63 inviate in triplice copia e le pubblicazioni 16, 30, 31 e 78 inviate in duplice copia.

#### PREMIO FRANCESCO VERCELLI

(Scadenza 31 dicembre 1954 - Premio lire 100.000).

1. Ing. CAMILLO CONTINI. — «La diffrazione nei rilievi sismici a riflessione».
2. PIETRO DOMINICI e FRANCO MARIANI. — «Alcune osservazioni critiche sulla regione F della ionosfera».
3. Prof. CAMILLA FESTA. — 1. «Sulla fissione spontanea dell'uranio terrestre». — 2. «Sulla possibilità di reazioni a catena nella crosta terrestre». — 3. «Sulla abbondanza originaria del K 40».
4. Dott. FERRUCCIO MOSETTI. — «Principi sui filtri per le onde microbariche».
5. Prof. SILVIO POLLI. — 1. «L'attuale aumento del livello del mare lungo le coste del Mediterraneo». — 2. «Il graduale aumento del livello del mare lungo le coste italiane». — 3. «Misure dei lenti movimenti verticali della superficie terrestre». — 4. «Gli attuali movimenti verticali delle coste continentali». — 5. «L'attuale deformazione della crosta terrestre». — 6. «Le maree all'isola di S. Andrea nell'Adriatico centrale». — 7. «Costanti armoniche e non armoniche delle maree di Porto Piave Vecchia e Cavallino». — 8. «Costanti armoniche e non armoniche delle maree di 4 località della laguna di Venezia». (Paliaga, Torcillo, Torson di Sotto. — 9. «Le maree a Porto Marghera». — 10. «Tabelle di previsione delle maree per i porti dell'Adriatico settentrionale per l'anno 1954. — 11. «Propagazione della marea nella laguna di Venezia». — 12. «Fotometria subacquea nel lago di Molveno». — 13. «Ricerche di fotometria subacquea nei laghi di Caldonazzo e di Levico». — 14. «Ricerche fotometriche subacquee nel lago Scurò». (Adamello). — 15. «I laghi Ghiacciato e Rotondo del Mandrone». — 16. «Ricerche di fotometria subacquea nelle acque della laguna di Venezia». — 17. «Assorbimento delle radiazioni luminose e calorifiche nella Ulva Lactuca e nella Gracilaria confervoides della laguna di Venezia». — 18. «Riflessione ottica di una superficie marina in condizioni naturali». — 19. «Penetrazione delle radiazioni luminose nel ghiaccio e nella neve». — 20. «Le sesse dei laghi di Caldonazzo e di Levico». — 21. «Sul sistema: Precipitazione-ghiaccio-deflusso». — 22. «Stato attuale del



ghiacciaio del Mandrone (Adamello) e fattori climatici». — 23. «Criteri di realtà fisica per un ciclo climatico». — 24. «Il ciclo climatico di 8 anni e sua realtà fisica».

6. Prof. PAOLO VALLE. — 1. «Sul gradiente adiabatico di temperatura nell'interno della terra». — 2. «Effetti dell'attrito interno sulla propagazione delle onde di Love». — 3. «Contributo allo studio delle onde di Love». — 4. «Il terremoto Jonico del 22 aprile 1948». — 5. «Sull'andamento di temperatura nel mantello della terra per compressione adiabatica». — 6. «Sulla struttura della crosta terrestre nel Mediterraneo centro-occidentale e nell'Adriatico». — 7. «Una relazione diretta fra la velocità delle onde elastiche e la densità nell'interno della Terra». — 8. «Una equazione di stato per i solidi». — 9. «Sull'omogeneità e sullo stato di equilibrio del mantello interno della Terra». — 10. «Sulle proprietà elastiche del mantello interno della Terra».

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta dell'II maggio 1955*

BAZZI B. e SANTI R. — *Ricerche chimiche e biologiche su oli derivanti da olive trattate con un formulato antidacico a base di Parathion*. Milano, Società Montecatini, s. d. Pp. 22, in-8°, con figg.

BOSCHI Valentino e VICINI Corrado. — *I terreni del comprensorio dell'ex-bosco della Saliceta nel Comune di Camposanto (Modena)*. S. n. t. Pp. 26, in-8°, con tavv.

CONGRÈS (V) INTERNATIONAL DE LA SCIENCE DU SOL. — *Communications*. Moskva, 1954. Fascicoli 8, in-8°.

CONVEGNO (III) NAZIONALE SULLE UTILIZZAZIONI DEL METANO. — *Atti*. Piacenza, 9-10-11 settembre 1954 (3<sup>a</sup> Mostra Nazionale del Metano. Piacenza, 9-19 settembre 1954). Piacenza, Soc. Tip. Ed. Porta, 1955. Pp. 360, in-8°, con tavv.

DRAGHETTI Alfonso. — *Concetto e basi teorico-pratiche dell'irrigazione dosata*. Modena, Società Tip. Modenese, 1954. Pp. 13, in-8°.

— *L'irrigazione razionale come fattore agronomico dell'incremento della produzione*. Estr. dal numero unico «Vomer».

— *Il letame artificiale: importanza e tecnica di preparazione*. Estr. da «Genio Rurale», a. XVII, 1954, nn. 7-8.

— *Per incrementare la produzione delle aziende è indispensabile conoscere il loro terreno*. Estr. da «Terra Pugliese», a. III, 1954, n. 1.

— *Premessa per l'impiego razionale del perfosfato minerale*. Estr. da «Mondo Agricolo», 1953, n. 45.

DRAGHETTI Alfonso. — *I sistemi dell'irrigazione di soccorso estiva con particolare riguardo all'irrigazione delle terre argillose*. Estr. da «Atti del 2° Convegno Internazionale per la irrigazione a pioggia. Verona 11-12 agosto 1953».

ESCANDE M. Léopold. — *Notice sur les travaux scientifiques*. Toulouse, Édouard Privat, 1953. Pp. 152, in-8<sup>a</sup>, con figg.

FANTOLI Amilcare. — *La media normale delle piogge di Tripoli*. Estr. da «Libia», vol. IV, a. II, 1954.

— *Il problema della produzione della pioggia artificiale*. Estr. da «L'Acqua», 1955, nn. 1-2, gennaio-febbraio.

— *I valori medii della temperatura in Libia*. Estr. da «Bollettino della Società Geografica Italiana», 1954, nn. 1-2.

GIORDANI Francesco. — Vedi: MURPHREE Eger V.

«*Igiene e Sanità Pubblica*». Rivista Mensile, Scientifico-Pratica. Vol. X, 1954. nn. 11-12 (Fascicolo speciale in onore di S. E. Dante De Blasi).

IMBRIGHI Gastone. — *Osservazioni geomorfologiche sull'isola Palmaria a sud-est di Porto Venere (Liguria)*. Estr. da «Memorie Geografiche della Facoltà di Magistero dell'Università di Roma», vol. I, 1954.

— *Il prof. Egidio Feruglio*. Estr. da «Memorie Geografiche della Facoltà di Magistero dell'Università di Roma», vol. I, 1954.

ISTITUTO NAZIONALE PER LO STUDIO E LA CURA DEI TUMORI. MILANO. — *Pubblicazioni*. (Volume Miscellaneo).

- MURPHREE Eger V. — *Impieghi pacifici della energia atomica. (The atom in peace)*. Conferenza tenuta a Roma il 25 gennaio 1955 sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Presentazione del prof. Francesco Giordani. A cura dell'Ufficio Stampa della Esso Standard Italiana, Pp. 31, in-8°, con tavv.
- OCAMPO Sixto. — *Un error trascendental de la mecánica*. Estr. da «Ibérica», 1955, nn. 297-299.
- PASQUINI Diego. — *Ricerche intorno all'influenza dell'aria compressa sulla germinazione dei semi di alcune piante culturali*. S.n.t. Pp. 26 in-8°.
- SANGIORGI Giuseppe. — *Curriculum vitae di S. E. il prof. Dante De Blasi, Accademico Pontificio e dei Lincei*. Estr. da «Igiene e Sanità Pubblica», vol. X, 1954, nn. 11-12.
- SANTI R. — Vedi: BAZZI B. e SANTI R. SIERPIŃSKI Waclaw. — *Trójkąty Pitagorejskie*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954. Pp. 94, in-16° (Monografie Popularnonaukowe Matematyka).
- VICINI Corrado. — Vedi: BOSCHI Valentino e VICINI Corrado.
- VILLAR G. E. — *El aprovechamiento de la energía atómica*. Estr. da «Revista de Ingeniería», 1954, nn. 551, 552, 554, 555, 556, 558.
- VOLTA Alessandro. — *Epistolario*. Edizione Nazionale sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica. Bologna, N. Zanichelli, 1955. Pp. xxv-564, in-4°, con tavv.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

---

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE  
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 13 giugno 1955*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geodesia.** — *Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche.* Nota (\*) del Socio CORRADINO MINEO.

Da parecchi anni il Marussi, già ingegnere geografo dell'Istituto Geografico Militare e ora professore di geodesia nella Facoltà di Scienze di Trieste, mira a un rinnovamento *ab imis fundamentis* della disciplina. Le mete sono: studio intrinseco della vera struttura locale del «geoide», non limitandosi alla semplicistica ipotesi ellissoidica e anzi estendendo le misure a tutto lo spazio esterno a una superficie d'equilibrio esteriore della Terra; generalizzazione a una superficie qualunque d'importanti teoremi, dimostrati, secondo il Marussi, soltanto per l'Ellissoide terrestre; caratterizzazione, per mezzo del Calcolo tensoriale, delle proprietà delle rappresentazioni affini d'una superficie su di un'altra, tanto importanti in cartografia. Tuttociò in numerosi scritti apparsi anche in questi «Rendiconti».

Non è facile seguire l'autore nelle sue costruzioni, giacché tra l'altro non si capisce se egli voglia farsi intendere più dai geometri tensorialisti che dai geodeti, i quali per lo più, e non senza ragione, procedono terra terra. Pure è necessario di vedere se ci sia qualcosa d'accettabile nelle novità che il Marussi, con tanta insistenza, proclama e cerca di divulgare.

1. GEODESIA INTRINSECA. — Non sto a dire quel che intenda in generale il Marussi per geometria *intrinseca*. Egli dice per esempio: «La geometria intrinseca di una superficie ha riguardo allo studio di questa facendo riferimento ai soli elementi misurabili da un essere ipotetico costretto a stare

(\*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1955.

su di essa; ... ». Ma se volessi notare tutte le improprietà di linguaggio del Marussi, dovrei scrivere più pagine ch'egli non abbia scritto nelle sue Note; il che, oltre che impossibile, sarebbe terribilmente pedantesco.

Veniamo rapidamente *ad rem*. Il principio del quale, in fondo, si serve il Marussi, è il seguente. Supposto che una assegnata superficie d'equilibrio contenga nel suo interno tutte le masse terrestri, il potenziale totale (newtoniano e della forza centrifuga) resta interamente determinato nello spazio esterno a essa, purché si conoscano la massa totale  $M$  del pianeta e la sua velocità angolare (costante)  $\omega$ . È un particolare problema di Dirichlet esterno, o problema dei « valori al contorno », che soltanto per contorni di determinati tipi topologici si sa risolvere. L'importanza di questo problema, quando si applichi al caso della Terra, fu primo lo Stokes a notarla, nel 1849. Ebbene, il Marussi non vuol fare ipotesi semplicistiche sulla natura geometrica d'una superficie d'equilibrio esteriore della Terra e se ne vuol stare sulle generali. Allora la *struttura* del « geoide » può esser quella d'una superficie chiusa e regolare, del tipo topologico di quelle per le quali si sa risolvere il problema esterno di Dirichlet. E non so quanto questa conclusione astratta possa giovare al problema concreto della forma della Terra! Una ipotesi bisogna pur farla (non se ne può fare a meno, nella stessa matematica e nelle scienze sperimentali) <sup>(1)</sup>, molto più che essa è verificabile, cioè può essere cimentata con i fatti.

Comunque, chiamiamo  $W(x, y, z)$  il potenziale totale terrestre esterno: il Marussi vuol disporre di tutte le superficie  $W(x, y, z) = h$ , il cui parametro  $h$  prenda tutti i valori a cominciare da quello  $h_0$ , relativo alla superficie d'equilibrio di partenza <sup>(2)</sup>.

Ora, per conquistare alle misure tutto lo spazio esterno alla superficie di parametro  $h_0$ , come vuole il Marussi, basterà estendere a ogni punto di tale spazio la nozione di latitudine ( $\varphi$ ) e di longitudine ( $\lambda$ ) e considerare anche  $h$  come terza coordinata. Allora, rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali, il cui asse  $z$  coincida con l'asse del mondo, si avrà:

$$(1) \quad \varphi = \arcsen \frac{W_3}{g} \quad , \quad \lambda = \arctang \frac{W_2}{W_1} \quad , \quad h = W,$$

essendo  $W_i, W_{ij} \dots$  le derivate prime, seconde ... di  $W$  e

$$g = \sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}.$$

E sta tutto nel sistema (1) il problema. Questo sistema, sotto condizioni ben note, definisce un unico sistema di funzioni  $x, y, z$  delle variabili  $\varphi, \lambda, h$ ;

(1) Vedi POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion, 1920.

(2) Una superficie dunque a una quota di circa otto chilometri sul livello medio marino; ma si può pensare (qui non posso entrare in particolari) a una superficie d'equilibrio più vicina, parte interna alle masse terrestri, purché le masse esterne vengano con legge opportuna ridotte all'interno di essa.

le quali si riducono rispettivamente a  $x_0, y_0, z_0$  per  $\varphi = \varphi_0, \lambda = \lambda_0, h = h_0$ , purché il jacobiano

$$\frac{\partial(\varphi, \lambda, h)}{\partial(x, y, z)}$$

sia differente da zero nel punto iniziale considerato.

Si potranno calcolare le derivate di tutti gli ordini delle funzioni  $x, y, z$  rispetto a  $\varphi, \lambda, h$  (essendo  $W$  una funzione analitica di  $x, y, z$  nello spazio considerato). E quindi di ogni superficie delle tre famiglie

$$\varphi = \text{cost.}, \quad \lambda = \text{cost.}, \quad h = \text{cost.},$$

si potranno calcolare i coefficienti della prima e seconda forma differenziale quadratica (determinazione perfettamente intrinseca!). Ma ci sono anche metodi per calcolare le stesse funzioni  $x, y, z$  per *approssimazioni successive*, nell'intorno, s'intende, del punto iniziale  $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$ : il che è quello che più importa per la pratica.

O che la funzione  $W(x, y, z)$  s'intenda data analiticamente risolvendo un problema di Dirichlet o che s'intenda costruita per mezzo dei valori delle derivate seconde di  $W$ , determinati per mezzo d'una bilancia di torsione e d'un pendolo gravimetrico (e allora bisogna considerare anche sistemi locali da collegare tra loro e col sistema astronomico anzidetto), il sistema da risolvere in definitiva è il sistema (1), *se si vogliono le tre funzioni*  $x(\varphi, \lambda, h), y(\varphi, \lambda, h), z = z(\varphi, \lambda, h)$ . Ma il Marussi non accenna nemmeno al sistema (1); e poiché non c'è altra via per arrivare allo scopo, egli non può che brancolare nel buio senza cavare un ragno dal buco. Egli tira fuori le *omografie vettoriali* di Burali-Forti (si sa l'accoglienza avuta all'estero dalle unificate notazioni vettoriali a opera di questo autore, al quale purtroppo si unì il Marcolongo), le quali non hanno nulla a che fare con lo scopo della ricerca. Non si sa come da un sistema locale <sup>(3)</sup> passi alla determinazione della prima e seconda forma differenziale quadratica delle superficie  $\varphi = \text{cost.}, \lambda = \text{cost.}, h = \text{cost.}$  Fatto sta che le equazioni di Mainardi-Codazzi, date dal Marussi per le superficie  $\varphi = \text{cost.}$  e  $\lambda = \text{cost.}$ , sono errate (come si può vedere subito con semplici esempi); che, per le superficie  $h = \text{cost.}$ , non si hanno, contrariamente a quanto crede il Marussi, le equazioni di Mainardi-Codazzi date dal Mineo; che la condizione necessaria e sufficiente affinché il ripetuto sistema  $\varphi = \text{cost.}, \lambda = \text{cost.}, h = \text{cost.}$  sia un sistema triplo ortogonale, condizione che il Marussi crede di poter dare alla lesta (senza alcun bisogno dell'equazione a derivate parziali del 3° ordine alla quale deve soddisfare una delle funzioni  $\varphi, \lambda$  o  $h$ ) è del tutto campata in aria!!

(3) Il triedro coordinato d'un sistema locale ha l'origine in un punto della superficie  $W(x, y, z) = h_0$  e i tre assi sono la tangente alla linea cardinale est, la tangente alla linea cardinale nord e la normale alla superficie. Se  $\xi, \eta, \zeta$  sono le coordinate d'un punto qualunque del potenziale totale esterno  $\bar{W}(\xi, \eta, \zeta)$ , le derivate  $\bar{W}_1$  e  $\bar{W}_2$  sono nulle nell'origine. Per il potenziale  $W(x, y, z)$ , il caso  $W_1 = W_2 = 0$ , è da escludere; giacché in questo punto il sistema (1) non avrebbe senso.



Il Marussi ha esposto queste sue idee nell'occasione dell'Ottava Assemblée Generale dell'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale tenuta a Oslo nell'agosto del 1948 e più recentemente in una riproduzione *sic et simpliciter* negli «Atti della Commissione Geodetica Italiana»<sup>(4)</sup>.

2. UN PROBLEMA FONDAMENTALE PER LA GEODESIA. - Data, su una superficie, una geodetica passante per A e B, si tratta di determinarne la così detta *deviazione* angolare dalla sezione normale in A passante per B. Il Marussi crede che la questione sia stata trattata soltanto per l'Ellissoide terrestre, ma non intrinsecamente, e, comunque, *non in modo tale da consentirne in particolare l'applicazione al geode*<sup>(5)</sup>. Ma l'argomento, che rientra in un capitolo di Geometria differenziale sulle geodetiche d'una superficie, è stato naturalmente trattato, *su una superficie qualunque*, oltre che dai classici della geometria, dal Minding (1849), dal Puiseux (1851), dal Weingarten (1862). ∴ E persino nell'aureo trattato di Calcolo infinitesimale di Cesàro il teorema è dimostrato con estrema brevità ed eleganza. Ma la dimostrazione del Marussi non è soltanto inutile: essa non è una dimostrazione. Egli, come tutti gli altri autori, avrebbe dovuto cominciare dalla superficie e precisare la sua *generalità*. Per contro, egli parte da una curva gobba dello spazio ordinario e scrive le formole di Frénet, che egli dice *generalizzate* (sono quelle solite che danno tutti i trattati di Calcolo) e aggiunge (apriti cielo!) che quelle formole le ha scritte in modo opportuno, *tenendo conto che la curva è geodetica* (di per sé, dunque, indipendentemente da una superficie alla quale appartenga: allora retta!). Delle coordinate di questa curva gobba, calcola le derivate fino a quelle del 4° ordine (e sarebbe stato pregio dell'opera di andare oltre!). E tutto è fatto, come se la deviazione possa discendere *illico et immediate* dalle formole di Frénet *generalizzate*. E così accade, non si sa come: la superficie fa una semplice apparizione verbale soltanto di straforo<sup>(6)</sup>!

3. PROPRIETÀ GENERALI DELLE RAPPRESENTAZIONI AFFINI TRA SUPERFICIE E IN PARTICOLARE DELLA CURVATURA TANGENZIALE DELLE TRASFORMATE DI CURVE DELLE SUPERFICIE STESSE. - L'autore vuol caratterizzare tensorialmente le varie rappresentazioni di una superficie su di un'altra conformi, equivalenti, geodetiche. E ciò, badiamo bene, *senza bisogno di conoscere le formole di corrispondenza*. Si può cominciare dal notare che I

(4) Vedi A. MARUSSI, *Fondamenti di Geodesia intrinseca*, 1951, Stamperia Tamburini, Milano.

(5) Vedi A. MARUSSI, *Determinazione dell'angolo fra la tangente in un estremo e la corrispondente sezione normale contenente l'altro estremo, per un arco finito di geodetica su di una superficie qualunque*, questi «Rendiconti», vol. XII, maggio 1952.

(6) La deviazione dipende naturalmente dalla lunghezza  $s$  dell'arco AB di geodetica e la sua parte principale è  $(s^2/6)\kappa\tau$ , essendo  $\kappa$  e  $\tau$  flessione e torsione della geodetica in A, ma per il Marussi questa parte principale è semplicemente  $\kappa\tau$ , *perchè  $s^2/6$  non appartiene alla superficie!*

rappresentazioni geodetiche non costituiscono un vero e proprio problema di rappresentazione, cioè un problema nel quale il dato siano le due superficie e l'incognita le formole di corrispondenza: si tratta invece di trovare una coppia di superficie tra le quali esista una trasformazione che cambia le geodetiche dell'una nelle geodetiche dell'altra. Il Marussi, che pure usa citare illustri incogniti, non dice nemmeno che questo speciale problema fu interamente risoluto dal Dini. Egli dichiara di porsi in una varietà a  $n$  dimensioni, ma avverte subito che nelle sue formole, dove gli indici vanno da 1 a  $n$ , si deve in realtà intendere che questa variabilità è limitata ai valori 1 e 2! Ma allora non può far altro che rappresentare una varietà (non euclidea) a due dimensioni su se stessa e non già su un'altra a due dimensioni; giacché in quest'ultimo caso deve dire che le due varietà sono immerse in uno spazio euclideo a tre dimensioni; e allora si tratta di rappresentare l'una sull'altra due comuni superficie dello spazio tridimensionale ordinario e lo sfoggio di indici da 1 a  $n$  è del tutto puerile.

Ma vediamo di seguire il Marussi <sup>(7)</sup>. Sia dunque

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

il tensore metrico della superficie obiettiva  $S$ , e

$$(3) \quad ds_1^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

quello della superficie immagine  $S_1$  (trasformato nelle stesse variabili della superficie obiettiva per mezzo delle formole di corrispondenza, che non abbiamo bisogno di conoscere!).

Il Marussi almanacca sui simboli di Christoffel di 2<sup>a</sup> specie rispetto alle forme (2) e (3), tira fuori formole, qualcheduna delle quali è errata, e finisce con lo scrivere l'eguaglianza

$$(4) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i & a \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i & g \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma_{rs}^i,$$

cercando di giustificarla. Ma chi appena comincia a balbettare di algebra tensoriale sa che per un cambiamento di variabili

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$$

i simboli di Christoffel di 2<sup>a</sup> specie si trasformano secondo la legge

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{r} & \bar{s} \\ \bar{i} & \bar{a} \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \rho & \sigma \\ \tau & \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^{\bar{s}}} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\tau} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \bar{x}^{\bar{r}} \partial \bar{x}^{\bar{s}}}.$$

Similmente per  $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{r} & \bar{s} \\ \bar{i} & \bar{g} \end{smallmatrix} \right\}$ ; e quindi, per differenza, andando via il termine con le derivate seconde, si ha la (4), che dice come il 1° membro sia un

(7) Vedi A. MARUSSI, *Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie*, questi « Rendiconti », vol. XVI, pp. 478-483 (1954).

tensore misto covariante rispetto a  $r, s$  e controvariante rispetto a  $i$ . Ebbene, dalla (4) devono discendere le proprietà caratteristiche delle rappresentazioni conformi, equivalenti e geodetiche!

Inutile seguire il Marussi nelle sue contrazioni (da  $T_{rs}^i$  si passa a  $T_{ri}^i$ ) e nei suoi passaggi ingarbugliati (o perché una formula viene mutilata perché usa la notazione d'una derivazione covariante, mentre si tratta d'una derivazione comune). La nota relazione caratteristica delle rappresentazioni conformi segue immediatamente dalla definizione di isogonia e quella delle rappresentazioni autaliiche segue da un noto teorema d'Algebra sulla costanza del rapporto dei discriminanti delle prime forme quadratiche delle due superficie. Le coppie di superficie in rappresentazione geodetica appartengono alla classe di Liouville, come ha dimostrato il Dini.

Quanto alla variazione della curvatura geodetica d'una curva obiettiva nel passare alla curva immagine, il problema si può ritenere risoluto. La curvatura geodetica delle curve  $\varphi = \text{cost.}$  è data dal parametro di 2° ordine  $\Delta_2 \varphi$  del Beltrami, calcolato rispetto alla 1ª forma quadratica della superficie (Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, Parte I. Zanichelli, p. 269). La variazione in discorso è data dal Pizzetti, nel suo trattato di geodesia, nel caso delle rappresentazioni conformi e per le linee coordinate. Con calcoli più lunghi, ma che non presentano alcuna difficoltà, si ha per una curva qualunque in una rappresentazione qualunque.

4. UN'ASSURDA DETERMINAZIONE APRIORISTICA DEL MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE IN UNA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI UNA SUPERFICIE SU DI UN'ALTRA. — Possiamo supporre, per semplicità, che le due superficie siano riferite a sistemi isotermini. Della superficie obiettiva  $S$  sia

$$(S) \quad ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

il quadrato dell'elemento lineare; e della superficie immagine  $S_1$  sia

$$(S_1) \quad ds_1^2 = \lambda_1 (du^2 + dv^2)$$

il quadrato dell'elemento (ridotto alle stesse coordinate curvilinee  $u$  e  $v$  di  $S$  per mezzo delle formole di isogonia). Il logaritmo  $\mu$  del modulo di deformazione lineare è

$$\mu = \log \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}.$$

Chiamando rispettivamente  $K$  e  $K_1$  le curvature gaussiane di  $S$  e di  $S_1$ , il parametro di 2° ordine del Beltrami di  $\mu$ , calcolato su  $S$ , verifica l'identità

$$(5) \quad (\Delta_2 \mu)_S = K - K_1 e^{2\mu}.$$

Il Marussi suppone che di  $S_1$  si conosca soltanto  $K_1$  ( $\lambda_1$  è sconosciuto) e considera la (5) come una equazione differenziale nella funzione incognita  $\mu$ .

Se  $\mu^*$  è un integrale di (5), si viene, secondo il Marussi, a determinare *a priori* il modulo di deformazione lineare in una rappresentazione conforme qualunque di  $S$  su una superficie di assegnata curvatura gaussiana  $K_r$  !!

Il Marussi, veramente, suppone che  $S_r$  sia un piano e quindi  $K_r = 0$  <sup>(8)</sup>. L'assurdo rimane: soltanto l'equazione (5) si muta in un'altra assai più semplice dal punto di vista dell'integrazione. Ma per  $\mu$  si tratta di scegliere tra infinite soluzioni (e di quale infinità!). E che senso ha parlare d'un modulo  $\mu^*$  di deformazione lineare sapendo soltanto che la superficie immagine è applicabile sul piano? Le due superficie s'intendono conosciute (e non basta quindi la conoscenza di  $\lambda$  e  $\lambda_r$ ). L'elemento lineare del piano in coordinate cartesiane ortogonali è

$$ds_i^2 = dx^2 + dy^2,$$

e allora le formole della rappresentazione conforme di  $S$  sul piano si hanno dalla relazione

$$x + iy = f(u \pm iv),$$

dove  $f$  è simbolo di funzione olomorfa della variabile complessa  $u + iv$ . Il  $ds_i^2$ , si trasforma in

$$ds_i^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] (du^2 + dv^2),$$

con  $x$  e  $y$  ben determinate funzioni di  $u$  e  $v$ ; e quindi per  $\mu$  il valore *ben determinato*

$$\mu = \log \sqrt{\frac{\left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2}{\lambda}},$$

mentre il Marussi darebbe una (quale?) delle infinite soluzioni dell'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} = \lambda K.$$

Il Marussi si riferisce alla rappresentazione piana conforme dell'Ellissoide data da Gauss, per portarvi un contributo, assegnandole un particolare  $\mu$ , indipendente dalle formole di rappresentazione! (E come avrebbe potuto pensare, il «princeps mathematicorum», a questo e a consimili perfezionamenti!). Il Marussi incontra di fatti una equazione del Poisson, più semplice della (6), in quanto il 2° membro contiene per esempio la sola variabile  $u$ . Egli crede che ci sia una sola soluzione per  $\mu$  (quella che può dare il problema di Dirichlet o quello di Neumann)! Quando il 2° membro di (6) è una funzione analitica di  $u$  (che è il caso supposto dal Marussi), si possono costruire

(8) Vedi A. MARUSSI, *Determinazione a priori del modulo di deformazione lineare nella rappresentazione conforme di Gauss*, questi «Rendiconti», Vol. XI, pp. 198-201 (1951).

quanti si vogliano integrali regolari della (6): se  $\mu^*(u, v)$  è uno di questi, ogni altro integrale regolare di (6) è la somma di  $\mu^*(u, v)$  con una qualunque funzione armonica in  $u$  e  $v$ . Per Marussi l'analiticità della funzione di  $u$  consiste nell'esistenza delle derivate di tutti gli ordini in un punto generico  $u$ . Egli postula per  $\mu$  uno sviluppo banale secondo le potenze di  $v$ , e trova una soluzione semplicemente formale per  $\mu$ , che non ha alcun valore, neanche come un possibile « aprioristico »  $\mu$  in una « ipotetica » rappresentazione piana conforme dell'Ellissoide!

E sì che il Marussi ha fatto lavorare anche la sua scuola su questo tema, rifilando rappresentazioni conformi con prefissato modulo di deformazione lineare stazionario lungo una geodetica, o lungo un parallelo, o lungo un meridiano... E se più ne ha, più ne metta!

5. GEODESIA E DIDATTICA. - Il corso di Geodesia del Marussi <sup>(9)</sup> si compone in un riepilogo, in forma sciatta, oscura e scorretta, delle applicazioni dell'Analisi alla Geometria, già svolte (in tutt'altra forma!) nel biennio propedeutico delle Facoltà di Scienze, seguito da nozioni di Geometria differenziale; la quale non è poi se non Algebra tensoriale. Nulla, dunque, di Geodesia. La quale è degradata a Topografia <sup>(10)</sup>: questo corso si apre con la genesi e struttura della Terra e con richiami spropositati sulla teoria idrostatica dei pianeti. (E come c'entrano con la Topografia? *Nous avons changé tout cela*: come nella famosa commedia di Molière!). Ma qui una cosa non possiamo trascurare. Il Marussi intende proporre una corrispondenza metrica biunivoca tra i punti dell'Ellissoide e quelli del Geoide; e poiché non è forse convinto della pseudo-biunivocità, aggiunge che nella zona considerata Geoide ed Ellissoide si debbano ritenere *applicabili* (!) e che *questa applicabilità sarebbe senz'altro assicurata se in punti corrispondenti fossero eguali le curvature gaussiane* (!!). A che dunque (spropositi madornali a parte) blaterare (n. 1) di *vera struttura locale del Geoide*, se questa struttura è quella dell'Ellissoide?

Un secondo corso di Topografia <sup>(11)</sup> contienè, oltre elementi di Fotogrammetria, il Calcolo delle probabilità: e di questo soprattutto il tacere è bello!

(9) Vedi A. MARUSSI, *Corso di Geodesia. Introduzione*, «Copisteria dell'Opera Universitaria di Trieste».

(10) A. MARUSSI, *Corso di Topografia*, «Opera Universitaria di Trieste».

(11) A. MARUSSI, *Corso di Topografia*, «Opera Universitaria di Trieste».



**Astrofisica.** — *Radio-onde emesse dal pianeta Giove ed un'ipotesi cosmogonica.* Nota (\*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

In una Nota precedente <sup>(1)</sup>, ho ricordato e discusso un'ipotesi cosmogoca, da me a suo tempo formulata, con la quale ho ammesso che la causa principale del calore stellare possa esser dovuta alla forza newtoniana. Nella Nota stessa, esaminavo le conseguenze di una simile ipotesi, e, fra esse, ero portato ad ammettere che il pianeta Giove abbia una temperatura superficiale, superiore di qualche centinaio di °C, a quella oggi ammessa dagli astrofisici.

Recentemente, è pervenuta in Italia un'interessante notizia, secondo cui, ricercatori della «Carnegie Institution» di Washington, avrebbero raccolto delle onde-radio, provenienti dal pianeta Giove. Non essendo ancora stato pubblicato, in America, il rapporto ufficiale di tale notizia, e poiché penso che essa possa dar maggior credito alla suesposta mia ipotesi, ho ritenuto opportuno richiedere conferma e particolari, sulla detta notizia, alla sua fonte. Ciò ho fatto per mezzo del prof. Vittorio Gori, Direttore dell'Istituto Superiore delle Telecomunicazioni, in Roma, del quale io sono attualmente ospite. Egli mi ha comunicato la risposta avuta dalla «Carnegie Institution», della quale ritengo utile qui riportare i brani più interessanti:

*Princeton, New Jersey, April 6 – Radio-Astronomers of the Carnegie Institution of Washington announced today that they had detected intermittent radio waves coming from the planet Jupiter. This is the first recorded instance of such waves being received from one of the other planets of our solar system. Dr. Bernard F. Burke, a member of the Institution's Department of Terrestrial Magnetism, and Dr. Kenneth L. Franklin, a Research Fellow of the Institution, reported their observations of the phenomenon to the 92nd Meeting of the American Astronomical Society, now in session at Princeton.*

*The waves, which were observed through the Carnegie Institution's large radio "telescope" near Seneca (Maryland) were described as having the appearance of short random bursts of static resembling thunderstorm interference on a broadcast receiver. The signals are conspicuous at a frequency of 22 megacycles and are observed about one day out three during the six minutes Jupiter is in the narrow beam of the radio telescope, which uses a "Mills Cross" antenna. Extremely sensitive radio receivers were used to measure the radiation with this antenna, which occupies a 96-acre field.*

*The apparent location in the sky from which the radio bursts came was observed to agree with that of Jupiter; and changes in the position of the source corresponded to the normal movement of Jupiter over a period of several months.*

(\*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Questi «Rendiconti» vol. XVII, p. 952 (1954).

*ths. . . . Although the explanation of the observed radio emission is not known, the conjecture was made that it might be caused by disturbance in the atmosphere of Jupiter similar to our thunderstorms but on a much larger scale.*

*The commencement of the observations with the narrow beam antenna at Seneca with which these observations were made, was announced last August by Dr Vannevar Bush, President of the Carnegie Institution of Washington.*

Come si vede dalla precedente lettera, l'emissione di radio-onde, da parte del pianeta Giove, appare del tutto sicura, essendo bene stata identificata la sorgente di esse. Infatti, il grande radio-telescopio usato risulta avere un angolo di sensibilità di circa due gradi d'arco, corrispondente ai 6 minuti giornalieri, di recezione delle radio-onde.

È opportuno discutere o tentar di ricercare quali possano essere le cause di detto constatato fenomeno, che è stato assimilato dagli Autori ai temporali terrestri, implicitamente accompagnati da scariche elettriche ed onde e.m. È da ricordare, anzitutto, che i temporali terrestri, oltre a corrispondere a violente agitazioni della nostra atmosfera, sono accompagnati da cambiamenti di stato del vapor d'acqua o nuvole, che si trasformano in acqua liquida o solida. Ed inoltre, tali fatti sono provocati dall'incontro di masse atmosferiche, che hanno forti squilibri termici e di pressione. Tali squilibri, hanno, come causa prima, il calore solare. Il complesso fenomeno, che del resto noi non riusciamo a precisare del tutto, è legato alla evaporazione dell'acqua dai grandi bacini terrestri. Si nota ancora, che tali fatti si svolgono di preferenza nelle medie e basse latitudini, dove maggiore può essere l'effetto del calore solare.

Ben diverse da quelle terrestri, sono le condizioni del pianeta Giove. Sembra anzitutto, che nella sua atmosfera manchi completamente il vapor d'acqua, quantunque si ammetta che, nel suo interno, il pianeta sia costituito da ghiaccio freddo. Le indagini spettroscopiche permettono di accertare in essa la presenza di metano, ammoniaca ed anche di idrogeno. L'atmosfera stessa avrebbe, nella parte a noi rivolta, una temperatura bassissima, cioè di — 140 °C. Mi riporto a quanto già dissi nella Nota precedente, circa la poca attendibilità delle misure, che hanno permesso tale conclusione. Ricordo soltanto, che esse si basano su di un metodo indiretto e, come afferma Wildt, convenzionale. Considerata la grande differenza tra le atmosfere della Terra e di Giove, per le ammesse loro costituzioni e temperature, non si hanno elementi per comprendere come e perché si debbano svolgere dei temporali nel grande pianeta, e soprattutto le caratteristiche di tale fenomeno. È inoltre da tener conto della assai differente misura, con la quale in un fenomeno del genere, possa influire il calore solare. Infatti, su Giove la costante solare ha un valore che è solo  $1/27$  di quello terrestre. I suoi eventuali effetti sulle agitazioni atmosferiche debbono perciò risultare assai più limitati, anche perché il periodo di rotazione del pianeta è notevolmente più breve (circa 10 ore, invece di 24).

Le precedenti considerazioni, che si appoggiano alle ammissioni dei moderni astrofisici (che mai hanno intravisto la nuova ipotesi da me avan-

zata, sull'origine del calore stellare) potrebbero difficilmente dar ragione di violenti temporali, sulla superficie di Giove, e, tanto meno, del constatato fenomeno delle radio-onde. E d'altra parte, la tranquilla ed immota costituzione del pianeta nelle località sottostanti all'atmosfera (ghiaccio freddo) non può dar ragione degli enormi sconvolgimenti che si osservano sulla superficie del pianeta.

Sembrami opportuno ricordare le modalità delle agitazioni superficiali di Giove. Si osservano presso al suo equatore delle fasce scure, alternate da altre più chiare, le quali, nel loro insieme, sono irregolarmente mobili, e subiscono variazioni di colore. È stato inoltre rilevato, che la velocità di rotazione del pianeta è lievemente maggiore all'equatore. Tale ultimo fatto può dipendere dalla fluidità atmosferica, quantunque sia difficile comprenderne il valore. Vi ha inoltre qualche differenza, tra i movimenti osservabili a nord ed a sud dell'equatore. Ma il fatto, che è ancor più difficilmente spiegabile, è costituito dalle grandi macchie colorate del pianeta. Ve ne ha una, rossastra, conosciuta sin dal 1878, delle dimensioni di circa  $50.000 \times 12.000$  km q., visibile tuttora, che va spostandosi lentamente, cambiando anche di forma e tinta. Appare difficile attribuire anche questo fatto esclusivamente all'atmosfera, che per la sua fluidità, tenderebbe ad assumere aspetto uniforme, od, al più, striato permanentemente, e non in modo variabile, in direzione parallela all'equatore.

Quanto precede induce, quasi con tutta certezza, a supporre che i fatti visibili alla superficie esterna di Giove debbano dipendere da cause interne del pianeta. Non è vero perciò che questo sia costituito, sotto l'atmosfera, da ghiaccio. È da pensare invece, che la temperatura già elevata (come avevo già esposto) alla superficie esterna dell'atmosfera, vada sempre più aumentando col crescere della profondità. La materia lì addensata, anche sotto l'influenza della maggiore gravità su Giove (2,5 volte quella terrestre) continua a mantenersi allo stato fluido, ma con caratteristiche vischiose, sempre più accentuate, in causa della pressione crescente. Nell'interno del pianeta Giove, a simiglianza della Terra, ma in misura molto più accentuata, deve esistere un gradiente termico, che ad una profondità data dal raggio di Giove (più che 10 volte quello terrestre), deve dar luogo ad una temperatura, che può valutarsi sui  $100.000$  °C, e forse ancora molto maggiore. La costituzione fluida così immaginata, necessariamente vischiosa, soggetta a continua generazione termica, può dar ragione delle macchie con posizione e colorazione lentamente variabili. La ipotesi di Wildt, secondo cui le dette colorazioni sarebbero dovute a soluzione di sodio nell'ammoniaca liquida, non pare possa presentare spiccati caratteri di attendibilità.

Quanto veniva ammesso qualche decina di anni addietro, che cioè Giove dovesse esser tanto caldo da emettere persino alquanto luce propria (da noi non constatabile per la luce riflessa, di origine solare), dopo quanto è stato esposto, torna in parte in onore. Giove deve essere in superficie alquanto caldo, come ho già indicato. Gli astrofisici moderni, non intravedendo la nuova causa di generazione termica, hanno dato maggior valore ai

metodi radiometrici usati da Coblenz, mentre essi non possono avere carattere sicuramente probativo, perchè, come ho detto, sono indiretti.

Ancora qualcosa si può dire circa la constatazione fatta delle radio-onde, provenienti da Giove. Si può affermare che esse non possono provenire dalla atmosfera di Giove, se supposta tanto fredda, come oggi si ammette; manca in essa, come ho già detto, la possibilità di temporali invocata da Burke e Franklin. La causa di tali radio-onde è ammissibile potersi ricercare, tenendo conto degli sconvolgimenti o delle convulsioni, che il pianeta subisce, in conseguenza del suo stato interno fluido, nel quale si generano sempre nuove quantità di calore. Tutto ciò può dar luogo a formazione di cariche elettriche, che, pervenendo alla superficie del pianeta (calda sì, ma non eccessivamente) possono bruscamente scaricarsi, con conseguente formazione di oscillazioni, e di onde-radio. La non eccessiva temperatura superficiale di Giove, permette di ritenere che lì, la materia non sia del tutto ionizzata; tale condizione appare necessaria per la formazione di oscillazioni elettriche. Dal Sole, infatti, non pare provengano onde-radio. Si deve però aggiungere che quanto ora si è detto indica la possibilità di localizzare, in certo modo, la sede del fenomeno elettrico ora annunziato; ma non di stabilirne con precisione le modalità.

Le considerazioni fatte per il pianeta Giove non possono ripetersi, con uguale attendibilità per gli altri grandi pianeti: Saturno, Urano, Nettuno. Mancano, infatti, per essi dati astrofisici, analoghi a quelli di Giove. Tuttavia è da dire che per la loro bassa densità (prossima sempre all'unità, come per Giove) succeda, per essi, qualcosa di simile a quanto si è detto per il massimo pianeta, malgrado l'ancora più piccola costante solare delle rispettive superficie. Per quanto riguarda Saturno, la cui massa è circa  $1/3$  di quella di Giove, potrebbe forse prevedersi, per analogia, la emissione di radio-onde come per Giove, ma in misura più ridotta <sup>(2)</sup>.

Per concludere sulle considerazioni svolte nella precedente Nota citata ed in questa, può dirsi che l'attendibilità delle ipotesi da me avanzate risulta alquanto rafforzata dalla constatazione fatta da Burke e Franklin, di emissione di radio-onde, da parte di Giove. Tali ipotesi, come si è già detto, sono logicamente concatenate, e ci portano necessariamente a stabilire una nuova ed impensata caratteristica della forza newtoniana, che però sfugge del tutto, al controllo sperimentale; mentre tale controllo è possibile, mediante delicati dispositivi, come quello di Cavendish, per la reale esistenza della forza. A mio avviso, occorre forzare i limiti che, per abitudine, ci vietano una più profonda comprensione del mondo esteriore, ed ammettere che il calore e la luce stellare non sono che un diretto effetto della forza di gravitazione, scoperta da Newton.

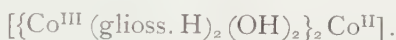
(2) Dopo la presentazione di questa Nota, e prima di corrergerne le bozze di stampa, è comparso un articolo riassuntivo del 92° Meeting della A.A. Society, sul Periodico Americano «Sky and Telescope», giugno 1955; in esso, a p. 324, è detto: *The Carnegie Institution's Radio Astronomers intend to study Saturn to find out if it also is a radio source.* Questo proposito coincide con quanto io ho qui asserito.



**Chimica inorganica.** — *Suscettività magnetica dei complessi Co<sup>II</sup>—Co<sup>III</sup> (\*)*. Nota (\*\*) del Socio LIVIO CAMBI.

I polimeri complessi Co<sup>II</sup>—Co<sup>III</sup> benzotriazolici, illustrati nella Nota recente apparsa in questi « Rendiconti » <sup>(1)</sup>, risollevarono la quistione della suscettività magnetica dei complessi polinucleari contenenti cobalto nelle due forme.

Il problema si era già presentato per i complessi gliossimici da me scoperti <sup>(2)</sup> e recentemente riveduti corrispondenti ai rapporti 3 Co : 4 gliossima, quali quelli ottenuti dalla monometil- e dalla α-monofenilgliossima, che si possono riferire al tipo



A questo tipo appartiene anche il tetrabromuro pure ottenuto dalla α-monofenilgliossima <sup>(3)</sup>



Fin da allora ho richiamato l'analogia dei derivati gliossimici in quistione con i noti complessi trinucleari di Werner e Jantsch della serie della Co<sup>III</sup>—tetraetilendiammina



I tre gruppi di complessi hanno in comune l'origine dall'autossidazione dei sali di Co<sup>2+</sup> in presenza delle gliossime oppure di alcune ammine primarie.

La recente discussione mi ha portato a determinare la suscettività magnetica del solfato tetraetilendiamminico cui accenno e sono risultati valori affatto analoghi a quelli dei sali gliossimici predetti.

I sali gliossimici e quelli della tetraetilendiammina presentano il caso più semplice: il paramagnetismo per 3 Co corrisponde a quello di 1 Co<sup>2+</sup>, e quindi indica nettamente il rapporto 1 Co<sup>II</sup> : 2 Co<sup>III</sup>, il quale risulta anche dalle scissioni acide che conducono a sali CoX<sub>2</sub> e ai complessi cobaltici delle gliossime o della etilendiammina che sono diamagnetici. Cioè la struttura

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Presentata nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Questi « Rend. », ser. 8<sup>a</sup>, XVIII, fasc. 5, pp. 467-472 (1955).

(2) L. CAMBI, « Rend. R. Ist. Lomb. », 71, 1 (1938).

(3) L. CAMBI e L. MALATESTA, « Gazz. », 69, 547 (1939); L. CAMBI, « Ber. », 76, 543 (1943).

Si indica con Glioss. H<sub>2</sub> la gliossima, e con Glioss. H il rispettivo radicale monovalente.



polinucleare non altera il comportamento magnetico rispettivo dei nuclei cobaltici (diamagnetici) e del  $\text{Co}^{\text{II}}$  non complesso, oppure di complesso non polare, che appare col proprio paramagnetismo.

Nella tavola seguente sono riportati i valori cui accenno:

Sali Cobalto II - dicobalto III		$\chi_{\text{Co}_3} \times 10^6$ a 18°	$\mu_{\text{eff.}}$ magn. Bohr per 3 Co
1	$[\{(\text{en})_2 \text{Co}^{\text{III}} (\text{OH})_2\}_2 \text{Co}^{\text{II}} \cdot 2 \text{H}_2\text{O}] (\text{SO}_4)_2$ etilendiammina	10350	4,9
2	$[\{(\text{glioss. H})_2 \text{Co}^{\text{III}} \text{Br}_2\}_2 \text{Co}^{\text{II}}] \cdot 6 \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ $\alpha$ -monofenilgliossima	9475	4,7
3	$[\{(\text{glioss. H})_4 \text{Co}^{\text{III}}\}_2 \text{Co}^{\text{II}} (\text{OH})_4]$ $\alpha$ -monofenilgliossima	9523	4,7
4	$[\{(\text{bzN}_3)_4 \text{Co}^{\text{III}}\}_2 \text{Co}^{\text{II}}]$ benzotriazolo	5482	3,6
Sali Cobalto II		$\chi_{\text{Co}} \times 10^6$	$\mu_{\text{eff.}}$ magn. Bohr per 1 Co
5	$[(\text{bzN}_3)_2 \text{Co}^{\text{II}}] \cdot \text{H}_2\text{O}$ benzotriazolo	6780	3,9
6	$[(\text{en})_3 \text{Co}^{\text{II}}] \text{Cl}_2$ etilendiammina	6152	3,8
7	$(\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4 \cdot \text{CoSO}_4 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$	9914	4,9

I dati dei complessi da (1) a (5) risultano dalle mie esperienze. Per il complesso (6) riporto il valore di P. W. Selwood (4). Il valore di (7) risulta da misure da me attuate.

È interessante notare la quasi coincidenza dei valori per i sali (4), (5), (6), sensibilmente inferiori a quelli di  $\text{Co}^{2+}$ . È opportuno richiamare che con ogni probabilità i complessi (4) e (5) sono elevati polimeri e non semplici complessi trinucleari.

Si può concludere che il paramagnetismo dei complessi polinucleari di cobalto attesta di regola la presenza di  $\text{Co}^{\text{II}}$ , e risulta legittimo avvalersi della misura della suscettività per interpretare la struttura dei complessi stessi polinucleari misti di  $\text{Co}^{\text{II}}$  e  $\text{Co}^{\text{III}}$ . Il diamagnetismo non attesta però

l'esclusione di  $\text{Co}^{\text{II}}$ . È ben noto che alcuni  $\text{Co}^{\text{II}}$ -complessi assumono come dimeri lo stato diamagnetico o comunque valori della suscettività vicini a zero.

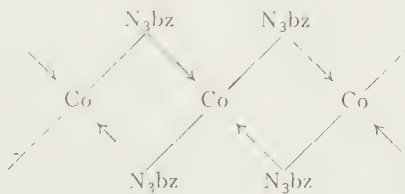
I sali di  $\text{Co}^{\text{III}}$  polinucleari non offrono in generale eccezioni: è noto ad esempio che i complessi tetranucleari come  $[\text{Co}^{\text{III}}\{(\text{OH})_2\text{Co}^{\text{III}}(\text{NH}_3)_4\}_3]\text{Cl}_6$  sono praticamente diamagnetici <sup>(5)</sup>.

Ringrazio il laureando Cenzo Sironi per il valido aiuto prestatomi nella esecuzione di questa ricerca.

**Chimica inorganica.** — *Complessi triazolici di Cobalto<sup>II</sup> e Cobalto<sup>III</sup>* <sup>(\*)</sup>. Nota di LIVIO CAMBI, LUIGI CANONICA e CENZO SIRONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

1. COMPLESSI BENZOTRIAZOLICI DI  $\text{Co}^{\text{II}}$ . — Ricerche precedenti <sup>(1)</sup> attestarono i caratteri particolari dei complessi ottenuti dai sali di  $\text{Co}^{2+}$  per azione diretta del benzotriazolo e omologhi. In determinate condizioni di pH, con eccesso di reagente organico, risultano sali del tipo  $(\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_3)_2\text{Co} \cdot n\text{H}_2\text{O}$ . Sono di colore ocraceo scuro, insolubili in acqua e nei solventi organici, si disidratano nel vuoto a  $100^\circ$ , resistono alla temperatura della naffalina bollente e al riscaldamento con acqua in tubo chiuso a  $140^\circ$  per oltre 24 ore, e resistono all'ossidazione. Si demoliscono a caldo con acido cloridrico senza sviluppare il cloro. Gli alcali li decompongono.

I debyeagrammi non hanno mostrato assetto cristallino deciso. Si tratta con ogni probabilità di polimeri tridimensionali, di supercomplessi, che potrebbero riferirsi ad esempio come elemento di struttura, a catene del tipo <sup>(2)</sup>:



Presentano  $\chi_{\text{Co}}$  dell'ordine di 3,4 magn. Bohr: con l'invecchiamento assumono valori più bassi.

(5) BERKMANN e ZOCKER, «Z. phys. Chemie», **124**, 318 (1926). È ben nota l'eccezione di  $\text{K}_3[\text{CoF}_6]$  con un momento di 5,3; non si sono però ancora studiati od ottenuti complessi polinucleari fluorurati: è pure noto che  $[(\text{NH}_3)_3\text{CoF}_3]$  è diamagnetico.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università statale di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) L. CANONICA, R. DE LEONE e C. BERSANO, «Rend. Ist. Lomb.», **87**, 276 (1954).

(2) Con la sigla  $\text{bzN}_3$  indichiamo il radicale monovalente del benzotriazolo,  $\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_3^-$ .

La relativa variabilità del paramagnetismo a seconda delle condizioni di esperienza, nelle diverse preparazioni, può attribuirsi alla diversa distribuzione sterica dei radicali nei polimeri.

Cioè, i valori di  $\chi_{Co}$  sono sempre inferiori a  $\simeq 4,8$  magn. Bohr di  $Co^{2+}$  e tendono a quelli corrispondenti a complessi planari od ottaedrici di  $Co^{II}$  ad orbite 3d compenstrate, con  $\simeq 1,7$  magn. Bohr.

Riferiremo in una prossima Nota il dettaglio delle esperienze, ma avvertiamo subito che i sali del tipo su accennato si ottennero anche da alcuni complessi di  $Co^{II}$ .

Il benzotriazolo in mezzo acquoso ed in atmosfera inerte demolisce gli esanitriti  $-Co^{II}$ , del tipo  $[Co(NO_2)_6]Me^{II}Me_2^I$  e produce il complesso dibenzotriazolico. Demolisce anche, in mezzo debolmente acido, il complesso trinucleare etilendiamminico  $[Co^{III}(en)_2(OH)_2Co^{II} \cdot 2H_2O](SO_4)_2$  di Werner e Jantsch <sup>(3)</sup>: la scissione è quantitativa e conduce al  $Co^{II}$ -dibenzotriazolato ed ai sali della diacquo- $Co^{III}$ -dietilendiammina.

Cioè la scissione dei complessi di  $Co^{II}$  conduce allo stesso prodotto sia partendo dall'esanitrito- $Co^{II}$  con  $\simeq 1,7$  magn. Bohr, sia dal tetrol-diacquo complesso del tipo polare rispetto al  $Co^{II}$  contenuto con  $\simeq 4,8$  magn.

2. COMPLESSI BENZOTRIAZOLICI- $Co^{II}$ - $Co^{III}$ ; LE REAZIONI FRA BENZOTRIAZOLO E I SALI COMPLESSI COBALTICI. — Abbiamo osservato che numerosi complessi cobaltici in soluzione o in sospensione acquosa, da  $70^\circ$  a  $90^\circ$  vengono decomposti più o meno rapidamente dal benzotriazolo, per dare sali che a seconda dei prodotti di partenza presentano i due rapporti estremi 1  $Co$  : 2 benzotriaz. 3  $Co$  : 8 benzotriaz.

Tipica è la demolizione degli esanitriti cobaltici, particolarmente del sale sodico, con sviluppo di ossidi di azoto. Si precipita un sale col rapporto 1  $Co$  : 2 benzotriaz., confondibile al primo esame con il sale analogo di  $Co^{II}$  sopra indicato, per l'aspetto e per i caratteri. Si distingue però per la  $\chi_{Co}$  che presenta valori notevolmente minori dell'ordine di  $1,7$  magn. Bohr, e per la presenza di  $Co^{III}$  che si manifesta con lo sviluppo di cloro all'attacco cloridrico.

In generale i sali insolubili ottenuti dai complessi cobaltici sono  $Co^{II}$ - $Co^{III}$ -complessi: con un contenuto di  $Co^{III}$  che varia a seconda dei casi dal 35 % al 70 % circa del cobalto totale. Nel solo caso dei sali carbonato- $Co^{III}$ -tetramminici,  $[Co(NH_3)_4CO_3]X$ , abbiamo verificato la formazione di un prodotto  $Co(C_6H_4N_3)_2$  non contenente cobalto trivalente.

Si è concluso che il benzotriazolo nella demolizione dei complessi cobaltici porta alla riduzione parziale o totale del cobalto a bivalente.

Operammo soprattutto con i complessi contenenti  $-NO_2$ , ed è probabile che l'ossidazione si porti sull'azoto nitroso. Nel caso dei complessi

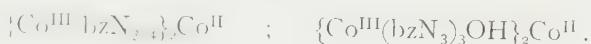
(3) Impiegammo il sale  $[Co(NO_2)_6]BaK_2$ : per il paramagnetismo vedi L. CAMBI, A. FERRARI, «Gazz.», 65, 1162 (1935). Sulla misura della suscettibilità magnetica del sale trinucleare sarà riferito in una Nota successiva.

$[\text{Co}(\text{NH}_3)_4\text{CO}_3]\text{X}$  e  $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{Cl}]\text{X}$  è probabile che l'ossidazione si porti sull'ammoniaca.

Quanto precede indica il singolare comportamento del benzotriazolo. Analoghe reazioni notammo anche col 5-bromobenzotriazolo.

La determinazione del contenuto in  $\text{Co}^{\text{III}}$  è risultata incerta per la grande stabilità dei sali che si decompongono con lentezza, anche con acido cloridrico concentrato. Dalle esperienze compiute risulta però la tendenza al rapporto  $2 \text{Co}^{\text{III}} : 1 \text{Co}^{\text{II}}$ , quale appare nettamente nel sale  $\text{Co}_3(\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_3)_8$  ottenuto dai croceo sali dinitro-tetramminici.

È ovvio che nei sali a più basso rapporto di benzotriazolo rispetto al cobalto, come per  $\text{Co} : 2$  benzotriaz., deve ammettersi la presenza di ossigeno, o di ossidrili, data la monovalenza del triazolo avremmo, ad esempio, lo schema



Il comportamento porta ad ammettere anche per questi sali la struttura di alti polimeri, con ogni probabilità tridimensionali, di supercomplessi, come per quelli di  $\text{Co}^{\text{II}}$ . I roentgenogrammi manifestano struttura cristallina. Non possiamo entrare nel merito della distribuzione sterica dei radicali, in attesa di ulteriori dati sperimentali.

3. LA REATTIVITÀ DEI COMPLESSI COBALTICI COL BENZOTRIAZOLO. — Dalle nostre esperienze è risultato che i sali delle cobaltiesammine resistono all'attacco del benzotriazolo:  $[\text{Co}(\text{NH}_3)_6]\text{Cl}_3$  rimane inalterato anche a lungo in soluzione neutra;  $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{Cl}]\text{Cl}_2$  viene attaccato rapidamente e produce un complesso  $-\text{Co}^{\text{II}}-\text{Co}^{\text{III}}$  con rapporti vicini a  $1 \text{Co} : 2$  benzotriaz. Gli esanitriti, come avvertimmo, vengono rapidamente decomposti.

I sali dinitro-tetramminici, flavo e croceo, reagiscono lentamente: dal cloruro croceo,  $1,6-[(\text{NO}_2)_2\text{Co}(\text{NH}_3)_4]\text{Cl}$  ottenemmo il sale con i rapporti  $3 \text{Co} : 8$  benzotriaz.

Anche l'anione tetranitro-diamminico (sale di Erdmann)  $1,2-[(\text{NH}_3)_2\text{Co}(\text{NO}_2)_4]\text{K}$  reagisce, ma la reazione si arresta al sale  $\text{Co}^{\text{III}}$  intermedio che più oltre descriviamo.

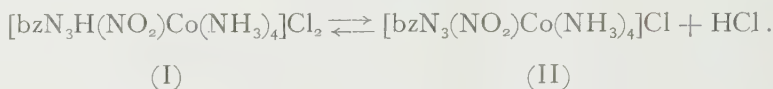
Risulta netta la differenziazione fra esammine cobaltiche e ammine parzialmente sostituite nel nucleo con anioni vari, ma non ci è dato finora di precisare alcuna relazione esatta fra la struttura e la reattività che ci interessa.

4. COMPLESSI  $\text{Co}^{\text{III}}$  - BENZOTRIAZOLICI. — In due casi isolammo finora dei complessi cobaltici quali presumibili termini primari dell'attacco del benzotriazolo.

1° I sali dinitro-tetramminici, trans, si demoliscono lentamente col benzotriazolo e producono il sale insolubile sopra indicato. Dalla soluzione madre residua, di colore giallo aranciato, a freddo, per aggiunta di acido

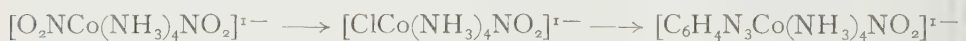
cloridrico concentrato, precipita un sale giallo cristallino, corrispondente a rapporti 1 Co : 1 NO<sub>2</sub> : 1 benzotriaz. : 2 Cl; con l'azoto totale 1 Co : 8 N (I).

Questo stesso sale ottenemmo anche facendo agire il benzotriazolo su noto complesso 1,6-[Cl(NO<sub>2</sub>)Co(NH<sub>3</sub>)<sub>4</sub>]Cl (trans): la soluzione acquosa, a riscaldamento a 50° vira dal rosso vinoso al giallo aranciato e diviene fortemente acida; dopo raffreddamento per aggiunta di acido cloridrico, si separa il bicloruro predetto cui compete con probabilità la struttura (I) e che probabilmente in soluzione acquosa passa a (II):



Il bicloruro è quasi diamagnetico: a 20°  $\chi_{\text{Co}} = 99, 78 \cdot 10^{-6}$ .

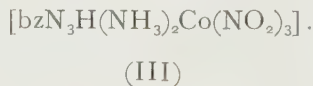
La formazione dal cloro-nitro complesso dimostra la distribuzione spaziale *trans*. Il processo si è attuato infatti partendo dal dinitro-*trans*:



I sali dinitro-tetramminici *cis*, si demoliscono profondamente, e finora non abbiamo isolato prodotti intermedi.

2° Il tetranitrito di Erdmann reagisce rapidamente in sospensione acquosa col benzotriazolo, ma forma un sale giallo aranciato quasi insolubile che corrisponde ai rapporti 1 Co : 3 NO<sub>2</sub> : 1 benzotriaz.; azoto totale 1 Co : 8 N; non contiene alcali.

A questo complesso corrisponderebbe la struttura (III): sono però in corso le indagini sui prodotti di scissione



Presenta  $\chi_{\text{Co}} = 108,89 \cdot 10^{-6}$ .

Riferiremo in seguito il dettaglio delle nostre esperienze.

Le ricerche di cui sopra sono state eseguite per larga parte con i mezzi del Centro di Studi di Chimica Metallurgica del C.N.R.



**Geologia.** — *Nuovi ritrovamenti di calcari fossiliferi del Paleozoico superiore nel bacino del Baltoro (Himalaya-Karakorum).* Nota di ARDITO DESIO e MARIA BIANCA CITA, presentata (\*) dal Corrisp. A. DESIO.

#### CENNI GENERALI (1)

Durante la Spedizione Italiana al Karakorum del 1954 sono state effettuate da me e dal dott. Bruno Zanettin, una serie di ricerche geologiche nel bacino del Baltoro, oltre che in altre parti della catena, che hanno portato alla costruzione di una carta geologica di quella remota regione, alla scala di 1 : 75.000. Devo dire qui che i rilevamenti geologici negli alti bacini glaciali della catena himalayana sono ostacolati dalla inaccessibilità di quelle montagne e dalla vasta copertura di ghiacci.

In pratica, le uniche vie che consentono di penetrare nelle alte valli, sono rappresentate dai ghiacciai che ne occupano il fondo ed il rilevamento geologico, nei casi fortunati — come il nostro — in cui si disponga di buone carte topografiche (2), viene eseguito raggiungendo di tanto in tanto le pendici dei monti, determinando a vista le zone di origine dei materiali che formano le morene galleggianti e delimitando pure a vista, con l'aiuto di cannocchiali, i vari livelli stratigrafici desunti dalle osservazioni precedenti. È un metodo approssimato, ma che non ha alternative.

Dopo la conquista della seconda vetta del mondo, del K2 (8611 m) da parte della spedizione che ho avuto l'onore di guidare, ossia dopo quattro mesi dedicati a tale impresa, ho potuto finalmente occuparmi delle ricerche scientifiche ed in primo luogo del rilevamento del bacino del Baltoro di cui avevo già costruito un primo abbozzo nel 1929. Fu così che nella seconda settimana d'agosto del 1954 ho lasciato il campo-base K2, situato al piede della colossale piramide, composta in prevalenza di gneiss, di scisti quarzosi neri e di graniti, e col dott. Zanettin ho ridisceso il ghiacciaio Gedwin Austen lungo la sponda sinistra, sino a Concordia, alla confluenza con l'Alto Baltoro. Da qui abbiamo preso a risalire quest'ultimo, lungo una delle morene galleggianti che corrono parallele ed in prossimità della sponda destra. Va ricordato qui che ciascuna morena dell'Alto Baltoro ha una sua composizione particolare che riproduce in sintesi la composizione delle zone di provenienza, le quali in questa parte del bacino Baltoro sono molto varie.

Partendo dalla sponda destra, infatti, s'incontrano dapprima due corroni morenici (I e I bis) appena separati da una ristretta serie di guglie

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Relazione di A. DESIO.

(2) Avevamo la carta al 75.000 rilevata dalla spedizione italiana nel 1929.

di ghiaccio, composti da calcari bianchi e giallicci più o meno decisamente saccaroidi fra i quali si trova qualche ciottolo di calcare fossilifero, altri baltorite <sup>(3)</sup> ed altri ancora di scisto cloritico. Al di là di una più ampia zona di guglie di ghiaccio, v'è un'altra morena galleggiante (2) costituita da conglomerati calcarei policromi, altri a cemento giallo e rosso, arenarie verdi, scisti marnosi rossi e gialli, calcari gialli e raramente grigi e qualche frammento di scisti filladici neri. Una nuova serie di guglie le separa dalla morena galleggiante successiva (3), la così detta « morena nera », composta interamente da scisti ardesiaci neri sul cordone destro, da scisti neri associati con breccie rosse calcaree, conglomerati calcarei policromi, marne rosse e scisti sericitici lilla e verdini sul cordone sinistro giustapposto al precedente. Seguono altre due morene galleggianti separate sempre da zone più o meno ampie di guglie di ghiaccio, di cui la prima composta in prevalenza di scisti neri ardesiaci (scisti d'iniezione (4) e la seconda (5) da graniti.

Come ho fatto cenno da principio, sono le morene 1 e 1 bis che contengono rocce fossilifere. In mezzo ai frammenti di calcare grigio-nerastro subcristallino, s'incontrano di tanto in tanto blocchi di una lumachella grossi lamellibranchi spatizzati e molto deformati per schiacciamento. Si tratta di resti assolutamente inisolabili e perciò indeterminabili. Ho avuto pure la ventura di raccogliere in questo calcare anche un bell'esemplare spatizzato di corallo cespitoso.

Più interessanti sono risultati, dal punto di vista paleontologico, i calcari bianchi saccaroidi con foraminiferi visibili anche ad occhio nudo, nei quali la dott.ssa Cita ha potuto identificare alcuni generi ed una specie descritti nella seconda parte di questa Nota e riferibili a *Schwagerina*, *Neoschwagerina* e *Quinqueloculina*. La presenza delle *Neoschwagerina* a quanto pare riferibili alla *N. craticulifera* (Schwager), può indicarci senz'altro l'esistenza di strati del Permico nell'Alto Baltoro, verosimilmente coevi a quelli identificati nello stesso bacino del Baltoro, grazie alle determinazioni micropaleontologiche del Silvestri, sui materiali da me raccolti durante la spedizione del 1929 <sup>(4)</sup> sulla morena di un ghiacciaio proveniente dal gruppo Gasherbrum IV Sud. Il Silvestri aveva riconosciuta pure la *Neoschwagerina craticulifera* (Schwager), attribuendo i calcari grigi in cui era contenuta all'Eopermico <sup>(5)</sup>.

I nuovi campioni di calcari fossiliferi della morena laterale destra dell'Alto Baltoro provengono ancora dal gruppo dei Gasherbrum, ma non

(3) P. COMUCCI, *Le rocce raccolte dalla Spedizione Geografica Italiana al Karakorum* (1929), «Mem. R. Acc. Naz. Lincei», ser. VI, vol. VII, fasc. III, pp. 148, Roma 1936.

(4) A. di Savoia-Aosta, *La spedizione Geografica Italiana al Karakorum*, Grafiche Bertarelli, Milano 1936, p. 272 e sgg.

(5) A. SILVESTRI, *Rocce e fossili del Paleozoico superiore raccolti dalla Spedizione Geografica Italiana nel Karakorum*, 1929. P. I; *Le rocce*. «Mem. Pont. Acc. Novi Lincei», ser. 3, vol. I, pp. 33-48; P. II: *I fossili*, Ibidem, vol. II, P. II, pp. 79-117, Città del Vaticano 1934-1935. A. DESIO, *La spedizione Geografica Italiana al Karakorum* (1929), p. 10, Milano 1936.

dal versante meridionale, come i precedenti, bensì dal versante orientale, attraverso il Ghiacciaio Orientale del Gasherbrum ed il Ghiacciaio Duca degli Abruzzi. La nuova segnalazione, documentata dall'esame paleontologico effettuato dalla dott.ssa Cita, serve non solo di conferma alle determinazioni cronologiche antecedenti, ma anche ad indicare che l'estensione del Neopermico nel bacino del Baltoro è sensibilmente maggiore di quella nota prima d'ora.

Purtroppo gli altri campioni di calcari fossiliferi esaminati dalla Cita come quelli ad alghe calcaree delle morene del ghiacciaio meridionale del Falchan Kangri (Broad P.), quelli di Coralli e Briozoi, come pure i calcari oolitici dell'Alto Baltoro, non sono per ora databili soprattutto per le condizioni di conservazione dei resti organici, profondamente trasformati dal metamorfismo troppo spinto delle rocce in cui sono contenuti. Qualche elemento in proposito potrà forse provenire dalla ricostruzione della serie stratigrafica locale quale spero di poter ottenere in seguito con l'elaborazione dei dati raccolti.

#### STUDIO DEI CAMPIONI <sup>(6)</sup>

Al ritorno dalla spedizione italiana al Karakorum effettuata nella stagione estiva del 1954, il prof. Desio mi ha affidato 14 campioni di rocce raccolte nell'Alto bacino del Baltoro per sottoporle ad un esame micropaleontologico: alcuni di questi campioni infatti apparivano fossiliferi anche macroscopicamente, risultando visibili sulle superfici di alterazione numerose sezioni di grossi foraminiferi o di altri fossili.

Per compiere questo esame ho preparato due sezioni sottili per ogni campione, una parallela ai piani di scistosità o di stratificazione, l'altra perpendicolare; 6 dei 14 campioni esaminati sono risultati fossiliferi, ma solamente 2 di essi contengono fossili determinabili, e quindi utilizzabili per una datazione. Un altro campione si è rivelato ricchissimo di ooliti di aspetto assai caratteristico.

CAMPIONE N. 1 (facies argillose poco metamorfiche; morena mediana; Alto Baltoro).

Scisto argilloso-marnoso color rosso vino, assai compatto, con piani di scistosità lisci e a lucentezza sericea.

Calcimetria: 24 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta con una tessitura distintamente parallela; si notano cristalli di dimensioni anche notevoli di calcite, spesso spezzati, frammentati a una pasta fondamentale a grana minutissima, di colore rossastro; non si notano tracce di fossili.

CAMPIONE N. 2 (morena galleggiante destra; Alto Baltoro; calcare fossilifero).

Calcarea nerastro molto compatto, caratterizzato dalla presenza di tracce biancastre di grandi dimensioni, ad andamento curvilineo, che potrebbero essere interpretate come sezioni di gusci di molluschi (Bivalvi?) del tutto inutilizzabili per una eventuale classificazione.

Calcimetria: più di 100 unità calcimetriche.

In sezione si presenta come un calcarea a grana estremamente sottile omogenea, con intercalazione di alcuni cristalli di calcite di dimensioni maggiori, che presentano una tendenza a disporsi in linee parallele e ad esser allungati tutti nella medesima direzione; in corrispondenza delle tracce biancastre descritte precedentemente, il calcarea assume una tessitura distintamente pavimentosa per la presenza di cristalli di calcite variamente orientati e cementati insieme ancora da calcite, ma in cristallini molto più piccoli.

Non si nota la presenza di fossili microscopici, mentre quelli macroscopici risultano del tutto indeterminabili.

CAMPIONE N. 3 (pendici WSW del Falchan Kangri (Broad Peak); calcarea grigi e chiari).

Si tratta in realtà di due campioni distinti, che chiamerò per chiarezza 3 e 3 *a*; il primo è costituito da un calcarea grigio, quasi nerastro se bagnato, finemente brecciato, molto compatto e tenace.

Calcimetria: più di 100 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come un calcarea a grana molto fine omogenea, fittamente brecciato; le fratture si intersecano fra loro secondo vari angoli; si nota però una netta predominanza delle fratture aventi una certa direzione, rispetto alle altre; alcune fratture sono sottilissime, altre parecchio più larghe; tutte si presentano riempite di calcite secondarie. Non si notano tracce di fossili.

Il campione 3 *a* è costituito da un calcarea cristallino biancastro, d'aspetto marmoreo, con una colorazione grigia assai tenue irregolarmente distribuita nella massa.

Calcimetria: 100 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come un calcarea cristallino bianco, tipo saccaroide, costituito da un agglomerato di cristallini di calcite tutti più o meno ugualmente sviluppati, con tessitura pavimentosa. Si nota una grande omogeneità e regolarità sia nelle dimensioni dei cristalli di calcite sia nella loro disposizione.

Nessuna traccia organica.

CAMPIONE N. 4 (morena galleggiante destra Alto Baltoro; calcarea fossiliferi).

Calcarea cristallino bianco quasi puro, riccamente fossilifero. Sulla frattura fresca la roccia si presenta come un marmo saccaroide, dentro al quale è tuttavia possibile distinguere le masserelle tondeggianti relative ai foraminiferi contenuti; sulle superfici di alterazione, che assumono una tinta le



germente giallognola, i fossili sono molto più evidenti che sui tagli freschi, poichè le sezioni dei foraminiferi risaltano in rilievo sulla massa del calcare cristallino, visibilissime anche a occhio nudo dal momento che le sezioni tondeggianti delle Schwagerine raggiungono spesso un diametro di 2-3 millimetri.

Calcimetria: 84,6 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come un calcare bianco cristallino, di tipo saccaroide, ma caratterizzato da un ricco contenuto organico che ne



Fig. 1. — Sezioni longitudinali di *Schwagerina* sp., contenute nel campione n. 4.

modifica alquanto le qualità. I fossili infatti sono in buona parte *Fusulinidae* di notevoli dimensioni (2-3 millimetri), a guscio arenaceo, e quindi di tinta nettamente più scura della massa calcitica cristallizzata: data la loro abbondanza e le dimensioni relativamente grandi, conferiscono alla roccia un aspetto maculato; oltre alle sezioni di foraminiferi a guscio arenaceo, altre masserelle arenacee di origine assai probabilmente organica ma in pessimo stato di conservazione, tanto da non essere identificabili, sono contenute nella massa contribuendo anch'esse a definire l'aspetto maculato al quale accennavo più indietro. Altri numerosi foraminiferi, di dimensioni nettamente inferiori a quelle delle *Fusulinidae* e a guscio calcareo anzichè arenaceo, sono contenuti nella roccia: si tratta di *Miliolidae*, appartenenti prevalentemente al genere *Quinqueloculina*.





Fig. 2. - Sezione trasversale di *Quinqueloculina* sp. e sezione longitudinale di radiolo di Echino (?), contenuti nel campione n. 4.

I foraminiferi identificati nelle sezioni sottili relative a questo campione verranno descritti alla fine della presente Nota.

CAMPIONE N. 5 (versante SO del Broad Peak, a circa 4700 metri).

Scisto ardesiaco color grigio-verdognolo chiarissimo, assai compatto, con piani di scistosità molto lisci ma senza lucentezza particolare, a grana finissima e omogenea.

Calcimetria: 27 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta costituita da un agglomerato di minutissimi cristallini di quarzo, disposti in bande di colore più chiaro e più scuro, con struttura distintamente scistosa; si notano alcune sottili fessure, con andamento trasversale rispetto ai piani di scistosità, riempite di calcite secondaria.

Nessuna traccia di fossili.

CAMPIONE N. 6 (morena mediana Alto Baltoro; conglomerato).

Conglomerato color rosso vino, scistoso, con elementi bianchi e giallo-verdastri, di dimensioni variabili da uno a dieci millimetri, tendenzialmente allungati in direzione della scistosità, cementati assai saldamente da un abbondantissimo cemento siliceo, esso pure con andamento scistoso, intensamente colorato in rosso.

Calcimetria: 4 unità calcimetriche.

In sezione la roccia dimostra chiaramente la sua natura detritica; il cemento siliceo, nettamente scistoso, presenta una grana finissima e uniforme; gli inclusi, spesso deformati e stirati in conseguenza della scistosità, sono a volte profondamente alterati.

Nessuna traccia di fossile.

CAMPIONE N. 7 (morena mediana Alto Baltoro; marne rosse).

Scisti marnoso-silicei color rosso vino, a grana assai fine e omogenea, a frattura scheggiata, molto compatti, con piani di scistosità opachi e ruvidi.



Fig. 3. --Ooliti calcaree nel campione n. 8.

Calcimetria: 23,9 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come una marna silicea molto compatta, a grana finissima e omogenea, distintamente scistosa. La colorazione, in complesso molto intensa, è distribuita in fasce alquanto irregolari e risulta più intensa dove la grana della roccia è più minuta, meno intensa dove si trova abbondante quarzo, in cristallini minuti, ma distinti.

Nessuna traccia di fossili.

CAMPIONE N. 8 (morena galleggiante destra Alto Baltoro; calcari fossiliferi).

Calcare grigio abbastanza scuro, molto compatto, di aspetto aspro, a frattura irregolare, caratteristico per il suo aspetto maculato dovuto alla

presenza di numerosissime masserelle scure (nerastre) tondeggianti, del diametro di uno-tre millimetri, a contorno alquanto irregolare, che a prima vista possono essere scambiate per fossili. In realtà l'esame microscopico mette in evidenza la loro vera natura, che è quella di ooliti calcaree. Il calcare, pur essendo di aspetto massiccio e assai compatto, presenta alcune sottili fratture riempite di calcite secondaria.

Calcimetria: 99,5 unità calcimetriche.

In sezione la roccia appare come un calcare oolitico; alle ooliti maggiori, distinguibili nella roccia, sul taglio fresco, anche a occhio nudo, si accompagnano altre ooliti di dimensioni minori, che diventano evidenti solo in sezione. Nettissima è la disposizione concentrica degli straterelli di calcite, aventi colorazione variabile dall'uno all'altro, che costituiscono le ooliti stesse; la calcite delle ooliti si presenta in cristallini minutissimi, distinguibili solamente con ingrandimenti piuttosto forti; fra una oolite e l'altra è a volte sviluppata una pasta calcitica sempre cristallina, ma con grana molto più grossolana e tessitura pavimentosa; questa calcite spatica, a tessitura pavimentosa, occupa però superfici molto più ridotte rispetto alle ooliti, che costituiscono la maggioranza della roccia. Le ooliti presentano forma tondeggianti, più raramente ovale; non si nota alcuna differenza fra l'aspetto che la roccia presenta in sezione parallela e in sezione perpendicolare. Non si notano tracce di scistosità, né di contenuto organico.

CAMPIONE N. 9 (morena galleggiante destra Alto Baltoro; calcari fossiliferi).

Calcare grigio abbastanza scuro, molto compatto, a superfici ruvide e frattura aspra, con aspetto maculato dovuto alla presenza di zone più o meno intensamente colorate di grigio; l'aspetto macroscopico della roccia ricorda quello del campione n. 8, proveniente da una località vicina a quella relativa al campione in esame; le masserelle scure, che presentavano però nel campione n. 8 contorni assai netti e ben distinguibili anche a occhio, sono qui molto più rare, irregolari di forma e a contorno indistinto; l'aspetto fossilifero segnalato dal raccoglitore, in rapporto alla presenza di queste masserelle scure, non ha avuto riscontro nelle ricerche microscopiche.

Calcimetria: più di 100 unità calcimetriche.

In sezione la roccia presenta un aspetto sensibilmente diverso secondo la direzione in cui è tagliata, data la distinta scistosità riconoscibile nella roccia. Si tratta di un calcare in parte spatato, con calcite a tessitura pavimentosa, in parte microcristallino, a grana molto fine e omogenea. I due tipi di struttura sono disposti irregolarmente nella roccia. Frequenti fratture riempite di calcite secondaria la attraversano secondo varie direzioni. A proposito della natura fossilifera segnalata dal raccoglitore, debbo dire che nell'interno della massa calcarea, oltre a qualche oolite simile a quella del campione n. 8, se pure molto meno sviluppata, più irregolare e meno frequente, sono riconoscibili anche alcune tracce che potrebbero essere organiche.



Data però la completa ricristallizzazione della roccia, non è possibile nemmeno dire con certezza che si tratti di fossili.

CAMPIONE N. 10 (morena galleggiante destra Alto Baltoro; calcari fossiliferi).

Calcare nerastro di aspetto assai caratteristico per la presenza di numerosissime masse bianche, allungate, con sezioni alquanto irregolari tondeggianti od ovali, che conferiscono alla roccia una apparenza fossilifera; in realtà la vera natura di queste masse allungate è, a mio avviso e come spiegherò più avanti, assai dubbia.

Il calcare in esame si presenta molto compatto e massiccio, a frattura aspra, senza evidente scistosità.

Calcimetria: più di 100 unità calcimetriche.

In sezione sottile la roccia si presenta come un calcare spatico, nel quale la calcite è disposta con tessitura pavimentosa (corrispondente alla porzione nera della roccia), contenente masse di calcite bianca microcristallina, a grana assai minuta e omogenea (corrispondente alle masserelle bianche). Non si notano strutture organiche di qualsiasi tipo nell'interno delle masserelle bianche; il contorno di queste a volte è indistinto, passando gradualmente la calcite dalla struttura più minuta a quella più grossolana, a volte invece si presenta netto per la presenza di minute granulazioni scure che seguono il contatto fra la parte bianca microcristallina e la parte scura, spatica. In questa parte scura si notano alcune forme tondeggianti che non si può escludere in modo assoluto possano avere origine organica, benchè siano assai dubbie.

CAMPIONE N. 11 (morena galleggiante destra Alto Baltoro).

Calcare grigio chiaro cristallino, compatto, a frattura scheggiata, di aspetto ruvido, evidentemente fossilifero; sulle superfici di alterazione si vedono infatti sporgere le sezioni tondeggianti dei foraminiferi che sono contenuti in grande quantità nella roccia stessa. Sul taglio fresco questi fossili si presentano come masserelle più scure, conferendo alla roccia un aspetto leggermente maculato.

Calcimetria: 90 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come un calcare saccaroide, con calcite spatica a tessitura pavimentosa, ma molto irregolare per la presenza di numerosi resti organici e di elementi arenacei di colore più scuro della calcite. Sono visibili alcune sezioni di grosse *Fusulinidae*, nel cui guscio si può distinguere una progressiva sostituzione di calcite microcristallina alla originaria composizione arenacea; i gusci completamente sostituiti si presentano chiari, finemente cristallini, a contorno poco marcato, mentre quelli che conservano ancora, almeno in parte, la loro composizione originaria, sono giallastri e a contorni nettissimi. Oltre alle *Fusulinidae*, si possono distinguere anche altre forme fossili, fra le quali ricordo frammenti di Briozoi e tracce organiche di dubbia origine.

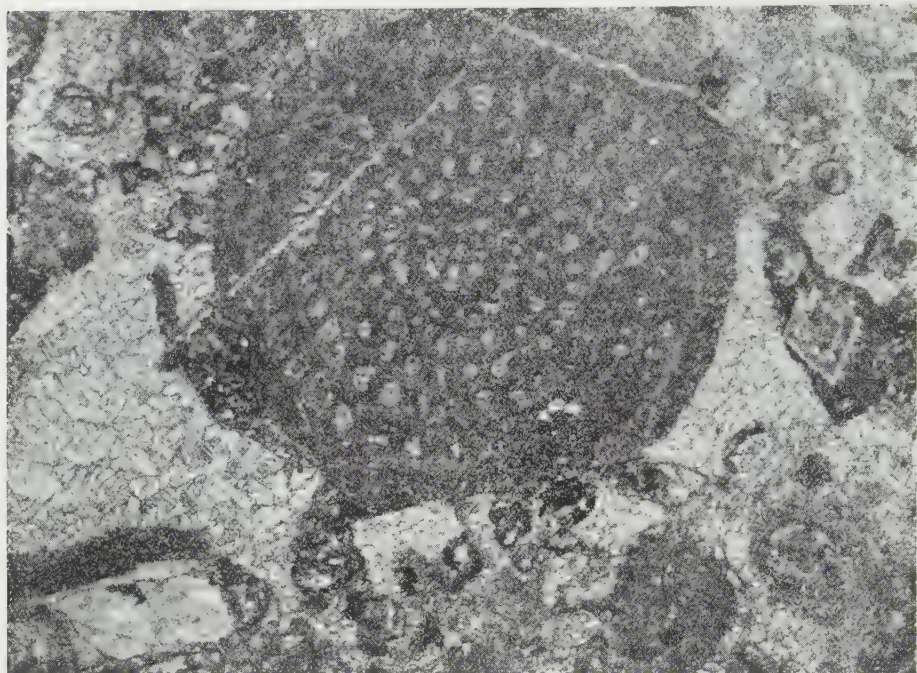


Fig. 4. - Sezione trasversale di *Neoschwagerina craticulifera* contenuta nel campione n. II.

CAMPIONE N. 12 (fondo destro Alto Baltoro, in posto; scisto nero ardesiaco).

Fillade nera distintamente scistosa, con piani di scistosità lucenti (lucenza sericea), con frequenti spalmature ferrugginose.

Calcimetria: 68 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta con struttura finemente cristallina, a grana fine e omogenea, distintamente scistosa. Il quarzo, in minuti granuli incolori, si trova associato a sostanza carboniosa che si presenta ora più, ora meno frequente in modo che la roccia ha una colorazione di intensità variabile, distribuita in sottili bande subparallele.

Nessuna traccia di fossili.

CAMPIONE N. 13 (morena mediana Alto Baltoro; conglomerato).

Conglomerato color rosso vino, a tessitura scistosa, con elementi bianchi allungati in direzione della scistosità, di dimensioni variabili da pochi millimetri a qualche centimetro in direzione trasversale; parallelamente alla scistosità, le dimensioni sono molto maggiori. Il cemento è siliceo, scistoso, intensamente colorato in rosso, con superfici di scistosità caratterizzate da una lucentezza sericea.

Calcimetria: 38,6 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta con struttura nettamente detritica. Frequentemente appare la calcite (vedi anche il valore calcimetrico sensibilmente



elevato per un conglomerato siliceo), in cristalli di medie dimensioni. Gli elementi più grandi appaiono spesso fratturati. Il cemento siliceo, intensamente colorato, presenta una grana assai fine e omogenea.

Nessuna traccia di fossile.

Questo campione presenta notevoli somiglianze sia per il suo aspetto macroscopico, sia in sezione, con il campione n. 6, esso pure proveniente dalla morena mediana dell'Alto Baltoro.

CAMPIONE N. 14 (Ghiacciaio meridionale del Falchan Kangri (Broad Peak), morena sinistra; calcari fossiliferi).

Calcere compatte, cristalline, di tinta biancastra con zone di colore più scuro, fino a grigio pallido. Sulle superfici di alterazione si notano alcune parti in rilievo, in corrispondenza delle zone di colore bianco, mentre le parti scure rimangono depresse rispetto alle altre. Alcune di queste parti più rilevate presentano forme tondeggianti e denotano una evidente origine organica. Per il loro aspetto, potrebbero essere interpretate come alghe calcaree: nulla di più preciso è possibile dire, dato l'elevato grado di ricristallizzazione della roccia, che rende appena percettibili tali strutture organiche.

Calcimetria: più di 100 unità calcimetriche.

In sezione la roccia si presenta come un calcare spatico, nel quale la calcite, in cristalli di medie dimensioni, presenta tessitura pavimentosa; si nota una distinta zonatura di colore, dovuta alla presenza di zone nelle quali la calcite stessa si presenta in cristalli più minuti e di colore alquanto più scuro. Le strutture organiche riconoscibili macroscopicamente non si distinguono nelle sezioni sottili, dato che la roccia si presenta completamente cristallizzata.

#### CONSIDERAZIONI SUI CAMPIONI FOSSILIFERI

Dei campioni esaminati; sono risultati fossiliferi quelli corrispondenti ai numeri 2, 4, 9, 10, 11, tutti provenienti dalla «morena galleggiante destra Alto Baltoro», ed il campione 14, proveniente dalla morena sinistra del ghiacciaio meridionale del Falchan Kangri (Broad P.).

Il primo dei campioni sopra ricordati contiene numerosi resti di fossili macroscopici assai deformati e spatizzati, del tutto indeterminabili; l'ultimo contiene anch'esso dei fossili macroscopici, riferibili probabilmente ad alghe calcaree, ma inutilizzabili per una determinazione.

I campioni n. 9 e 10 contengono tracce organiche, microscopiche, di origine assai dubbia, indeterminabili anche genericamente, e quindi inutilizzabili per una eventuale datazione.

Rimangono i campioni n. 4 e n. 11, i quali, a differenza degli altri, contengono fossili in uno stato di conservazione tale da permettere il loro riconoscimento, con determinazione per lo meno generica.

Nel campione n. 4 si nota la presenza di numerose *Schwagerine*, le quali si presentano di preferenza con sezioni longitudinali sia nelle lamine rica-

vate parallelamente alla direzione degli strati, sia in quelle perpendicolari. Le Schwagerine sono piuttosto numerose nel calcare, hanno forma tondeggiante con diametro di 2-3 millimetri e sono imperfettamente conservate a causa della spatizzazione dei gusci, che rende impossibile una determinazione specifica. Oltre alle Schwagerine, si possono riconoscere nelle sezioni sottili alcuni radioli di echini ed esemplari diversi riferibili al genere *Quinqueloculina* della famiglia delle *Miliolidae*.

Riguardo all'attribuzione cronologica del campione, ricordo che il genere *Schwagerina* è limitato al Carbonifero e Permiano, mentre il genere *Quinqueloculina*, che vive ancora nei mari attuali, è comparso nel Carbonifero. Non posso fare ulteriori precisazioni, per la mancata determinazione specifica degli esemplari: resta comunque indiscussa l'attribuzione del campione in esame al Paleozoico superiore.

Quanto alle condizioni ambientali relative alla deposizione del calcare rappresentato dal campione n. 4, devo notare che tanto le *Fusulinidae*, quanto le *Miliolidae* sono forme di habitat costiero, diffuse particolarmente nelle acque temperate calde, ricche di carbonati.

Il campione n. 11 infine è l'unico che mi abbia permesso di arrivare a determinazioni specifiche: nelle sezioni sottili ricavate da questo campione, infatti, si notano alcune sezioni trasversali di una Fusulinida che si lascia confrontare con la *Neoschwagerina craticulifera* (Schwager), già segnalata da Silvestri (op. cit.) nell'Alto bacino del Baltoro, in una morena presso il Circo Concordia. Questa forma, ben riconoscibile nella fig. 4, è assai caratteristica per le notevoli dimensioni, l'elevato numero dei giri e la regolarità nella disposizione dei setti. Oltre alla *Neoschwagerina craticulifera*, si riconoscono nella sezione numerose sezioni variamente orientate, riferibili ai generi *Schwagerina* e *Neoschwagerina*, frammenti di Briozoi coloniali ed altre tracce organiche di dubbia origine.

La distribuzione stratigrafica del genere *Neoschwagerina* essendo limitata al Permiano, ne consegue che il campione n. 11 va senz'altro riferito a tale periodo del Paleozoico.

Riguardo alle condizioni ambientali di sedimentazione relative al campione in esame, rimando a quanto ho detto a proposito del campione n. 4, data la corrispondenza nel significato ecologico delle associazioni faunistiche contenute nei due campioni.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *A proposito di un teorema sui piani finiti sopra un quasicorpo.* Nota di LUCIO LOMBARDO-RADICE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In una precedente Nota, dal titolo *Sui piani grafici finiti a configurazione di Fano universale* <sup>(1)</sup>, rispondendo a un quesito posto recentemente da Hanna Neumann <sup>(2)</sup>, ho enunciato il seguente teorema:

*In un piano finito sopra un quasicorpo la configurazione di Fano* <sup>(3)</sup> *è universale quando e soltanto quando il quasicorpo è un corpo a caratteristica 2 (e allora il piano stesso è desarguesiano).*

La dimostrazione da me data nella Nota citata presenta però una lacuna, che sarà ora colmata da una dimostrazione esauriente (nella quale — per quanto concerne i risultati ora necessari già stabiliti nella Nota precedente — ci limiteremo a richiami).

In un piano finito su di un quasicorpo vi sono una retta « speciale », diciamo  $x$ , e — su di essa — due punti « speciali »  $O$ ,  $X^\infty$  tali che:

*a)* esistono tutte le omologie speciali di asse  $x$  e centro comunque scelto su  $x$ ; *b)* esistono tutte le omologie (in generale non speciali), di centro  $O$  e asse una retta passante per  $X^\infty$  comunque scelta; di centro  $X^\infty$  e asse una retta, comunque scelta, passante per  $O$  <sup>(4)</sup>.

Assumiamo la retta speciale come asse delle  $x$ , i due punti speciali su di essa rispettivamente come origine  $O$  e punto all'infinito  $X^\infty$ ; fissiamo come retta all'infinito una retta per  $X^\infty$  (diversa dalla  $x$ ) scelta a piacere, come asse delle  $y$  una retta per  $O$  scelta pure a piacere (purché diversa dalla  $x$ ). Per *b)* si ha allora che:

( $\Omega$ ) *Esistono tutte le « affinità » aventi per centro  $X^\infty$  e per asse l'asse delle  $y$ , e tutte le « omotetie » aventi per centro  $O$  (e per asse la retta impropria).*

Si stabilisce allora che (vedi la mia precedente Nota sull'argomento):

A) Comunque si scelga il sistema di riferimento, le coordinate formano, rispetto all'addizione « naturale », un gruppo abeliano elementare avente per ordine una potenza di 2 (in particolare, per ogni  $a$ ,  $a + a = 0$ ,  $a = -a$ );

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVIII, fasc. 2, pp. 154-161 (1955).

(2) *On some finite non desarguesian planes*, « Archiv der Mathematik », 36-41 (1954).

(3) Cioè, l'allineamento dei punti diagonali di un quadrangolo.

(4) Questo risultato si trova in una Nota di G. ZAPPA e in una Nota di chi scrive, pubblicate l'una e l'altra in « Ricerche di matematica », vol. III (1954). (G. ZAPPA, *Sulle omologie dei piani  $h$ - $l$ -transitivi e dei piani su quasicorpi*; L.L.R., *L'inversione come dualità nei piani su sistemi cartesiani*).

B) Comunque si scelga il sistema di riferimento, una retta parallela alla retta unitaria  $x = y$  ha equazione  $x + y = b$ , essendo  $(0, b)$  il punto d'incontro della retta con l'asse  $y$ .

Inoltre, tenuto presente il riferimento scelto e la seconda parte di  $(\Omega)$

C) Le coordinate formano gruppo rispetto alla moltiplicazione naturale;

D)  $k(a + b) = ka + kb$  <sup>(5)</sup>.

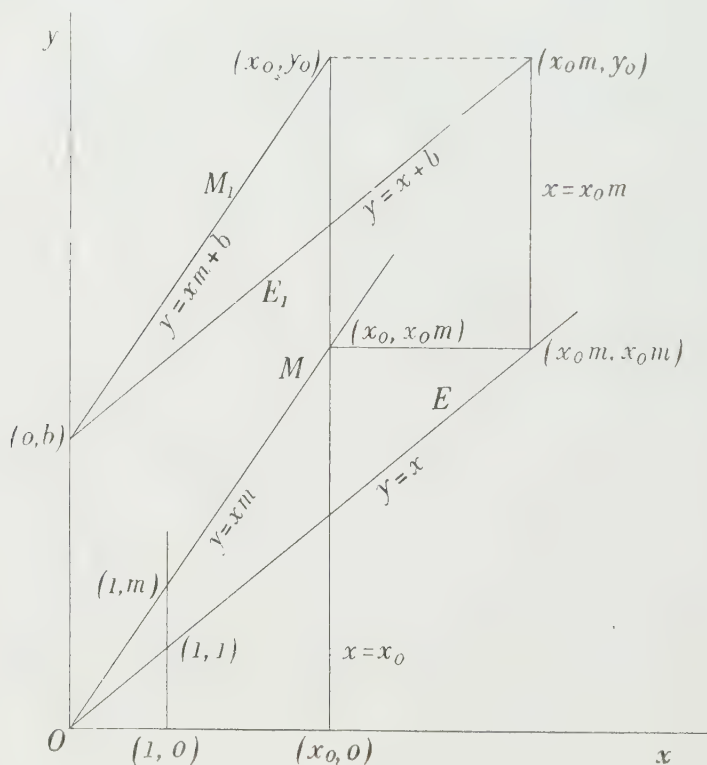


Fig. 1.

Dimostriamo ora la validità della:

E)  $x \cdot m^{\circ} b = xm + b$  (condizione di linearità).

Consideriamo la retta M per l'origine di « coefficiente direttivo »  $m$ , cioè di equazione  $y = xm$ , e l'affinità  $\mu$ , certo esistente per la prima parte di  $(\Omega)$ , di asse  $x = 0$  e di centro  $X^{\infty}$  che porta M nella retta unitaria E. L'affinità  $\mu$  porta allora (ved. fig. 1):

il punto  $(x_0, x_0 m)$  della M nel punto  $(x_0 m, x_0 m)$  della E;  
la retta  $x = x_0$  nella  $x = x_0 m$ ;

(5) Il professore GUNTER PICKERT dell'Università di Tübingen mi scrive che alcuni dei precedenti risultati, e in particolare l'ultimo, si trovano già in H. F. GINGERICH, *Generalized fields and Desargues configurations*, Abstract of a Thesis, Urbana, Illinois, USA. Non mi è però riuscito di prendere visione di questa ricerca.

il punto all'infinito  $\{m\}$  di  $M$  nel punto all'infinito  $\{1\}$  di  $E$ ;

la retta  $M_x$ , parallela alla  $M$  passante per  $(0, b)$ , nella  $E_x$ , parallela ad  $E$  per  $(0, b)$ ; la  $E_x$ , in forza di  $B$ ), è rappresentata dall'equazione  $x + y = b$ , ovverosia (tenendo conto di  $A$ )),  $y = x + b$ .

Il punto della  $M_x$  che ha per ascissa  $x_0$  ha per ordinata  $y_0 = x_0 \cdot m^\circ b$ ; tale punto, e cioè  $(x_0, y_0)$ , dovrà essere portato dall'affinità  $\mu$  in un punto di uguale ordinata e di ascissa  $x_0 m$ , cioè nel punto  $(x_0 m, y_0)$ ; quest'ultimo punto dovrà appartenere alla  $E_x = \mu(M_x)$ . Ma ciò significa che

$$y_0 = x_0 \cdot m^\circ b = x_0 m + b$$

e questa è la condizione di linearità  $E$ ). La retta  $M_x$  ha allora l'equazione  $y = x m + b$ .

Si dimostra infine, come nella mia precedente Nota, la validità degli assiomi di un sistema cartesiano per l'addizione e la moltiplicazione delle coordinate. Da  $A$ ) e  $C$ ) segue infatti che: le coordinate formano un gruppo rispetto all'addizione;  $0a = a0 = 0$ ; esiste una unità moltiplicativa. Da  $C$ ) e  $D$ ) discendono gli altri tre assiomi (l'ultimo con l'aggiunta della ipotesi della finitezza):

(I) da  $a \neq b$  e  $c \neq d$  segue  $ca - cb \neq da - db$ ;

(II) se  $a \neq b$  esiste un  $x$  tale che  $xa - xb = c$  ( $x$  è allora unico per I);

(III) se  $a \neq b$  c'è un  $y$  tale che  $-ay + by = c$  ( $y$  è allora unico per I).

Valendo inoltre la condizione di linearità sotto l'ipotesi  $(\Omega)$ , ed essendo tale ipotesi soddisfatta nel caso di un piano finito sopra un quasicorpo <sup>(6)</sup>, possiamo senz'altro affermare che il nostro piano, rispetto al riferimento prescelto, è un piano *sopra* un sistema cartesiano. Ma allora, per un teorema di Baer <sup>(7)</sup>, nel nostro piano esistono tutte le « traslazioni » (omologie speciali di asse improprio) aventi per centro il punto all'infinito dell'asse delle  $y$ . Quanto si è stabilito finora non dipende però dalla scelta di una retta per  $O$  come asse delle  $y$ , che così rimane in nostro arbitrio. Ciò vuol dire che il nostro piano è addirittura un « piano di traslazione », cioè che in esso esistono tutte le possibili traslazioni di centro arbitrariamente scelto sulla retta impropria. Esistendo, per  $(\Omega)$ , anche le omotetie di centro origine, il nostro piano è addirittura un piano su di un corpo, ed è quindi desarguesiano <sup>(8)</sup>.

(6) Nella precedente Nota volevo invece utilizzare l'ipotesi:  $(O)$  « esistono tutte le possibili omologie (non speciali) di centro  $O$  e asse  $a$  (non passante per  $O$ ) », più debole della  $(\Omega)$ ; con ciò restava una lacuna nella dimostrazione, e precisamente non veniva stabilita la condizione di linearità,  $E$ ). Il problema se la  $E$ ) discenda ugualmente dalla  $(O)$ , e dalla ipotesi di finitezza, resta attualmente aperto.

(7) R. BAER, *Homogeneity of projective planes*, « Amer. Journ. of Math. », 64, 127-15 (1942).

(8) Ved. ad esempio B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, I, pp. 111-122.



**Matematica.** - *Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane.* Nota di MARIO BENEDICTY, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Il presente lavoro rientra in quella che Conforto [4] ha chiamato la «teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane». Questa teoria, che trae le sue origini dalla fondamentale Memoria di Severi [7], si propone di studiare le classi di matrici quasi abeliane rispetto alla relazione di equivalenza  $\mathcal{Q}$  che si ottiene quando si definiscano equivalenti due matrici (complesse, simili)  $\omega^{(g, g')}, \omega'^{(g, g')}$  per le quali esistano una matrice complessa non degenera  $\alpha^{(g)}$  ed una matrice intera unimodulare  $\Lambda^{(g')}$  tali che  $\omega' = \alpha \omega \Lambda$ .

Scopo del lavoro è quello di introdurre una nuova forma canonica per le matrici quasi abeliane e di farne uso in alcune considerazioni sul problema dell'equivalenza tra matrici quasi abeliane normali; l'importanza di tale problema sta nel fatto che una sua soluzione può mostrare la via per impostare in modo conveniente la teoria delle funzioni quasi abeliane modulari.

Faccio osservare che, contrariamente a quanto avviene nella teoria delle funzioni abeliane, lo studio delle classi di matrici quasi abeliane rispetto alla relazione  $\mathcal{Q}$  non è equivalente (cfr. [5], [7]) allo studio dei corpi di funzioni quasi abeliane a meno di sostituzioni lineari non degeneri sulle variabili; esso è bensì equivalente allo studio, sempre a meno di siffatte sostituzioni, di quei corpi di funzioni meromorfe (al finito) di  $g$  variabili effettive (nel senso ben noto; cfr. ad esempio [3]), con  $g' \leq 2g$  periodi indipendenti comuni, i quali contengano corpi di funzioni quasi abeliane con lo stesso numero di variabili e con gli stessi periodi.

Aggiungo che mi attengo qui alla definizione  $\alpha)$  di Severi [7, p. 125] di funzioni quasi abeliane, e alla conseguente definizione di matrice quasi abeliana come quella equivalente a qualche matrice in forma normale di Severi.

2. PREMESSE. - Per *matrice normale di Severi* (brevemente: MNS) di caratteri  $p, \delta_1, \delta_2, \rho$  intendo una matrice:

$$(A) \quad \omega = \begin{vmatrix} \Delta^{-1} & O & \Omega \\ O & U & \Phi_1 \\ O & O & \Psi_1 \end{vmatrix},$$

nella quale:

$(A_1) \quad \Delta^{(p)}$  è una matrice diagonale intera i cui elementi principali  $d_1, d_2, \dots, d_p$  sono interi positivi tali che  $d_1 = 1$  e  $d_{h-1}$  divida  $d_h$  ( $h=2, \dots, p$ )

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

$(A_2) \Omega^{(\rho)} = \Omega' + i\Omega''$  è una matrice complessa simmetrica la cui parte immaginaria  $\Omega''$  è maggiore di zero (ossia è matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita e positiva);

$(A_3) \Phi^{(\delta_1, \rho)} = \begin{vmatrix} O^{(\delta_1, \rho)} & \Phi^{(\delta_1, \rho - \rho)} \end{vmatrix}$ , con  $\Phi$  matrice complessa arbitraria;

$(A_4) \Psi^{(\delta_2, \rho)} = \begin{vmatrix} U^{(\rho)} & \Psi^{(\rho, \rho - \rho)} \\ O^{(\delta_2 - \rho, \rho)} & O^{(\delta_2 - \rho, \rho - \rho)} \end{vmatrix}$ , con  $\Psi$  matrice complessa arbitraria.

Ho già chiarito in [1] l'equivalenza tra questa definizione e quella originaria di Severi [7, p. 164].

Secondo l'uso introdotto da Conforto [6], chiamo *livello* di una MNS l'insieme dei suoi divisori elementari; chiamo inoltre *strato* l'insieme degli interi caratteristici  $\rho, \delta_1, \delta_2, \rho$ . Una MNS si dirà *generica* se le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario degli elementi  $\tau_{rs}$  ( $r \leq s$ ;  $r, s = 1, 2, \dots, \rho$ ) di  $\Omega$  e di tutti gli elementi di  $\Phi$  e  $\Psi$  sono algebricamente indipendenti sul campo razionale  $\mathcal{K}$ . Ho provato in [1] che, se  $\rho - \rho > 1$ , una generica MNS individua univocamente il suo strato ed il suo livello. Ho provato inoltre che [2, Teorema II]: fissata una generica MNS  $\omega^{(g, g')}$  per la quale  $\rho - \rho > 1$  e una matrice intera unimodulare  $\Gamma^{(g')}$ , condizione necessaria e sufficiente perché esista una matrice complessa non degenerare  $\gamma^{(g)}$  tale che  $\omega^* = \gamma\omega\Gamma$  sia una MNS è che  $\Gamma$  appartenga al gruppo unimodulare ristretto relativo al livello  $\Delta$  e al carattere  $\delta_1$  di  $\omega$  (cfr. [2]); tale gruppo è indicato con  $GR[\Delta, \delta_1]$ .

3. LA FORMA NORMALE  $\chi$ . - Sia data una MNS,  $\omega$ . Sia  $\gamma_o^{(g)}$  la matrice complessa (non degenerare) così definita: scritta  $\gamma_o$  nella forma  $\gamma_o = \|\gamma_{rs}\|$  ( $r, s = 1, 2, \dots, 5$ ) ottenuta separando in essa successivamente  $\rho, \rho - \rho, \delta_1, \rho, \delta_2 - \rho$  righe e colonne e scritta la  $\Omega(B_2)$  nella forma  $\Omega \begin{vmatrix} \Omega_{11}^{(\rho)} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22}^{(\rho - \rho)} \end{vmatrix}$ , si prenda  $\gamma_{rr} = U, \gamma_{14} = -\Omega_{11}$  e tutte le altre matrici minori di  $\gamma_o$  siano nulle. È allora immediato che  $\gamma_o \omega$  è una matrice della struttura della (A), nella quale però al posto della  $\Omega$  compare la matrice (simmetrica):

$$\begin{vmatrix} O & \Omega_{12} - \Omega_{11} \Psi \\ (\Omega_{12} - \Omega_{11} \Psi)_{-1} & \Omega_{22} - \Psi_{-1} \Omega_{11} \Psi \end{vmatrix}.$$

Orbene, assumo come matrice normale  $\chi$  (brevemente:  $MN\chi$ ), una matrice del tipo ora visto, cioè una matrice:

$$(B) \chi = \begin{vmatrix} \Delta^{-1} & O & X \\ O & U & \Phi_1 \\ O & O & \Psi_1 \end{vmatrix},$$

nella quale:

$(B_1) \Delta^{(\rho)}$  è data dalla  $(A_1)$ ;

$(B_2) X^{(\rho)} = \begin{vmatrix} O^{(\rho)} & G^{(\rho, \rho - \rho)} \\ G_{-1} & F^{(\rho - \rho)} \end{vmatrix}$ , con  $F, G$  matrici complesse e  $F$  simmetrica;

$(B_3)$ ,  $(B_4)$   $\Phi_i$ ,  $\Psi_i$  sono date dalle  $(A_3)$ ,  $(A_4)$ ;

$(B_5)$  esiste una matrice complessa  $\Omega_{ii}$  (necessariamente simmetrica a parte immaginaria positiva) tale che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{ii} & G + \Omega_{ii} \Psi \\ (G + \Omega_{ii} \Psi)_{-i} & F + \Psi_{-i} \Omega_{ii} \Psi \end{vmatrix}$$

sia simmetrica ed abbia parte immaginaria positiva.

Le prime condizioni sono ovvie; l'ultima proviene dalle uguaglianze

$$F = \Omega_{22} - \Psi_{-i} \Omega_{ii} \Psi, \quad G = \Omega_{12} - \Omega_{ii} \Psi.$$

È inoltre evidente che essa permette di affermare che ogni  $MN\chi$  è equivalente ad una MNS. Ne segue che la definizione di matrice quasi abeliana data alla fine del n. 1 rimane inalterata se al posto delle MNS si considerano le  $MN\chi$ .

4. RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UNA  $MN\chi$ . - Nella matrice  $\chi$  data dalla (B) la matrice  $\Phi$  rimane arbitraria in senso assoluto.

La  $\Psi$  è arbitraria nella (A) e quindi tale rimane nella (B), quando la si consideri a sè stante. Grazie all'arbitrarietà della  $\Psi$ , al fatto che  $|\Omega_{ii}| \neq 0$  e all'indipendenza di  $\Omega_{ii}$ ,  $\Omega_{12}$ , è arbitraria anche  $G$ , presa a sè. La condizione  $(B_5)$  pone tuttavia (almeno di regola) certe relazioni di disuguaglianza tra gli elementi di  $F$ ,  $G$ ,  $\Psi$ . Si noti però esplicitamente che:

*Oltre alle relazioni di simmetria della  $F$ , non interviene alcun'altra relazione di uguaglianza tra gli elementi di  $F$ ,  $G$ ,  $\Psi$ .*

Per provarlo, scriviamo anzitutto le matrici in questione nella forma

$$F = F' + iF'', \quad G = G' + iG'', \quad \Psi = \Psi' + i\Psi'',$$

ottenuta scindendo la parte reale e la parte immaginaria. È anzitutto evidente che le matrici  $F'$ ,  $G'$  non intervengono affatto nella condizione  $(B_5)$ . La quaterna delle rimanenti matrici  $F''$ ,  $G''$ ,  $\Psi'$ ,  $\Psi''$  si rappresenti mediante un punto  $P$  dello spazio euclideo reale  $R^*$  di dimensione  $\frac{(p-\rho)(p-\rho+1)}{2} + 3\rho(p-\rho) = \frac{(p-\rho)(p+5\rho+1)}{2}$ , nel quale sono coordinate, in un prefissato ordine, gli elementi  $f''_{rs}$  ( $r \leq s$ ;  $r, s = 1, 2, \dots, p-\rho$ ) di  $F''$  e tutti gli elementi di  $G''$ ,  $\Psi'$ ,  $\Psi''$ . Sia ora  $P_0$  il punto immagine di una fissata quaterna per la quale valga la condizione  $(B_5)$ ; sia  $\Omega_{ii} = \Omega'_{ii} + i\Omega''_{ii}$  una fissata matrice rispetto alla quale valga tale condizione. La  $(B_5)$  equivale allora a  $p-\rho$  disuguaglianze ottenute imponendo il segno positivo a certi polinomi su  $\mathfrak{K}[\Omega'_{ii}, \Omega''_{ii}]$  nelle coordinate di  $P$  (indico brevemente con  $\mathfrak{K}[A, \dots]$  l'anello ottenuto da  $\mathfrak{K}$  mediante anelloaggiunzione degli elementi delle matrici indicate tra parentesi quadra). Essendo tali relazioni soddisfatte (in senso stretto) in  $P_0$ , esse rimangono soddisfatte, con la stessa  $\Omega_{ii}$ , in tutto un conveniente intorno di  $P_0$ ; e ciò prova l'enunciato.

Si è provato contemporaneamente che i punti delle quaterne  $F'', G'', \Psi'', \Psi'''$  relative alle  $MN\chi$  formano in  $R^*$  un campo.

Per ogni prefissato strato e livello si rappresentino le  $MN\chi$  con punti di uno spazio euclideo complesso  $S_d$  di dimensione  $d = \frac{(p-\rho)(p-\rho+1)}{2} + 2\rho(p-\rho) + \delta_i(p-\rho) = \frac{p-\rho}{2}(p+3\rho+2\delta_i+1)$  nel quale sono coordinate gli elementi  $f_{rs}$  ( $r \leq s$ ;  $r, s = 1; \dots, p-\rho$ ) di  $F$  e tutti gli elementi di  $G, \Phi, \Psi'$ , ovvero con punti di uno spazio euclideo reale  $R_{2d}$  di dimensione  $2d = (p-\rho)(p+3\rho+2\delta_i+1)$  nel quale sono coordinate le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei suddetti elementi. Le proprietà precedenti provano allora che:

*L'insieme delle  $MN\chi$  di dati strato e livello è rappresentato in  $R_{2d}$  dai punti di un campo  $B$ , che risulta una regione cilindrica con spazi generatori paralleli allo spazio sul quale si annullano gli elementi di  $F'', G'', \Psi'', \Psi'''$ .*

Quando precede consente di dare la seguente definizione: si dice *generica* una  $MN\chi$  tale che le coordinate del suo punto immagine in  $R_{2d}$  siano algebricamente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

La dimostrazione ora svolta, insieme con le osservazioni fatte all'inizio di questo numero, prova altresì che la trasformazione fatta all'inizio del n. 3 porta MNS generiche in  $MN\chi$  generiche. Se si imita il ragionamento, tenendo però fissa la  $\chi$  e facendo variare  $\Omega_{ii}$ , è immediato che questa può variare liberamente in un conveniente intorno di una sua posizione; ciò prova che, fissata una  $MN\chi$  generica, tra le  $\gamma_0$  tali che  $\gamma_0^{-1}\chi$  sia una MNS, ce ne sono di tali che  $\gamma_0^{-1}\chi$  sia una MNS generica.

Ne seguono le proposizioni:

*Una  $MN\chi$  generica, per la quale  $p-\rho > 1$ , individua il suo strato e il suo livello.*

Sia infatti  $\chi$  la matrice data e  $\chi^*$  una  $MN\chi$  ad essa equivalente. Sia  $\gamma_0$  una matrice complessa non degenera tale che  $\omega = \gamma_0^{-1}\chi$  sia una MNS generica dello stesso livello e strato di  $\chi$ . Sia  $\gamma_0^*$  tale che  $\omega^* = \gamma_0^{*-1}\chi^*$  sia una MNS dello stesso livello e strato di  $\chi^*$ . Allora  $\omega, \omega^*$  sono equivalenti e [2, Teorema II] appartengono perciò allo stesso strato e livello. Lo stesso vale quindi per  $\chi$  e  $\chi^*$ .

*Fissata una generica  $MN\chi, \chi^{(g, g')}$ , e una matrice intera unimodulare  $\Gamma^{(g')}$ , condizione necessaria e sufficiente perchè esista una matrice complessa non degenera  $\delta^{(g)}$  tale che  $\delta\chi\Gamma$  sia una  $MN\chi$  è che  $\Gamma$  appartenga a  $GR[\Delta, \delta_i]$ . Se  $p-\rho = 0, 1$  la condizione è sufficiente.*

Con le notazioni della dimostrazione precedente, esista  $\delta$  tale che  $\chi^* = \delta\chi\Gamma$  sia una  $MN\chi$ , essendo  $\Gamma$  unimodulare intera. Si ha  $\omega^* = \gamma_0^{*-1}\chi^* = \gamma_0^{*-1}\delta\gamma_0\gamma_0^{-1}\chi\Gamma = (\gamma_0^{*-1}\delta\gamma_0)\omega\Gamma$  con  $\omega$  MNS generica e  $\omega^*$  MNS. Quindi [2, Teorema II], se  $p-\rho > 1$  è  $\Gamma \in GR[\Delta, \delta_i]$ . Inversamente, se  $\Gamma \in GR[\Delta, \delta_i]$ , esiste  $\gamma$  tale che  $\omega^* = \gamma\gamma_0^{-1}\chi\Gamma$  sia una MNS, quindi esiste  $\delta = \gamma_0^*\gamma\gamma_0^{-1}$  tale che  $\chi^* = \gamma_0^*\omega^* = \delta\chi\Gamma$  sia una  $MN\chi$ ; e il teorema è provato.



5. OSSERVAZIONI. - I. Se  $\chi$  è una  $MN\chi$  e  $\delta$  una matrice complessa non degenera tale che  $\delta\chi$  sia una  $MN\chi$ , si ha  $\delta\chi = \chi$ .

Posto  $\chi_r = \delta\chi$  e scissa  $\delta$  in matrici minori  $\delta_{rs}$  come si è fatto per la  $\gamma_0$  dell'inizio del n. 2, si prova con semplicissimo calcolo che per rendere  $\chi$  una  $MN\chi$  occorre prendere:  $\delta_{rr} = U$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ),  $\delta_{rs}$  ( $r = 1, 2, \dots, 5$ ) arbitrarie, salva la condizione  $|\delta_{55}| \neq 0$ , e tutte le altre matrici minori non nulle. Da questa forma di  $\delta$  segue poi immediatamente la tesi.

In forma equivalente: Se  $\omega^{(g, g')}$  è una matrice quasi abeliana tale che esista una matrice complessa non degenera  $\delta^{(g)}$  siffatta che  $\delta\omega$  sia una  $MN\chi$ , questa è univocamente determinata da  $\omega$ .

In particolare: Se  $\omega^{(g, g')}$  è una matrice quasi abeliana e  $\Gamma^{(g')}$  una matrice unimodulare, e se esiste una matrice complessa non degenera  $\delta^{(g)}$  tale che  $\delta\omega\Gamma$  sia una  $MN\chi$ , questa è univocamente determinata da  $\omega$  e da  $\Gamma$ .

II. L'osservazione precedente, unita all'ultimo teorema del n. 4, permette di affermare che, se  $\chi$  è una  $MN\chi$  generica qualsiasi e  $\Gamma$  una prefissata matrice di  $GR[\Delta, \delta_1]$ , e se a  $\chi$  si associa la matrice  $\chi^* = \delta\chi\Gamma$ , essendo  $\delta$  complessa non degenera e  $\chi^*$  una  $MN\chi$ , si ottiene una corrispondenza univoca dell'insieme delle  $MN\chi$  generiche nell'insieme delle  $MN\chi$ . Se tale corrispondenza si estende a tutte le  $MN\chi$ , si ottiene una corrispondenza generalmente univoca dell'insieme  $B$  in se stesso, anzi, per il fatto che  $GR[\Delta, \delta_1]$  è un gruppo, si ottiene una corrispondenza generalmente biunivoca di  $B$  su se stesso. E se  $p - \rho > 1$ , tale insieme di corrispondenze non è ulteriormente ampliabile.

Facendo variare  $\Gamma$  in  $GR[\Delta, \delta_1]$  si ha dunque che:

L'associazione  $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$ , al variare di  $\Gamma$  in  $GR[\Delta, \delta_1]$ , rappresenta un gruppo di corrispondenze generalmente biunivoche in sè dell'insieme delle  $MN\chi$  di un dato strato e livello, gruppo non ulteriormente ampliabile se  $p - \rho > 1$ .

III. Nell'enunciato precedente l'avverbio «generalmente» può intendersi sia nel significato già definito in questa Nota (cioè quando si riferisca la corrispondenza solo a matrici generiche) sia nel significato tradizionale della geometria algebrica (cioè quando, in  $S_d$ , si riferisca la corrispondenza ai punti che non giacciono sopra una certa varietà algebrica determinata da  $\Gamma$ ). E ciò perchè la corrispondenza  $\chi \rightarrow \chi^*$  è una trasformazione birazionale di  $S_d$  in sè. Se infatti, a partire dalla  $MN\chi$ , sia essa  $\chi$ , generica, si passa, come si è visto più volte, ad una MNS generica  $\omega = \gamma_0^{-1}\chi$ , e da questa, col calcolo svolto in [2, n. 2], ad una MNS  $\omega^* = \gamma_0\omega\Gamma$  e quindi ad una  $MN\chi$   $\chi^* = \gamma_0^*\omega^*$ , è evidente che gli elementi di  $\chi^*$  dipendono razionalmente dagli elementi di  $\chi$  e, a priori, dagli elementi della arbitraria matrice  $\Omega_{11}$  fissata nel primo passaggio; poichè però la  $\chi^*$  è univocamente determinata da  $\chi$  e da  $\Gamma$ , gli elementi della  $\Omega_{11}$  non intervengono in effetti, e la proposizione è così dimostrata.

IV. Dalle osservazioni precedenti segue che l'insieme delle  $MN\chi$  equivalenti ad una generica  $MN\chi$  costituisce al più un'infinità numerabile. Si può quindi affermare che:



Le classi di  $MN\chi$ , rispetto alla relazione di equivalenza  $\mathcal{L}$ , costituiscono un insieme dipendente da  $d = \frac{(p-q)(p+3q+2\delta_1+1)}{2}$  parametri complessi.

V. Si noti che esistono matrici  $\Gamma$  di  $GR[\Delta, \delta_1]$ , anche diverse dalla matrice identica, tali che la trasformazione  $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$  sia assolutamente biunivoca in  $B$ ; valgono come esempio le matrici:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} U^{(p)} & O & O \\ O & R^{(\delta_1)} & O \\ O & O & U^{(p)} \end{pmatrix},$$

con  $R$  unimodulare. Basta ripetere per esse il calcolo svolto in [2, n. 2], a partire da una  $MN\chi$  qualunque purché si ponga  $X$ , data da  $(B_2)$  al posto della  $\Omega$ , data da  $(A_2)$ ; la sostituzione è qui legittima, perché, tenuto conto della forma di  $\Gamma$  e con riferimento al calcolo citato, risulta:  $|\Delta^{-1}D + \Omega C| = |\Delta^{-1}| = \pm 1$ ,  $L_{11} = A_{11}$ ,  $L_{21} = 0$ ,  $|L_{11} + \Psi L_{21}| = |A_{11}| = \pm 1$ ; quindi esiste unica la  $\chi^*$ , qualunque sia  $\chi$ .

È d'altronde evidente che, almeno per certi strati, la trasformazione  $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$  ammette eccezioni per certe  $\Gamma$  di  $GR[\Delta, \delta_1]$ . Sia infatti  $0 < 2p \leq p$ . Si prenda  $V^{(q, p-q)} = \|U^{(q)} W^{(q, p-2q)}\|$ , con  $W$  intera arbitraria, e, scritta  $\Delta$  nella forma  $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1^{(q)} & O \\ O & \Delta_2^{(p-q)} \end{pmatrix}$ , si assuma:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} U^{(q)} & \Delta_1 V \\ & U^{(p-q)} \\ & & R^{(\delta_1)} \\ & & & U^{(q)} \\ & & & & -\Delta_2 V_{-1} U^{(p-q)} \end{pmatrix},$$

con  $R$  unimodulare intera arbitraria (le matrici minori non indicate sono nulle). È immediata la verifica che  $\Gamma \in GR[\Delta, \delta_1]$ . Con riferimento a [2, n. 2] si ponga  $L_{21} = \begin{pmatrix} L_a^{(q)} \\ L_b^{(p-q, q)} \end{pmatrix}$  e si prenda  $\Psi_a = -(L_{11} + \Psi_b L_b) L_a^{-1}$ , con  $\Psi_b$  complessa arbitraria; si prenda poi  $\Psi = \|\Psi_a \Psi_b\|$ . Risulta allora  $L_{21} = A_{21} = \Delta_1 V$  e quindi  $|L_a| = |\Delta_1| = \pm 1$ ; ciò legittima anzitutto la scelta di  $\Psi_a$ . Ne segue  $L_{11} + \Psi L_{21} = 0$  e ciò qualunque sia  $\Omega_{11}$ , anche se non soddisfacente alla  $(B_5)$ . La  $\chi \rightarrow \chi^*$  soffre dunque eccezione almeno per queste particolari  $\chi$ .

VI. Sorge quindi automaticamente il problema di determinare in  $GR[\Delta, \delta_1]$  la totalità delle matrici  $\Gamma$  tali che l'associazione  $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$  rappresenti una trasformazione assolutamente biunivoca nell'insieme  $B$ . Per quanto detto nell'osservazione precedente, tale insieme, che evidentemente è un sottogruppo  $G'[\Delta, \delta_1]$  di  $GR[\Delta, \delta_1]$ , non si riduce mai al solo elemento identico, e non accade sempre che esso invada tutto il  $GR[\Delta, \delta_1]$ .

VII. I due gruppi di matrici  $GR[\Delta, \delta_i]$  e  $G'[\Delta, \delta_i]$  inducono quindi in  $B$  due gruppi di trasformazioni - indichiamoli con  $T[\Delta, \delta_i]$ ,  $T'[\Delta, \delta_i]$  - che sono due possibili generalizzazioni del gruppo  $G_\Delta$  (cfr. [6, p. 122]) indotto nella regione immagine delle matrici normali di Riemann di dato livello dalle matrici del gruppo modulare ristretto dello stesso livello.

Come si è visto,  $T'$  è un gruppo di trasformazioni biunivoche senza eccezione, così come  $G_\Delta$  nella teoria delle matrici di Riemann;  $T$  è costituito invece, almeno di regola, anche da trasformazioni che ammettono eccezioni; esso ha d'altra parte una struttura formale più vicina a quella di  $G_\Delta$  e quindi, tra le due generalizzazioni, mi sembra la migliore. È da tener poi presente che se  $p - \rho = 0,1$  tali gruppi possono essere ampliabili.

VIII. In ogni caso l'introduzione delle  $MN\chi$  e del concetto di gruppo unimodulare ristretto permettono, come si è visto, di trovare un insieme di matrici e certe trasformazioni che prendono il posto, nella teoria delle matrici quasi abeliane, delle matrici normali di Riemann e delle trasformazioni di  $G_\Delta$ , nella teoria delle matrici di Riemann.

Si schiude così la strada ad un complesso di interessanti questioni quali l'esistenza e l'eventuale costruzione di un campo fondamentale rispetto a  $T'$  o, interpretando opportunamente i fenomeni dovuti alla presenza di eccezioni, rispetto a  $T$ ; l'estensione del concetto di gruppo simplettico e questioni connesse; la ricerca delle matrici quasi abeliane che possiedono rappresentanti in strati diversi ovvero nello stesso strato e in livelli diversi; questione questa collegata con lo studio delle  $MN\chi$  che sono equivalenti secondo la relazione  $\mathcal{L}$ , ma non trasformabili l'una nell'altra mediante un'operazione di  $T$ . Problemi, come si vede, che sono generalizzazioni, sia pure in senso non affatto banale, di questioni analoghe delle teoria aritmetica delle funzioni abeliane. Si pone inoltre sotto nuova luce il problema della ricerca dell'analogo della forma principale; esso si presenta sotto i due aspetti di determinare in forma compatta le condizioni perchè una matrice complessa sia equivalente ad una  $MNS$  ovvero ad una  $MN\chi$ ; simultaneamente si pone la questione di determinare in via diretta le condizioni alle quali devono soddisfare  $F, G, \Psi$  di  $(B)$  perchè sia verificata la condizione  $(B_s)$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. BENEDICTY, *Sull'equivalenza tra matrici normali di Severi*, «Ann. di Mat.» (4), 38 (1955).
- [2] M. BENEDICTY, *Sulla definizione di gruppo unimodulare ristretto*, «Rend. di Mat.» (5), 14 (1955).
- [3] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, I, Corsi dell'Ist. Naz. di Alta Mat., Libreria dell'Università, Roma (1942).
- [4] F. CONFORTO, *Sulla totalità delle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana*, «Ann. di Mat.» (4), 28 (1949).
- [5] F. CONFORTO, *Sulla nozione di corpi equivalenti e di corpi coincidenti nella teoria delle funzioni quasi abeliane*, «Rend. Sem. Padova», 18 (1949).
- [6] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, I, Lezioni raccolte dal dott. M. Rosati, Corsi dell'Ist. Naz. di Alta Mat., Docet, Roma (1952).
- [7] F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane*, «Pont. Ac. Scient. Scripta Varia», 4 (1947).

**Teoria delle funzioni analitiche.** - *Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze.* Nota di GIOVANNI RICCI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

1. Sia  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  convergente (almeno) per  $|z| \leq r$  e, seguendo l'uso, poniamo

$$M(f; r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \text{ (massimo modulo)}$$

$$M_2(f; r) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}, \text{ (media quadratica)}$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2}, \quad (z = re^{i\theta}),$$

$$\mathfrak{M}(f; r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n, \text{ (funzione maggiorante).}$$

È noto ed evidente che  $M_2(f; r) \leq M(f; r) \leq \mathfrak{M}(f; r)$ .

Sul confronto di  $\mathfrak{M}(f; ur)$  con  $M(f; r)$  sussistono le seguenti proposizioni (1): « $\mathfrak{M}(f; r/6) < M(f; r)$  per ogni  $f(z)$ , (H. Bohr)»; « $\mathfrak{M}(f; r/3) \leq M(f; r)$  per ogni  $f(z)$ ;  $1/3$  è la migliore costante (2) (H. Bohr-M. Riesz-I. Schur-F. Wiener)».

Ci proponiamo di confrontare  $\mathfrak{M}(f; ur)$  con  $M_2(f; r)$  per stabilire proposizioni analoghe: il problema è significativo poiché non soltanto  $M_2(f; r) \leq M(f; r)$ , ma può accadere che, per valori di  $r$  minori del raggio di convergenza, la funzione  $M_2(f; r)$  si mantenga limitata mentre  $M(f; r)$  no (esempio:  $f(z) = \sum z^n / (\sqrt{n} \log n)$ ). Domandiamoci: Esiste un numero positivo  $\gamma$  (abbastanza piccolo) tale che per ogni  $f(z) = \sum a_n z^n$ , convergente (almeno) in  $|z| \leq r$ , si abbia  $\mathfrak{M}(f; \gamma r) \leq M_2(f; r)$ ? La risposta è *no*. Infatti, sia  $f(z) = a_0 + a_h z^h$  ( $a_0 \neq 0$ ,  $h \geq 1$ ,  $a_h \neq 0$ ): per avere  $\mathfrak{M}(f; ur) > M_2(f; r)$  basta che  $u$  sia scelto in guisa che sia

$$\{|a_0| + |a_h| (ur)^h\}^2 > |a_0|^2 + |a_h|^2 r^{2h}$$

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Vedi H. BOHR, *A theorem concerning power series*, «Proc. London Math. Soc.», 13, 1-5 (1913); E. LANDAU, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1929, pp. 10, 32-34.

(2) Cioè il teorema cessa di valere quando si sostituisce  $(1/3) + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) al coefficiente  $1/3$ .

cioè, semplificando, basta

$$u^{2h} + 2b u^h - 1 > 0, \quad (b = |a_0|/(|a_h| r^h))$$

ed è quindi sufficiente

$$\begin{aligned} u^h &> -b + \sqrt{b^2 + 1} = b \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{b^2} - \frac{1}{8} \frac{1}{b^4} + \cdots - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2b} - \frac{1}{8b^3} + \cdots \rightarrow 0 \text{ per } b \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

cioè per  $r \rightarrow 0+$ . L'estremo inferiore di tali numeri  $u$  è nullo e  $\gamma > 0$  non esiste. Pertanto, una proposizione che risponda al quesito che ci siamo posti dovrà tenere conto del valore  $a_0 = f(0)$ .

2. Sia  $R$  (eventualmente infinito) il raggio di convergenza della serie  $\sum a_n z^n$ : in accordo con la definizione di  $M_2(f; r)$  e  $\mathfrak{M}(f; r)$  mediante la serie, introduciamo la seguente convenzione (molto naturale) per  $r \geq R$ : Se  $r > R$  si pone  $M_2(f; r) = +\infty$ ,  $\mathfrak{M}(f; r) = +\infty$ . Ciascuno dei due numeri  $M_2(f; R)$ ,  $\mathfrak{M}(f; R)$  è finito o infinito (positivo) secondoché converge o diverge la serie corrispondente.

Vale il seguente

TEOREMA I. - Esiste  $\gamma > 0$  tale che per ogni  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e per ogni  $r$  si abbia

$$(2.1) \quad \mathfrak{M}(f; \gamma r) - |f(0)| \leq \{M_2^2(f; r) - |f(0)|^2\}^{1/2}.$$

*Dimostrazione.* - Se  $M_2(f; r) = +\infty$  la (2.1) vale per ogni  $\gamma$ , pertanto il teorema è significativo nel caso in cui  $M_2(f; r)$  è finito (e quindi necessariamente  $r \leq R$ ).

È noto che per  $p > 1$ ,  $c_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) vale la disuguaglianza (3)

$$(2.2) \quad \int_0^1 (1-x)^{p-2} \left\{ \sum_1^{\infty} c_n x^n \right\}^p dx \leq K(p) \cdot \sum_1^{\infty} c_n^p, \quad (K(p) > 0).$$

Poniamo  $p=2$ ,  $K(2)=K$ ,  $c_n = |a_n| r^n$ ,  $g(z) = f(z) - a_0 = \sum_1^{\infty} a_n z^n$  e la precedente disuguaglianza (2.2) assume la forma

$$(2.3) \quad \int_0^1 \mathfrak{M}^2(g; xr) dx \leq K \cdot M_2^2(g; r).$$

(3). G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD, *Elementary theorems concerning power series...*, « Journ. für Math. », 157, 141-158 (1927).

Sia  $\lambda = \lambda(g; r)$  l'estremo inferiore dei valori  $x$  pei quali  $\mathfrak{M}(g; xr) \geq M_2(g; r)$ ; è evidente che  $\lambda \leq 1$ . Teniamo conto che  $\mathfrak{M}(g; t\lambda r)$  è funzione crescente e convessa di  $t$  (poiché ha le derivate non negative) e quindi  $\mathfrak{M}(g; t\lambda r) \geq t\mathfrak{M}(g; \lambda r)$  quando  $t > 1$ ; tenendo conto di questa osservazione otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathfrak{M}^2(g; xr) dx &\geq \int_{\lambda}^1 \mathfrak{M}^2(g; xr) dx = \lambda \int_1^{1/\lambda} \mathfrak{M}^2(g; t\lambda r) dt \\ &\geq \lambda M_2^2(g; r) \int_1^{1/\lambda} t^2 dt = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) M_2^2(g; r). \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza, unita alla (2.3), ci dà

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) \leq K$$

e  $\lambda$  non è inferiore all'unica radice positiva del trinomio  $\lambda^3 + 3K\lambda^2 - 1$ . Ricordando che  $g(z) = f(z) - a_0$  e anche il significato di  $K$  e  $\lambda$ , ne segue l'asserto: la (2.1) vale con  $\gamma = \gamma_0$ .

3. Poniamo il problema: quale è il migliore valore per la costante  $\gamma$ ? (cioè l'estremo superiore  $\bar{\gamma}$ , che è anche massimo, dei numeri positivi  $\gamma$  pei quali vale (2.1)?). È evidente che  $\gamma_0 \leq \bar{\gamma} \leq 1$ . A questo problema rispondono i due teoremi seguenti.

TEOREMA II. - Per ogni  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e per ogni  $r \geq 0$  vale la disuguaglianza

$$(A_1) \quad \mathfrak{M}(f; r/\sqrt{2}) - |f(0)| \leq \{M_2^2(f; r) - |f(0)|^2\}^{1/2}$$

e il coefficiente  $1/\sqrt{2}$  è la « migliore costante ».

TEOREMA III. - Denotiamo con  $\mathcal{C}_h$  ( $h \geq 1$ ) la classe delle funzioni  $f(z) = a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \dots$  (aventi uno zero di molteplicità almeno  $h$  nell'origine).

Per ogni  $f(z) \in \mathcal{C}_h$  e per ogni  $r \geq 0$  vale la disuguaglianza

$$(A_h) \quad \mathfrak{M}(f; \gamma_h r) \leq M_2(f; r)$$

dove  $\gamma_h$  è la radice positiva dell'equazione in  $\xi$

$$\xi^{2h} + \xi^2 - 1 = 0.$$

Inoltre  $\gamma_h$  è la « migliore costante ».



*Osservazioni.* - 1<sup>a</sup> Per  $h = 1$  il Teorema III si riduce al Teorema II nel quale figura  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ .

2<sup>a</sup> Poiché  $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \dots$  deve essere  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ .

3<sup>a</sup> Confrontiamo  $(A_1)$  col teorema di H. Bohr-F. Wiener ricordato sopra: nonostante che sia  $M_2 \leq M$ , la costante  $1/3$  si può sostituire con quella più favorevole  $1/\sqrt{2}$  grazie alla normalizzazione nell'origine.

4<sup>a</sup> I primi valori di  $\gamma_h$  sono

$$\gamma_1 = 1/\sqrt{2} = 0,707\dots$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = 0,786\dots$$

$$\gamma_3 = \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{(93)^{1/2}}{18} \right)^{1/3} - \left( \frac{(93)^{1/2}}{18} - \frac{1}{2} \right)^{1/3} \right\}^{1/2} = 0,82\dots$$

5<sup>a</sup> Si riconosce immediatamente che  $\gamma_h$  è funzione crescente con  $h$ . Poniamo  $\xi^2 = 1 - \eta$ , allora è  $\eta + \eta^{1/h} - 1 = 0$  e quindi  $h \log(1 - \eta) = \log \eta$  e si ricava  $\eta \sim (\log h)/h$ , per  $h \rightarrow +\infty$ . Pertanto

$$\gamma_h = 1 - \frac{(1 + \varepsilon_h) \log h}{2h}, \quad (\varepsilon_h \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow +\infty).$$

4. *Dimostrazione.* - Basta dimostrare il Teorema III, e limitatamente nel caso in cui  $M_2(f; r)$  è finito.

Sia  $0 < \rho < r$ : La disuguaglianza di Bounikowski-Schwarz ci dà

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(f; \rho) &= \sum_0^\infty |a_n| \rho^n = \sum_0^\infty |a_n| r^n \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \\ &\leq \left( \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi vale la disuguaglianza

$$(4.1) \quad \mathfrak{M}(f; \rho) \leq \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} M_2(f; r)$$

che è già interessante in se stessa e vale per ogni  $f(z)$ .

Sia  $f(z) \in \mathcal{C}_h$ ; allora ci è consentito di eludere il moltiplicatore nel secondo membro di (4.1). Poniamo  $f(z) = z^h g(z)$  e allora per (4.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(f; \rho) &= \rho^h \mathfrak{M}(g; \rho) \leq \frac{\rho^h r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} M_2(g; r) \\ &= \frac{\rho^h}{r^{h-1} \sqrt{r^2 - \rho^2}} M_2(f; r). \end{aligned}$$

Posto  $\rho = ur$ , avremo pertanto

$$(4.2) \quad \mathfrak{M}(f; ur) \leq M_2(f; r)$$

quando  $u^h/\sqrt{1-u^2} \leq 1$  cioè

$$(4.3) \quad u^{2h} + u^2 - 1 \leq 0.$$

Il polinomio  $\xi^{2h} + \xi^2 - 1$  è negativo per  $\xi = 0$  ed ha derivata positiva per  $\xi > 0$ ; esso ammette una sola radice positiva  $\xi_h$ . Dunque per  $u \leq \xi_h$  vale la (4.3) e quindi la (4.2).

Per la migliore costante  $\gamma_h$  è  $\gamma_h \geq \xi_h$ .

Rimane da dimostrare che proprio  $\xi_h$  è la migliore costante cioè  $\gamma_h \leq \xi_h$ ; ci varremo di un esempio appropriato. Consideriamo la funzione

$$\varphi_h(z) = \varphi_h(z; \alpha) = \frac{z^h}{1 - \alpha z} = z^h (1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \dots) \quad (0 < \alpha < 1)$$

la cui serie converge per  $|z| < 1/\alpha$ . Si vede immediatamente che  $\varphi_h(z) \in \mathfrak{D}_h$  e

$$\mathfrak{M}(\varphi_h; r) = \frac{r^h}{1 - \alpha r}, \quad M_2(\varphi_h; r) = \frac{r^h}{\sqrt{1 - \alpha^2 r^2}},$$

$$M_2(\varphi_h; 1) = 1/\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

La disuguaglianza  $\mathfrak{M}(\varphi_h; u) \leq M_2(\varphi_h; 1)$  equivale a  $u^h/(1 - \alpha u) \leq 1/\sqrt{1 - \alpha^2}$ , cioè

$$\psi(u, \alpha) = (1 - \alpha^2)u^{2h} - \alpha^2 u^2 + 2\alpha u - 1 \leq 0.$$

L'equazione  $\psi(u, \alpha) = 0$  definisce  $u$  come funzione di  $\alpha$ ; conviene determinare  $\alpha$  in guisa che  $u$  risulti minimo e questo conduce alla condizione

$$\psi'_\alpha = -2\alpha\{u^{2h} + u^2 - u/\alpha\} = 0.$$

Tenendo conto che  $0 < \alpha < 1$ , questa condizione, unita a  $\psi(u, \alpha) = 0$ , ci dà le due condizioni simultanee:

$$\alpha = u, \quad u^{2h} + u^2 - 1 = 0$$

la seconda delle quali è in accordo con la (4.3).

Assumendo  $\alpha = \xi_h$  (vedi la (4.3)), la funzione  $\varphi_h(z; \xi_h)$  realizza il minimo per  $u$  che risulta  $u = \xi_h$ ; si conclude che  $\mathfrak{M}(\varphi_h; \xi_h) \leq M_2(\varphi_h; 1)$ .

Pertanto  $\gamma_h \leq \xi_h$ ; prima avevamo stabilito  $\gamma_h \geq \xi_h$  e il Teorema II risulta dimostrato.

**Geometria.** — *Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine di  $S_r$ .* Nota di CARMELO LONGO, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. SCOPO DELLA NOTA. — Si deve ad F. Engel (1) e ad E. Study (2) l'introduzione di coordinate atte a rappresentare un  $E_2$  (elemento curvilineo del 2° ordine) del piano proiettivo.

Giovandosi di esse G. Gherardelli (3), dopo aver determinato per mezzo della teoria della base un modello minimo — nel senso di F. Severi (4) — della varietà di tali elementi, dà l'effettiva costruzione di tale modello (5).

Recentemente J. G. Semple (6), riallacciandosi ai lavori precedenti, ha dato una rappresentazione parametrica (impropria, come afferma lo stesso Autore) di una varietà rappresentante gli  $E_2$  di un  $S_r$  proiettivo.

Il problema, che qui risolvo completamente, della rappresentazione minima degli  $E_2$  di  $S_r$  con  $r > 2$  comporta una difficoltà nuova derivante dal fatto seguente. Nel piano gli elementi non-regolari, di flesso e cuspidali, sono fra loro duali; ciò non accade più in  $S_r$  ( $r > 2$ ) ove un  $E_1$  individua ancora un  $E_2$  di flesso, ma non un elemento cuspidale (per il quale bisogna aggiungere un piano per l' $E_1$ ).

Tale difficoltà si riflette nella determinazione per gli  $E_2$  di  $S_r$  di un sistema di coordinate privo di eccezioni analogo a quello di Engel e di Study per  $r = 2$ .

Il diverso comportamento degli elementi non regolari fa prevedere che nella rappresentazione cercata giochino un ruolo essenziale un modello I degli  $E_1$  di  $S_r$  ed un modello C degli elementi punto-retta-piano fra loro appartenentisi.

Dalla conoscenza della base su I e su C si risale a quella della base sulla varietà W degli  $E_2$  di  $S_r$  e quindi ai caratteri del modello minimo.

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) F. ENGEL, *Die höheren Differentialquotient*, Leipz. «Ber.», 54, p. 17 (1902).

(2) E. STUDY, *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie*, Leipz., «Ber.», 53, p. 338 (1901).

(3) G. GHERARDELLI, *Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano proiettivo*, «Rend. Acc. d'Italia», VII, p. 821 (1941).

(4) F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza...* Ed. Cremonese, Roma (1942).

(5) Una costruzione organica ed originale dell'argomento trovasi in: E. BOMPIANI, *Geometria degli elementi differenziali*, vol. I, Ist. Mat. Univ. Roma (1954-55), pp. 101-111. Quivi è precisato che la nozione di modello minimo dipende: 1° dal richiedere che il gruppo delle collineazioni piane si rifletta in un gruppo di collineazioni della varietà in sé; 2° dalla scelta della rappresentazione degli elementi non regolari che *chiudono* la varietà degli elementi regolari.

(6) J. G. SEMPLE, *Some investigations in the geometry of curve and surface elements*, «Proc. London Math. Soc.» (3), 4, pp. 24-49 (1954).

Questo è birazionalmente equivalente, senza eccezione, al prodotto topologico della varietà degli  $E_r$  di  $S_r$ , per la varietà dei piani osculatori alle curve della varietà di Veronese  $V_r^{2r}$ .

Nella presente Nota mi limito a dare i risultati più significativi della ricerca rimandando ad un prossimo lavoro il completo sviluppo della ricerca stessa.

2. COORDINATE DI UN  $E_2$  DI  $S_r$ . — Indicate con  $x^i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) le coordinate omogenee di un punto  $x$  di un  $S_r$  proiettivo, siano  $x^i = x^i(t)$  le equazioni parametriche di una curva regolare nell'intorno di  $t = t_0$ . Per le  $x^i(t)$  si ha:

$$(2.1) \quad x^i(t) = x^i(t_0) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0(t - t_0)^2 + [3]_{t-t_0}$$

ove con  $[3]_{t-t_0}$  si sono indicati termini di grado maggiore od eguale a 3 in  $t - t_0$ .

Diremo *equivalenti* due sviluppi (2.1) quando l'uno si può ottenere dall'altro con i seguenti cambiamenti:

- a) del parametro  $t$  in una sua funzione  $\tau(t)$  invertibile per  $t = t_0$ ;
- b) del fattore di proporzionalità delle  $x^i(t)$ ;

Ciò posto diremo  $E_2$  *regolare* l'ente definito da uno sviluppo (2.1) e da tutti quelli ad esso equivalenti.

Il punto  $x \equiv (x^i(t_0))$  è il *centro* dell' $E_2$ , mentre per le coordinate  $u^{ik} = -u^{ki}$  della tangente si ha:

$$(2.2) \quad \sigma u^{ik} = p^{ik} = 2x^{\{i} \frac{dx^{k\}}{dt} = x^{\{i} \frac{dx^{k\}}{dt} \}^{(7)},$$

Dalle precedenti si ha:

$$(2.3) \quad \xi^{j;ik} = u^{ji} \frac{du^{kj}}{dt} - u^{jk} \frac{du^{ij}}{dt} = \rho x^j x^{\{i} \frac{dx^{k\}}{dt} \frac{d^2x^j}{dt^2} = \rho x^j \pi^{ikj}.$$

Indicate con  $w^{ik}$  le coordinate di una retta  $w$ , poniamo:

$$(w \xi)^{ikj} = w^{\{ik} \xi^{j\}} = w^{ik} \xi^{j;ik} + w^{kj} \xi^{i;kj} + w^{ji} \xi^{k;ji};$$

indicate poi con  $x^i$  e  $z_{ik}$  rispettivamente le coordinate di un punto e di un  $S_{r-2}$ , poniamo

$$(w, x)^{ikj} = w^{\{ik} x^{j\}} \quad , \quad (w, z) = w^{ik} z_{ik}.$$

(7) L'operazione indicata da  $\{i_1 i_2 \dots i_r\}$ , detta *circolazione*, rappresenta la somma degli addendi che si ottengono circolando gli indici  $i_1, i_2, \dots, i_r$  e prendendo tali addendi tutti col segno positivo ovvero col segno alternato secondo che il numero degli indici è dispari o pari. Tale operazione è stata introdotta da E. BOMPIANI, *Sulle coordinate di Grassmann*, « Rend. Acc. Lincei », 13, pp. 329-335 (1952).

Ciò posto, consideriamo le espressioni:

$$(2.4) \quad X = \frac{(z, \beta)}{(z, u)} \quad , \quad U^{ikj} = \frac{(w, \xi)^{ikj}}{(w, x)^{ikj}}$$

ove  $w$  e  $z$  rappresentano rispettivamente una retta ed un  $S_{r-2}$  arbitrari;  $x$  ed  $u$  sono rispettivamente le coordinate del centro e della tangente all' $E_2$ .

Si verifica facilmente che le espressioni (2.4) sono indipendenti dall'arbitraria scelta dello  $S_{r-2}$  e della retta  $w$ . Inoltre, per cambiamenti dei fattori di proporzionalità  $\rho$  e  $\sigma$  rispettivamente delle  $x$  e delle  $u$ , e per un cambiamento del parametro  $t$  in una sua funzione  $\tau(t)$  (regolare per  $t = t_0$ ) le (2.4) si trasformano nelle:

$$(2.4') \quad \bar{X} = \frac{\rho^2}{\sigma} \frac{dt}{d\tau} X \quad , \quad \bar{U}^{ikj} = \frac{\sigma^2}{\rho} \frac{dt}{d\tau} U^{ikj}.$$

Per  $r = 2$  si ha una sola coordinata  $U$ , e, come in tal caso, osservato che le  $U^{ikj}$  sono proporzionali alle  $\pi^{ikj}$ , coordinate del piano osculatore  $\pi$  dell' $E_2$ , si dimostra che un  $E_2$  è determinato dal sistema di coordinate

$$(2.5) \quad x, u, X, U^{ikj}$$

insieme alle condizioni di appartenenza del punto  $x$  alla retta  $u$  e di questa retta al piano  $\pi$ , ove si ritenga che il gruppo (2.5) sia equivalente al gruppo

$$(2.5') \quad \rho x \quad , \quad \sigma u \quad , \quad \nu \rho^3 X \quad , \quad \nu \sigma^3 U^{ikj}$$

con  $\rho, \sigma, \nu$  fattori indipendenti non nulli.

Ricordiamo che le dette condizioni di appartenenza sono espresse da

$$x^{\{i} u^{kj\}} = 0 \quad u^i \{^k \pi^{j_1 j_2 j_3}\} = 0$$

relazioni che indicheremo brevemente con

$$(2.6) \quad [u, x] = 0 \quad , \quad [U, u] = 0.$$

Tenute presenti le coordinate (2.5) e la loro legge di variazione espressa dalle (2.5') segue che si ottengono modelli in corrispondenza biunivoca con gli  $E_2$  considerando la varietà le cui coordinate omogenee siano combinazioni omogenee dello stesso grado  $\rho^{\lambda_1} \sigma^{\lambda_2} \nu^{\lambda_3}$  con  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ . Tra questi modelli indicate con  $u_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \binom{r+1}{2}$ ) e con  $U_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, \binom{r+1}{3}$ ) le coordinate duali rispettivamente di  $u^{ik}$  e di  $U^{ikj}$ , il modello minimo è dato da:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \xi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^j = X x^j u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4} \\ \eta_{\lambda}^{j_1 j_2 j_3 j_4} = U_{\lambda} x^{j_1} x^{j_2} x^{j_3} x^{j_4} u_{\alpha} \end{cases}$$

$$[u, x] = 0 \quad , \quad [U, u] = 0$$

che indicheremo brevemente con

$$(2.7') \quad \xi = X(x)(u)^4 \quad , \quad \eta = (U)(x)^4(u) \quad , \quad [u, x] = 0, [U, u] = 0.$$



OSSERVAZIONI. — Considerata la  $V_r^{2r}$  di Veronese

$$v^{ik} = x^i x^k \quad (v^{ik} = v^{ki})$$

ad un generico  $E_2$  di  $S_r$  corrisponde un piano osculatore ad una curva di  $V_r$ . In particolare agli  $E_2$  con uno stesso  $E_1$  corrispondono i piani di un  $S_{r+1}^{(f)} = S(2,1)$ -osculatore passanti per la tangente  $t$ , corrispondente all' $E_1$ : i piani dello  $S(2,1)$  appartenenti allo  $S_r$  tangente rappresentano gli elementi cuspidali, mentre il piano della conica, determinata da  $t$ , rappresenta l'elemento inflessionale.

Posto

$$u^{ik} = x^i dx^k, \quad \pi^{ikj} = x^i dx^k d^i x^j$$

le coordinate di un piano osculatore determinato dai punti  $v, v + dv, v + dv + 1/2 d^2 v$ , sono combinazioni lineari delle seguenti coordinate

$$(2.8) \quad \xi = (u)^3, \quad \eta = (\pi)(x)^3.$$

Nella corrispondenza tra gli  $E_2$  di  $S_r$  ed i piani osculatori a  $V_r$ , rappresentati biunivocamente dalla varietà (2.8), si hanno le seguenti eccezioni: 1° agli  $\infty^1 E_2$  inflessionali determinati dagli  $\infty^1 E_1$  di una stessa retta  $p$ , corrisponde il piano della conica di  $V_r$  corrispondente a  $p$ ; 2° agli  $\infty^1 E_2$  cuspidali aventi lo stesso centro  $P$  e lo stesso piano osculatore, corrisponde uno stesso piano appartenente allo  $S_r$  tangente a  $V_r$  nel punto  $\bar{P}$  corrispondente al punto  $P$ .

Tenuto conto delle precedenti eccezioni si ha che gli  $E_2$  di  $S_r$  sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti della varietà prodotto degli  $E_1$  di  $V_r$  per i piani osculatori per l' $E_1$ ; cioè della varietà prodotto della (2.8) con la varietà

$$\xi' = (x)(u).$$

Si riottiene così il modello (2.7').

3. SUL MODELLO MINIMO DEGLI  $E_2$  DI  $S_r$ . — Diamo ora alcune indicazioni che permettono di affrontare lo studio della varietà (2.7') ed anche di pervenire a tale varietà indipendentemente dalla conoscenza della sua rappresentazione analitica.

Ricordiamo che gli  $E_1$  di  $S_r$  si rappresentano nei punti della varietà

$$(3.1) \quad \xi = (x)^m (u)^n \quad [u, x] = 0$$

che indicheremo con  $M_{(m,n)}^{(0,1;r)}$ . Per l'ordine  $N$  e per la dimensione  $\delta$  dello spazio di appartenenza della (3.1) si ha:

$$(3.2) \quad N_{(m,n)}^{(0,1;r)} = m n^{r-1} \sum_{k=1}^r \frac{(2r-1)!}{(k-1)!(r-k)!r!} m^{k-1} n^{r-k}$$

$$(3.3) \quad \delta_{(m,n)}^{(0,1;r)} = \binom{r+m}{m} \binom{\frac{r(r+1)}{2} + n - 1}{n} - \\ - \binom{r+m-1}{m-1} \binom{\frac{r(r+1)}{2} + n - 2}{n-1} \binom{r+1}{3} - 1.$$

Il modello minimo si ha per  $m = n = 1$ .

La formula (3.2) si trova, come caso particolare, in una Memoria di E. Martinelli<sup>(8)</sup>. Il procedimento indicato dal Martinelli permette di risolvere il problema della base per la varietà  $M^{(0,1,2;r)}$  rappresentante gli elementi punto, retta, piano, fra loro appartenentisi, di  $S_r$ . Per questo basta osservare che, indicata con  $M^{(0,1,2;r)^m}$  la varietà di detti elementi con centro su un dato  $S_m$ , si ha che tale varietà è birazionalmente equivalente alla varietà  $S_m \times M^{(0,1;r-1)}$ , e che la varietà eccezionale, sopra  $M^{(0,1,2;r)^m}$  è costituita da una varietà  $M^{(0,1,2;r)^{m-1}}$ .

In particolare, si ha che la base di dimensione massima  $k = 3r - 2$  è costituita:

1° dalla varietà  $M^{(0,1,2;r)^{r-1}}$  degli elementi con centro su un  $S_{r-1}$ ;

2° dalla varietà degli elementi con retta incidente un  $S_{r-2}$ ;

3° dalla varietà degli elementi con piano incidente un  $S_{r-3}$ .

La varietà inoltre è priva di divisori dello zero.

Un modello proiettivo della varietà è dato da:

$$(3.4) \quad \eta = (U)^p (x)^m (n)^n, \quad [u, x] = 0, \quad [U, u] = 0$$

ove  $x, u, U$  sono rispettivamente le coordinate di un punto, di una retta e di un piano dello  $S_r$ .

Il modello minimo si ottiene per  $m = n = p = 1$ .

Consideriamo ora la varietà  $W(2.7)$ , rappresentante il modello minimo degli  $E_2$  di  $S_r$ .

Le varietà degli elementi non regolari sono rispettivamente date: 1° da una varietà  $((U)=0)$ ,  $I_{2r-1} \equiv M_{(1,4)}^{(0,1;r)}$ ; 2° da una varietà  $(X=0)$ ,  $C_{3r-3} \equiv M_{(1,4,1)}^{(0,1,2;r)}$ . Osservato che la varietà  $C_{3r-3}$  interseca ogni  $S_{r-1}$  generatore della  $W$  in un  $S_{r-2}$ , segue che la base di dimensione massima su  $W$  è costituita: 1° dalla varietà  $C_{3r-3}$ ; 2° dalla varietà degli  $E_2$  con centro su un iperpiano  $S_{r-1}$ ; 3° dalla varietà degli  $E_2$  con retta incidente un  $S_{r-2}$ . La conoscenza di tale base permette la determinazione della base delle varie dimensioni, e quindi, in particolare, la determinazione della  $W$ .

Per  $r = 3$  si ha: la varietà  $(U)=0$  è una  $I_5^{4.000}$  di  $S_{279}$ ; la varietà  $X=0$  è una  $C_6^{14.400}$  di  $S_{379}$ ; la varietà degli  $E_2$  è una  $W_7^{87.570}$  di  $S_{659}$ .

(8) E. MARTINELLI, *Sulla varietà delle faccette  $p$ -dimensionali di  $S_r$* , «Mem. Acc. d'Italia», XII pp. 917-943 (1941).

**Geometria.** — *Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche.* Nota di VITTORIO DALLA VOLTA, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. È ben noto che lo studio delle funzioni abeliane modulari di  $p \geq 1$  variabili complesse ha naturalmente condotto a considerare una generalizzazione del piano iperbolico (che si ottiene per  $p = 1$ ): lo *spazio simplettico*, o *delle matrici simmetriche*. Di tale spazio io mi sono occupato in un recente lavoro [2] <sup>(1)</sup>, ove, per le ragioni ivi indicate, hò preferito usare la denominazione di *spazio di Siegel-Hua*; e a tale terminologia mi atterrò in seguito <sup>(2)</sup>.

Poiché le proprietà geometriche di uno spazio di Siegel-Hua non sono ancora esaurientemente conosciute, ho creduto non privo di interesse approfondirne lo studio; e in un lavoro in corso di redazione, di cui presento qui i risultati senza dimostrazioni, ho studiato alcune questioni riguardanti le varietà totalmente geodetiche.

2. Come si sa, lo spazio di Siegel-Hua ha  $p(p+1)/2$  dimensioni complesse, e quindi  $p(p+1)$  dimensioni reali, ed è munito di una metrica hermitiana definita positiva, simmetrica nel senso di E. Cartan, kähleriana, che possiede un gruppo continuo  $G$  di movimenti pseudo-conformi, assolutamente transitivo e dipendente da  $p(2p+1)$  parametri reali. Due punti qualsiasi sono congiunti da un arco di geodetica, e ammettono  $p$  invarianti finiti, di guisa che è possibile, mediante un movimento di  $G$ , portare una coppia di punti  $P, Q$ , in un'altra  $P', Q'$ , se e soltanto se i nominati invarianti coincidono per le due coppie. Un'interpretazione geometrica di essi verrà indicata più avanti. Due punti infinitamente vicini, cioè un elemento lineare  $E_i$ , ammettono ancora  $p$  invarianti  $\lambda_i (\geq 0)$  [ $i = 1, 2, \dots, p$ ], legati però dalla relazione  $\sum_i^p \lambda_i^2 = 1$ . Nel lavoro annunciato dimostro che le  $\lambda_i$  si mantengono costanti lungo la geodetica tangente all' $E_i$  dando così luogo a  $p-1$  integrali primi delle equazioni differenziali delle geodetiche <sup>(3)</sup>.

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia alla fine della Nota.

(2) La teoria delle funzioni abeliane modulari è stata oggetto di ricerca dal compianto prof. FABIO CONFORTÓ, e dai Suoi allievi negli ultimi anni di Sua vita. Al volume [1] sull'argomento rinvio il lettore; ved. in particolare il Cap. II per molte delle cose che dirò in seguito.

(3) La determinazione di integrali primi delle equazioni differenziali delle geodetiche è meno interessante di quanto possa sembrare, giacché delle geodetiche si conoscono le equazioni in termini finiti ([6, 3]).

Di questi invarianti io mi sono occupato in [2], e su di essi avremo occasione di tornare in seguito.

Infine, lo spazio in oggetto è, non appena sia  $p > 1$ , a curvatura non costante, sempre  $\leq 0$ ; in [2] io ho determinato e studiato a fondo la configurazione delle faccette bidimensionali a curvatura nulla.

3. La prima questione da me trattata è quella di determinare le varietà *totalmente geodetiche* del nostro spazio, che siano altresì *caratteristiche* <sup>(4)</sup>. Il problema è stato da me risolto completamente per le *superficie*, e il risultato ottenuto è: detta  $\gamma$  una qualsiasi geodetica dell'ambiente, si considerino le quantità  $\lambda_i$  nominate al penultimo capoverso del n. 2; *condizione necessaria e sufficiente affinché per  $\gamma$  passi una (unica) superficie totalmente geodetica caratteristica è che le  $\lambda_i$  non nulle siano tutte uguali fra loro. In corrispondenza al possibile numero delle  $\lambda_i \neq 0$  si hanno così  $p$  famiglie di superficie geodetiche caratteristiche; due superficie di una stessa famiglia sono sempre equivalenti rispetto al gruppo  $G$  dei movimenti dello spazio, mentre due superficie di diverse famiglie non lo sono, e per ciascuna superficie le  $\lambda_i$  sono le stesse su ogni geodetica. Se  $0 \leq q \leq p - 1$  è il numero delle  $\lambda_i$  nulle, la corrispondente superficie ha curvatura costante negativa, uguale a  $-1/(p - q)$ , e il sottogruppo di  $G$  che la lascia invariante subordina su di essa il  $G_3$  della metrica iperbolica della superficie. Poichè le direzioni - e quindi le geodetiche ad esse tangenti - per cui possono passare superficie totalmente geodetiche caratteristiche sono state caratterizzate geometricamente in [2], ne segue una costruzione per le superficie in esame.*

Nel caso poi di  $p = 2$  - che corrisponde a uno spazio di Siegel-Hua a 6 dimensioni - trovo anche tutte le  $V_4$  totalmente geodetiche caratteristiche, dando anche di esse una caratterizzazione geometrica. E poichè in una  $V_6$  riemanniana non esistono che varietà caratteristiche di dimensione 2 o 4, ho così esaurita la ricerca.

Per  $p > 2$ , invece, riesco a dimostrare l'esistenza di varietà geodetiche caratteristiche di dimensione  $> 2$ , ma non posso concludere che esse sono le *uniche*, per quanto io lo ritenga estremamente probabile. La determinazione delle varietà considerate poggia sul seguente lemma, di dimostrazione pressochè immediata: *Se un movimento di uno spazio riemanniano diverso dall'identità lascia fissi tutti e soli i punti di una varietà  $W$ , questa è totalmente geodetica.*

(4) Ricordo che, nella rappresentazione di  $S_n$  complesso (euclideo) in  $S_{2n}$  reale, si dicono (con LEVI-CIVITA) *caratteristici* gli spazi lineari, necessariamente di dimensione pari  $2r$ , immagini degli  $S_r \subset S_n$ ; e una varietà (regolare),  $V_{2r} \subset S_{2n}$  è *caratteristica* se e solo se ha in ogni suo punto come tangente un  $S_{2r}$  caratteristico.

Si ha che: una  $V_{2r} \subset S_{2n}$  (regolare, analitica in  $S_{2n}$ ) è immagine di una  $V_r$  analitica di  $S_r$  se e solo se è caratteristica. Un approfondito studio della geometria in  $S_{2n}$  reale, immagine di  $S_n$  complesso, si trova, per esempio, nel volume [5] di B. SEGRE (Cap. IV § 1) cui, fra l'altro, è dovuta la dimostrazione dell'ultimo enunciato. Dirò anche che, nella letteratura straniera (ved. per esempio [7]) le varietà caratteristiche sono dette anche *olomorfe*; io mi attengo però alla terminologia italiana.



Come si è detto poco fa, le  $V_2$  totalmente geodetiche caratteristiche sono, da un punto di vista astratto, *piani iperbolici*, cioè *spazi di Siegel-Hua a 2 dimensioni*; orbene, qualunque sia  $p$ , fra le varietà totalmente geodetiche di cui ho dimostrato l'esistenza, ve ne sono sempre, di dimensione (reale)  $q(q+1)$ , con  $q < p$ , che, sempre astrattamente, sono *spazi di Siegel-Hua*; e potrebbe essere interessante collegare tale risultato con la teoria delle funzioni modulari.

4. Il fatto che le *superficie* geodetiche caratteristiche siano a curvatura costante viene da me dimostrato calcolando effettivamente l'elemento lineare delle  $V_2$  considerate; esso è però conseguenza del seguente teorema più generale: *se uno spazio di Riemann simmetrico e kähleriano ammette  $V_2$  totalmente geodetiche caratteristiche, queste sono necessariamente a curvatura costante*. L'enunciato si ottiene facilmente ricordando che da un lato, l'essere lo spazio simmetrico equivale al fatto che il trasporto parallelo di Levi-Civita conserva la curvatura delle faccette, mentre, come ha recentemente osservato E. Martinelli [4] l'essere una metrica (hermitiana) kähleriana è *condizione necessaria e sufficiente affinché il trasporto parallelo sia pseudo-conforme* (muti cioè faccette caratteristiche in faccette caratteristiche). Sia allora  $W$  una  $V_2$  totalmente geodetica caratteristica, e  $P, Q$  due suoi punti; si consideri la geodetica  $\gamma$  congiungente  $P$  con  $Q$ , e la faccetta (caratteristica)  $\pi$  tangente a  $W$  in  $P$ , e contenente la direzione tangente a  $\gamma$  in  $P$ ; sia poi  $K(P)$  la curvatura Riemanniana di  $W$  in  $P$ . Se si trasporta per parallelismo  $\pi$  lungo  $\gamma$  da  $P$  in  $Q$ , si otterrà in  $Q$  una faccetta  $\pi'$  ancora caratteristica, che risulta tangente a  $W$  in  $Q$ , poiché  $W$  è caratteristica e totalmente geodetica; ma allora, essendo lo spazio simmetrico, la curvatura di  $\pi'$  che per definizione è la curvatura  $K(Q)$  di  $W$  in  $Q$ , è uguale a quella in  $P$ :  $K(Q) = K(P)$ , c. v. d.

*Osservazione:* come risulterà dall'enunciato del numero seguente, possono invece esistere varietà totalmente geodetiche a curvatura costante, non caratteristiche.

5. L'ultima parte della mia ricerca è dedicata ad altre  $V_p$  totalmente geodetiche, non caratteristiche, che si ottengono al modo seguente: come ho dimostrato in [2], se  $P$  è un punto qualunque dello spazio, e  $\delta$  è una direzione generica – in un senso ben preciso – le faccette a curvatura nulla per  $\delta$  riempiono una  $p$ -giacitura – per  $p = 2$ , in particolare, vi è una sola di tali faccette –; si può quindi considerare la varietà luogo delle geodetiche uscenti da  $P$  e tangenti alla  $p$ -giacitura ora menzionata: la  $V_p$  così ottenuta – certamente non caratteristica – risulta allora *totalmente geodetica* e, su di essa, la geometria dell'ambiente subordina una metrica euclidea<sup>(5)</sup>; però, a differenza di quanto accadeva per le varietà caratteristiche, non tutto il

(5) L'esistenza di  $V_p$  euclidee nello spazio di Siegel-Hua era stata già segnalata da L. K. HUA ([3], p. 483).



$G_{p(p+1)/2}$  ammesso dalla metrica euclidea della  $V_p$  viene subordinato su questa dal gruppo  $G$  dell'ambiente a  $p(p+1)$  dimensioni;  $G$  determina però il gruppo  $T$  delle *traslazioni* nella metrica euclidea della  $V_p$  e i  $p$  parametri da cui dipende un movimento di  $T$ , che muti un punto  $Q$  di  $V_p$  in un punto  $Q' \in V_p$  sono atti a individuare completamente i  $p$  invarianti della coppia  $Q, Q'$ , di cui si è parlato al n. 2 (p. 619) <sup>(6)</sup>.

È da notare che se la direzione  $\delta$  *non* è generica, essa non individua più una  $p$ -giacitura luogo di faccette a curvatura nulla, ma infinite, in corrispondenza a ciascuna delle quali risulta individuata una  $V_p$  totalmente geodetica euclidea e, di conseguenza, un gruppo di traslazioni; ma tutti questi gruppi hanno a comune il sottogruppo a un parametro di traslazioni di cui la geodetica tangente a  $\delta$  è traiettoria, e quindi anche per due punti  $Q, Q'$  di una tale geodetica i  $p$  invarianti possono individuare l'ampiezza della traslazione che porta  $Q$  in  $Q'$ . Si trova poi che le varietà luogo di  $V_p$  totalmente geodetiche euclidee che si ottengono nel caso attuale sono ancora totalmente geodetiche, ma non euclidee.

Per terminare, ricordo che, come risulta da [2], una direzione  $\delta$  è *non* generica se almeno uno degli invarianti  $\lambda_i$  ad essa relativi è uguale a zero, ovvero se due  $\lambda_i$  sono fra loro uguali. Da quanto detto al numero precedente segue allora che: *se per una geodetica passa una superficie totalmente geodetica caratteristica, per essa passano infinite  $V_p$  totalmente geodetiche, euclidee*. Infine, l'esistenza di tali  $V_p$  prova l'affermazione fatta a p. 621, secondo cui dall'essere una varietà di uno spazio simmetrico kähleriano totalmente geodetica e a curvatura costante, *non* segue che essa sia caratteristica.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] CONFORTO F., *Funzioni abeliane modulari* (lezioni raccolte dal dott. Mario Rosati), vol. I. Roma, 1951.
- [2] DALLA VOLTA V., *Sulla geometria differenziale dello spazio delle matrici simmetriche*, « Ann. Mat. p. e appl. », ser. 4<sup>a</sup>, 34, 291-332 (1954).
- [3] HUA L. K., *On the Theory of Automorphic Functions of a Matrix Variable. I. - Geometrical Basis*, « Am. Jour. of Math. », 66, 470-488 (1944).
- [4] MARTINELLI E., *Qualche proprietà geometrica nelle varietà a struttura complessa*, « Atti Acc. Ligure Sci. e Lett. », 9 (fasc. 1), 1952.
- [5] SEGRE B., *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I, Roma, 1951.
- [6] SIEGEL C. L., *Symplectic Geometry*, « Amer. Jour. of Math. », 65, 1-86 (1943).
- [7] YANO K. and BOCHNER S., *Curvature and Betti Numbers*, Princeton 1953.

(6) L'esistenza di *traslazioni* si trova già in [1], pp. 198 e sgg. Esse sono *traslazioni* proprio nel senso della geometria riemanniana, nel senso che ogni punto si sposta lungo una geodetica, descrivendo un arco di lunghezza costante.

**Fisica matematica.** — *Multipoli e onde di Schelkunoff. Il caso generale.* Nota di ITALO FERRARI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. In due Note precedenti<sup>(1)</sup> ho stabilito alcune relazioni fra i campi dei multipoli e le onde che ho chiamato di Schelkunoff, cioè quelle soluzioni delle equazioni del campo elettromagnetico introdotte da questo Autore nella sua teoria dell'antenna radio. Mi sono però limitato alle onde simmetriche e alle dissimmetriche più semplici. Qui, proseguendo le Note citate, stabilirò la relazione generale fra le onde di Schelkunoff e i multipoli. Premesse alcune proprietà delle derivate di una funzione della distanza fra un punto variabile e un punto fisso, proprietà che mi saranno utili in seguito, introdurrò un opportuno «gruppo» di multipoli adeguatamente disposti, infine dimostrerò che ogni onda di Schelkunoff è una combinazione lineare di tali «gruppi»; ossia dimostrerò che il campo di ogni onda di Schelkunoff è una combinazione lineare del campo di multipoli opportunamente disposti ed assegnerò il valore dei coefficienti di tale combinazione.

2. Si abbia un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $Oxyz$  e un sistema di coordinate polari  $r, \theta, \varphi$ , l'asse polare coincidente con l'asse  $z$ , il piano polare col piano  $xz$ ; introdotti gli operatori  $\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial x}$  con  $j$  unità immaginaria, consideriamo le potenze  $m$ -esime ( $m$  numero intero) simboliche seguenti

$$1) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m = \sum_s j^s \binom{m}{s} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-s} \partial y^s}; \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m = \sum_s (-)^s j^s \binom{m}{s} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-s} \partial y^s}.$$

Applichiamo questi operatori ad una funzione  $\frac{1}{2} F(r)$  della sola  $r$ , che, per brevità, indicheremo spesso con  $F$ , e sommiamo membro a membro.

A secondo membro tutti i termini relativi a  $s$  dispari si elidono, ma restano i termini relativi a  $s$  pari, per cui, ricordando che  $j^s = (-1)^{s/2}$ , si può scrivere

$$(2) \quad \sum_s^* (-1)^{s/2} \binom{m}{s} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-s} \partial y^s} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m F + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m F,$$

ove si è posto un asterisco per rilevare che la somma si intende limitata ai valori *pari* di  $s$ . Poniamo poi nelle (1)  $m-1$  in luogo di  $m$ ,  $s-1$  in luogo di  $s$ , convenendo  $\binom{m-1}{-1} \equiv 0$ . Sottraendo membro a membro la se-

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) I. FERRARI, *Multipoli e onde di Schelkunoff*, questi «Rendiconti», 8, XVII, pp. 32-37 (1954); *Multipoli e onde di Schelkunoff dissimetriche*, idem, XVIII, pp. 304-308 (1955). In seguito queste Note verranno indicate con A e B.

conda dalla prima dopo aver diviso entrambe per  $j$ , scompaiono ancora i termini relativi a  $s$  dispari e si ha (si tenga presente che nel termine  $s$ -esimo compare  $j^{s-2} = -j^s = -(-)^{s/2}$ )

$$(3) \quad - \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1}} = \frac{1}{2j} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} F - \frac{1}{2j} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} F.$$

Ora è facile verificare la relazione

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) F = \frac{dF}{dr} \frac{x+jy}{r}$$

e per induzione completa segue <sup>(2)</sup>:

$$(4) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m F = F_m \frac{(x+jy)^m}{r^m}$$

ove

$$(4') \quad F_m = \frac{dF_{m-1}}{dr} - \frac{(m-1) F_{m-1}}{r}$$

e la (4) resta, ovviamente, valida scambiando  $j$  con  $-j$ .

Sostituendo nella (2) la (4) e quella da essa dedotta scambiando  $j$  con  $-j$ , si ottiene:

$$(5) \quad \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m}{s} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-s} \partial y^s} = \frac{F_m}{r^m} \frac{(x+jy)^m + (x-jy)^m}{2}.$$

Infine deriviamo questa equazione  $w$  volte rispetto a  $z$ :

$$\frac{\partial^w}{\partial z^w} \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m}{s} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-s} \partial y^s} = \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left( \frac{F_m}{r^m} \right) \frac{(x+jy)^m + (x-jy)^m}{2}.$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro per  $r^m$ , per note formule, si ha:

$$(6) \quad \frac{\partial^w}{\partial z^w} \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m}{s} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-s} \partial y^s} = r^m \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left( \frac{F_m}{r^m} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{r} + j \frac{y}{r} \right)^m + \left( \frac{x}{r} - j \frac{y}{r} \right)^m \right] =$$

(2) Infatti tenendo presente che  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x+jy)^m = 0$ ,  $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$ ,  $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$ , con facili passaggi si ha:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m F &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} F = \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) F_{m-1} \frac{(x+jy)^{m-1}}{r^{m-1}} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{F_{m-1}}{r^{m-1}} \right) (x+jy)^m = \frac{1}{r} \left( \frac{dF_{m-1}}{dr} \frac{1}{r^{m-1}} - \frac{(m-1) F_{m-1}}{r^m} \right) (x+jy)^m = \\ &= \left( \frac{dF_{m-1}}{dr} - \frac{(m-1) F_{m-1}}{r} \right) \frac{(x+jy)^m}{r^m} \end{aligned}$$

conforme al testo.

$$\begin{aligned}
 &= r^m \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left( \frac{F_m}{r^m} \right) \frac{1}{2} [(\sin \theta \cos \varphi + j \sin \theta \sin \varphi)^m + (\sin \theta \cos \varphi - j \sin \theta \sin \varphi)^m] = \\
 &= r^m \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left( \frac{F_m}{r^m} \right) \sin^m \theta \cos m\varphi = r^m \frac{\partial^w F^{(m)}}{\partial z^w} \sin^m \theta \cos m\varphi^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Analogamente dalla (3) segue:

$$(7) \quad - \frac{\partial^w}{\partial z^w} \sum_0^m (-)^{s/2} \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1}} = r^{m-1} \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \sin (m-1) \varphi.$$

3. Consideriamo ora i campi magnetici  $\mathbf{H}_x$ ,  $\mathbf{H}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$  di tre dipoli sinoi-dali di momento  $\mathfrak{M}$ , pulsazione  $\omega$ , posti nell'origine degli assi coordinati ed orientati rispettivamente come gli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\mathbf{H}_x = F(r) (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{H}_y = F(r) (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{H}_z = F(r) (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k}$$

ove, come si è già detto implicitamente,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  è la distanza del punto P da O;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  i tre versori sugli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,

$$F(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{j\omega \mathfrak{M}}{4\pi r} \exp. \left( -\frac{j\omega r}{c} \right) \right]$$

$c$  la velocità di propagazione del campo elettromagnetico. Ricordiamo ora che:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Derivando  $\mathbf{H}_x$   $u$  volte rispetto ad  $x$  e poi  $v$  volte rispetto ad  $y$ , si ha, applicando nella seconda derivazione la regola di Leibnitz:

$$\frac{\partial^{u+v}}{\partial x^u \partial y^v} [F(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i}] = \frac{\partial^{u+v} F}{\partial x^u \partial y^v} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} - v \frac{\partial^{u+v-1} F}{\partial x^u \partial y^{v-1}} \mathbf{k}$$

e derivando  $w$  volte rispetto a  $z$ , applicando ancora la regola di Leibnitz:

$$(8) \quad \frac{\partial^{u+v+w} \mathbf{H}_x}{\partial x^u \partial y^v \partial z^w} = \frac{\partial^{u+v+w} F}{\partial x^u \partial y^v \partial z^w} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} - v \frac{\partial^{u+v+w-1} F}{\partial x^u \partial y^{v-1} \partial z^w} \mathbf{k} + w \frac{\partial^{u+v+w-1} F}{\partial x^u \partial y^v \partial z^{w-1}} \mathbf{j}.$$

Indicati con  $p$  e  $m$  due numeri interi tali che  $1 \leq m \leq p+1$ , e con  $s$  un numero pari tale che  $0 \leq s \leq m$  se  $m$  è pari,  $0 \leq s \leq m-1$  se  $m$  è dispari; poniamo  $u = m-1-s$ ,  $v=s$ ,  $w=p-m+1$ . La (8) diventa allora:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^{p-m+1}} = \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^{p-m+1}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} \\
 & - s \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m+1}} \mathbf{k} + (p-m+1) \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^{p-m}} \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

(2) Si è posto per comodità  $\frac{F_m}{r^m} \equiv F^{(m)}.$

Ragionando in modo analogo sui campi  $\mathbf{H}_y$ ,  $\mathbf{H}_z$  si ottiene:

$$(9') \quad \frac{\partial^p \mathbf{H}_y}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m+1}} = \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m+1}} (P-O) \wedge \mathbf{j} + \\ + (m-s) \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m+1}} \mathbf{k} - (p-m+1) \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m}} \mathbf{i},$$

$$(9'') \quad \frac{\partial^p \mathbf{H}_z}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{p-m}} = \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{p-m}} (P-O) \wedge \mathbf{k} - \\ - (m-s) \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-s-1} \partial y^s \partial z^{p-m}} \mathbf{j} + s \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^{p-m}} \mathbf{i}.$$

Moltiplichiamo la (9) per  $\binom{m-1}{s}$ , la (9') per  $\binom{m-1}{s-1}$  e la (9'') per  $\frac{p-m+1}{m} \binom{m}{s}$  convenendo che  $\binom{m-1}{m} \equiv \binom{m-1}{-1} \equiv 0$ . Per note proprietà dei coefficienti binomiali si ha (per comodità poniamo ancora  $p-m+1=w$ ):

$$(10) \quad \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^w} = \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^w} (P-O) \wedge \mathbf{i} - \\ - \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-1-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} \mathbf{k} + \frac{w \cdot (m-1)!}{s!(m-1-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} \mathbf{j},$$

$$(10') \quad \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^p \mathbf{H}_y}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} = \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} (P-O) \wedge \mathbf{j} + \\ + \frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-1-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} \mathbf{k} - \frac{w \cdot (m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^{w-1}} \mathbf{i},$$

$$(10'') \quad \frac{w}{m} \binom{m}{s} \frac{\partial^p \mathbf{H}_z}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} = \frac{w}{m} \binom{m}{s} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} (P-O) \wedge \mathbf{k} - \\ - \frac{w \cdot (m-1)!}{s!(m-1-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} \mathbf{j} + \frac{w \cdot (m-1)!}{(s-1)!(m-s)!} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^{s-1} \partial z^{w-1}} \mathbf{i}.$$

Sommando membro a membro (10) (10') (10'') si eliminano i termini in  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  e otterremo così un campo magnetico perpendicolare a  $P-O$  cioè trasversale che indicheremo con  $\mathbf{H}_{p,s}^{(m)}$ :

$$(11) \quad \mathbf{H}_{p,s}^{(m)} = \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p \mathbf{H}_x}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^w} + \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^p \mathbf{H}_y}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} + \\ + \frac{w}{m} \binom{m}{s} \frac{\partial^p \mathbf{H}_z}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} = \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s \partial z^w} (P-O) \wedge \mathbf{i} + \\ + \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1} \partial z^w} (P-O) \wedge \mathbf{j} + \frac{w}{m} \binom{m}{s} \frac{\partial^p F}{\partial x^{m-s} \partial y^s \partial z^{w-1}} (P-O) \wedge \mathbf{k}$$

in altre parole  $\mathbf{H}_{p,s}^{(m)}$  è la somma dei campi di tre multipoli disposti nell'origine.



4. Consideriamo ora il campo magnetico  $\mathbf{H}_p^{(m)}$  definito come segue:

$$(12) \quad \mathbf{H}_p^{(m)} = \sum_s^m (-)^{s/2} \mathbf{H}_{p,s}^{(m)}$$

che chiameremo campo di un « gruppo » di multipoli di « ordine »  $p$  « classe »  $m$ . Sostituendo nella (12) la (11) e tenendo presente che le derivate rispetto a  $z$  non dipendono da  $s$ , possiamo scrivere:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_p^{(m)} = & \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left[ \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m-1}{s} \frac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-1-s} \partial y^s} \right] (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} + \\ & + \frac{\partial^w}{\partial z^w} \left[ \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m-1}{s-1} \frac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-s} \partial y^{s-1}} \right] (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{j} + \\ & + \frac{w}{m} \frac{\partial^{w-1}}{\partial z^{w-1}} \left[ \sum_s^m (-)^{s/2} \binom{m}{s} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-s} \partial y^s} \right] (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ricordando le (6), (7) ed osservando che la (6) vale anche sostituendo  $m-1$  ad  $m$ , pur mantenendo la somma estesa fino ad  $m$  perché, per la convenzione fatta,  $\binom{m-1}{m} \equiv 0$ , la (13) diventa

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_p^{(m)} = & r^{m-1} \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \cos(m-1) \varphi (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} - \\ & - r^{m-1} \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \sin(m-1) \varphi (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{j} + \\ & + \frac{w}{m} r^m \frac{\partial^{w-1} F^{(m)}}{\partial z^{w-1}} \sin^m \theta \cos m \varphi (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Detti  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  i tre vettori unitari diretti secondo le linee su cui variano crescendo, rispettivamente, solo  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  si ha <sup>(3)</sup>

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{i} = r \sin \varphi \mathbf{b} + r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{c};$$

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{j} = -r \cos \varphi \mathbf{b} + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{c}; \quad (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{k} = -r \sin \theta \mathbf{c}$$

e quindi, sostituendo nella (14), dopo facili passaggi si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p^{(m)} = & r^m \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta [\cos(m-1) \varphi \sin \varphi + \sin(m-1) \varphi \cos \varphi] \mathbf{b} + \\ & + r^m \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \cos \theta [\cos(m-1) \varphi \cos \varphi - \sin(m-1) \varphi \sin \varphi] \mathbf{c} - \\ & - \frac{w}{m} r^{m+1} \frac{\partial^{w-1} F^{(m)}}{\partial z^{w-1}} \sin^{m+1} \theta \cos m \varphi \mathbf{c} \end{aligned}$$

(3) Cfr. la Nota B p. 306.

ossia, per note formule,

$$\mathbf{H}_p^{(m)} = r^m \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \sin m\varphi \mathbf{b} + \\ + r^m \left[ \frac{\partial^w F^{(m-1)}}{\partial z^w} \sin^{m-1} \theta \cos \theta - \frac{w}{m} r \frac{\partial^{w-1} F^{(m)}}{\partial z^{w-1}} \sin^{m+1} \theta \right] \cos m\varphi \mathbf{c}.$$

Dette per brevità  $u_2(r, \theta) \sin m\varphi$  e  $u_3(r, \theta) \cos m\varphi$  le componenti lungo  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  di  $\mathbf{H}_p^{(m)}$  e tenendo presente che la sua divergenza è nulla, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta \sin m\varphi) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_3 \cos m\varphi)$$

da cui

$$u_3 = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta).$$

Pertanto  $\mathbf{H}_p^{(m)}$  diventa (si ricordi che  $w = p - m + 1$ )

$$(15) \quad \mathbf{H}_p^{(m)} = r^m \frac{\partial^{p-m+1} F^{(m-1)}}{\partial z^{p-m+1}} \sin^{m-1} \theta \sin m\varphi \mathbf{b} + \frac{r^m}{m} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{p-m+1} F^{(m-1)}}{\partial z^{p-m+1}} \sin^m \theta \right] \cos m\varphi \mathbf{c}$$

che è l'espressione definitiva del campo magnetico di un « gruppo » di multipoli di « ordine »  $p$ , « classe »  $m$ .

5. Consideriamo ora il campo magnetico  $\mathbf{H}_n^{(m)}$  dell'onda di Schelkunoff di « ordine »  $n$ , « classe »  $m$  ( $1 \leq m \leq n + 1$ )

$$\mathbf{H}_n^{(m)} = \frac{rf_n(r)}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{b} - rf_n(r) \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{c}$$

ove

$$f_n(r) = \frac{\exp\left(-\frac{j\omega r}{c}\right)}{r^2} \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{(n+\nu+1)!}{\nu! (n-\nu+1)! \left(\frac{2j\omega r}{c}\right)^\nu}$$

$$T = (-)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_{n+1}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} (M \cos m\varphi + N \sin m\varphi)$$

essendo  $P_{n+1}(\cos \theta)$  l' $n+1$ esimo polinomio di Legendre ed  $M$  e  $N$  due costanti. Supposto anzitutto, per semplicità,  $N=0$ , il campo magnetico, che indicheremo con  $\mathbf{H}_{M,n}^{(m)}$ , dell'onda di Schelkunoff diventa:

$$(16) \quad \mathbf{H}_{M,n}^{(m)} = -(-)^m mMr f_n \sin^{m-1} \theta \frac{d^m P_{n+1}}{d(\cos \theta)^m} \sin m\varphi \mathbf{b} - \\ - (-)^m Mr f_n \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin^m \theta \frac{d^m P_{n+1}}{d(\cos \theta)^m} \right] \cos m\varphi \mathbf{c}.$$

Determiniamo ora  $n - m + 2$  costanti  $\mathfrak{A}_p^{(n,m)}$  in modo che su una sfera di raggio  $r = \bar{r}$  valga la relazione

$$(17) \quad \mathbf{H}_{M,n}^{(m)} = \sum_{p=m-1}^n \mathfrak{A}_p^{(n,m)} \mathbf{H}_p^{(m)}.$$

Sostituendo (15) e (16) si vede che la (17) è soddisfatta se:

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} & - (-)^m m M r f_n \sin^{m-1} \theta \frac{d^m P_{n+1}}{d(\cos \theta)^m} \sin m\varphi = \\ & = \sum_{p=m-1}^n \mathfrak{A}_p^{(n,m)} r^m \frac{\partial^{p-m+1} F^{(m-1)}}{\partial z^{p-m+1}} \sin^{m-1} \theta \sin m\varphi \\ & - (-)^m M r f_n \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin^m \theta \frac{d^m P_{n+1}}{d(\cos \theta)^m} \right] \cos m\varphi = \\ & = \sum_{p=m-1}^n \mathfrak{A}_p^{(n,m)} \frac{r^m}{m} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^{p-m+1} F^{(m-1)}}{\partial z^{p-m+1}} \sin^m \theta \right] \cos m\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Poiché la seconda equazione è conseguenza della prima, basterà determinare i parametri  $\mathfrak{A}_p^{(n,m)}$  in modo da soddisfare quest'ultima.

Ora, con ovvia generalizzazione di una formula della Nota A potremo scrivere:

$$(19) \quad \frac{d^m P_{n+1}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} = \sum_{\mu}^{n-m+1} \alpha_{n+1,\mu}^{(m)} \cos^{\mu} \theta$$

convenendo che le costanti numeriche  $\alpha_{n+1,\mu}^{(m)}$  siano nulle quando  $n+1-m+\mu$  è un numero dispari. D'altra parte, con lo stesso ragionamento del numero 3 della Nota A si ha:

$$(20) \quad r^{m-1} \frac{\partial^{p-m+1} F^{(m-1)}}{\partial z^{p-m+1}} = \sum_{\mu}^{p-m+1} A_{\mu}^{(p-m+1)} \cos^{\mu} \theta$$

ove  $A_{\mu}^{(p-m+1)}$  è una funzione della sola  $r$ , nulla quando  $p-m+1+\mu$  è un numero dispari (3). Sostituendo (19) e (20) in (18), dopo ovvie semplificazioni, si ha:

$$\begin{aligned} - (-)^m m M r f_n \sum_{\mu}^{n-m+1} \alpha_{n+1,\mu}^{(m)} \cos^{\mu} \theta &= \sum_{p=m-1}^n \mathfrak{A}_p^{(n,m)} \sum_{\mu}^{p-m+1} A_{\mu}^{(p-m+1)} \cos^{\mu} \theta = \\ &= \sum_{\mu}^{n-m+1} \sum_{p=m-1+\mu}^n \mathfrak{A}_p^{(n,m)} A_{\mu}^{(p-m+1)} \cos^{\mu} \theta \end{aligned}$$

(3) Quest'ultima proprietà non è menzionata esplicitamente nella Nota citata, però la si prova facilmente, per induzione completa, in base alla equazione (6) della nota stessa.

ove, a secondo membro, si è effettuato uno scambio nell'ordine degli addendi. Per il principio d'identità segue:

$$(21) \quad -(-)^m m M f_n \alpha_{n+1, \mu}^{(m)} = \sum_{m-1+\mu}^n \alpha_p^{(n, m)} A_{\mu}^{(p-m+1)} \quad (\mu=0, 1 \dots n-m+1)$$

(per  $\mu=0$ ,  $p=m-1$  si ha  $A_0^{(0)} = r^{m-1} F^{(m-1)} = F_{m-1}$  data dalla formula ricorrente (4')). La (21) costituisce un sistema di  $n-m+2$  equazioni lineari nelle altrettante incognite  $\alpha_p^{(n, m)}$ . Essendo  $\alpha_{n+1, \mu}^{(m)} \equiv A_{\mu}^{(p-m+1)} \equiv 0$  quando  $n-m+1+\mu$  e  $p-m+1+\mu$  sono numeri dispari, il sistema in esame si scinde in due: uno omogeneo ed uno non omogeneo i cui determinanti sono entrambi non nulli perchè dati dai prodotti delle  $A_{\mu}^{(\mu)}$  che sono diverse da zero essendo  $\mu+\mu$  un numero pari. Ragionando come nel n. 4 della Nota B si ha che il sistema è risolubile in un sol modo, e le  $\alpha_p^{(n, m)}$  indipendenti da  $r$ . Si può così concludere: «il campo elettromagnetico dell'onda di Schelkunoff di «ordine»  $n$  «classe»  $m$  nel caso  $M \neq 0$ ,  $N=0$  è una combinazione lineare dei campi di  $n-m+2$  «gruppi» di multipoli della medesima «classe» e di «ordine» compreso fra  $m-1$  ed  $n$ , pari o dispari a seconda che tale è  $n$ ».

6. Il caso  $M=0$ ,  $N \neq 0$  si riconduce al precedente ruotando come è facile verificare il piano polare, ossia il piano  $xy$ , di  $-\pi/2 m$ .

Perciò, più in generale il campo magnetico dell'onda di Schelkunoff di «ordine»  $n$  è la somma dei campi di opportuni multipoli, e per la seconda equazione di Maxwell, la stessa proprietà vale per il campo elettrico. Il teorema enunciato nell'introduzione è perciò completamente provato. Infine cerchiamo di determinare esplicitamente l'espressione dei parametri  $\alpha_p^{(n, m)}$ . Constatato che a primo membro di (21) il polinomio  $f_n$  in  $r^{-1}$  contiene il termine di grado minimo  $r^{-2}$  con coefficiente 1, a meno dell'esponentiale  $\exp\left(-\frac{j\omega r}{c}\right)$ , mentre a secondo membro il polinomio  $A_{\mu}^{(p-m+1)}$  in  $r^{-1}$  contiene il termine  $r^{-2}$  solo per  $p=m-1+\mu$  con coefficiente  $\frac{j\omega \mathfrak{M}}{4\pi} \left(-\frac{j\omega}{c}\right)^{m+\mu}$ , per il principio d'identità si ha:

$$\alpha_{m-1+\mu}^{(n, m)} = -\frac{(-)^m 4 \pi m M \alpha_{n+1, \mu}^{(m)}}{j\omega \mathfrak{M}} \left(-\frac{c}{j\omega}\right)^{m+\mu} \quad (\mu=0, 1, \dots, n-m+1).$$

Termineremo osservando che per  $m=1$  le (15), (21) si riducono ovviamente alle (10), (13) della Nota B.

**Fisica matematica.** — *Sul campo elettromagnetico generalizzato.* Nota di GIUSEPPE ARCIDIACONO, presentata (\*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

1. PREMESSA. — In due precedenti Note Lincee <sup>(1)</sup>, abbiamo mostrato che le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale <sup>(2)</sup>, descrivono un campo a 10 componenti (che chiameremo *campo elettromagnetico generalizzato*) sei delle quali costituiscono l'ordinario campo elettromagnetico, mentre le altre quattro appartengono ad un nuovo campo, che abbiamo chiamato «campo  $g_0, g$ ». Qui ci proponiamo di completare lo studio del campo elettromagnetico generalizzato, e precisamente di costruire il tensore energetico di tale campo, di determinare le equazioni cui soddisfano i potenziali, e di far vedere come le equazioni di Maxwell generalizzate si possano dedurre da un principio variazionale.

2. IL TENSORE ENERGETICO DEL CAMPO. — Nelle considerazioni che qui faremo, ci riferiamo al vuoto dove si ha  $\bar{G}_{ikl} = G_{ikl}^*$ . Allora componendo il tensore  $G_{ikl}^*$  con la distribuzione  $J_{ik}$ , nel seguente modo:

$$(2.1) \quad 2f_l = J^{ik} G_{ilk}^*,$$

si ottiene un vettore  $f_l$  dello  $S_5$  che rappresenta le *azioni meccaniche del campo* <sup>(3)</sup>, le cui componenti si costruiscono facilmente a partire dalle espressioni date per  $J^{ik}$  e  $G_{ilk}^*$  nella precedente Nota, e risultano le seguenti:

$$(2.2) \quad \begin{cases} f_0 = \mathbf{J} \times \mathbf{E} - \mathbf{k} \times \mathbf{G} \\ \mathbf{f} = (J_0 \mathbf{E} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{H}) - (\mathbf{k} G_0 + \mathbf{h} \wedge \mathbf{G}) \\ f_4 = \mathbf{k} \times \mathbf{H} - \mathbf{h} \times \mathbf{E}. \end{cases}$$

Per dimostrare che, tenuto conto delle equazioni di Maxwell generalizzate, la densità di forza (2.2) può essere scritta sotto forma di divergenza di un tensore doppio simmetrico  $T_{jk}$  (che generalizza il tensore energetico del campo e. m.), osserviamo che si ha:

$$(2.3) \quad 2f_l = G_{ilk}^* J^{ik} = G_{ilk}^* \partial_s G^{iks} = \partial_s (G_{ilk}^* G^{iks}) - G^{iks} \partial_s G_{ilk}^*.$$

(\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) G. ARCIDIACONO, *Sull'importanza del gruppo base nel problema della unificazione dei campi fisici*, «Rend. Acc. Lincei», ser. 8<sup>a</sup>, vol. 18, fasc. 4, 1955; *Sulle equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale*, «Rend. Acc. Lincei», ser. 8<sup>a</sup>, vol. 18, fasc. 5, 1955.

(2) L. FANTAPPIÈ, *Su una nuova teoria di «relatività finale»*, «Rend. Acc. Lincei», ser. 8<sup>a</sup>, vol. 17, fasc. 5, 1954.

(3) Per la teoria di Maxwell, vedi per esempio LAUE, *La théorie de la Relativité*, vol. I, Paris, Gauthier-Villars, 1922, ovvero FINZI e PASTORI, *Calcolo tensoriale*, Bologna, Zanichelli, 1949.



Ma, con una permutazione circolare degli indici  $iks$ , si ha:

$$G^{*iks} \partial_s G_{ilk}^* = G^{*ksi} \partial_i G_{kls}^* = G^{*sik} \partial_k G_{sli}^*$$

e, per l'antisimmetria di  $G^*$  accade che  $G^{*iks} = G^{*ksi} = G^{*sik}$ ; quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G^{*iks} \partial_s G_{ilk}^* &= \frac{1}{3} G^{*iks} (\partial_s G_{ilk}^* + \partial_i G_{kls}^* + \partial_k G_{sli}^*) = \\ &= \frac{1}{3} G^{*iks} (\partial_s G_{ilk}^* - \partial_i G_{lks}^* - \partial_k G_{sil}^*). \end{aligned}$$

Se ricordiamo la seconda equazione di Maxwell generalizzata,

$$\text{Rot } G_{ilk}^* = \partial_s G_{ilk}^* - \partial_i G_{lks}^* + \partial_l G_{ksi}^* - \partial_k G_{sil}^* = 0,$$

possiamo semplificare l'espressione entro parentesi, ricavando

$$G^{*iks} \partial_s G_{ilk}^* = -\frac{1}{3} G^{*iks} \partial_l G_{ksi}^* = -\frac{1}{6} \partial_l (G^{*iks} G_{iks}^*),$$

e sostituendo nella (2.3) otteniamo infine

$$(2.4) \quad 2f_l = \partial_s (G_{ilk}^* G^{*iks} + \frac{1}{6} \delta_{ls} G^{*ikr} G_{ikr}^*).$$

Abbiamo così dimostrato che  $f_l$  si può dedurre dalla divergenza di un tensore doppio simmetrico. Tale tensore doppio simmetrico, può pure costruirsi, a partire dal bivettore  $G_{ik}$ , di cui  $G_{ilk}^*$  è il duale (vedi Nota prec.), nel seguente modo:

$$(2.5) \quad T_{jk} = G_{js} G_{.k}^s + \frac{1}{4} \delta_{jk} G_{rs} G^{rs}.$$

Adoperando questo tensore, più semplice di quello che figura entro parentesi nella (2.4), la (2.4) stessa può scriversi così:

(2.6)

$$f_j = \text{Div } T_{jk}$$

Il tensore energetico generalizzato  $T_{jk}$  risulta il seguente:

$$(2.7) \quad T_{jk} = \begin{bmatrix} W & -iX_1 & -iX_2 & -iX_3 & i\mathbf{G} \times \mathbf{H} \\ -iX_1 & P_{11} & P_{12} & P_{13} & Y_1 \\ -iX_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & Y_2 \\ -iX_3 & P_{31} & P_{32} & P_{33} & Y_3 \\ i\mathbf{G} \times \mathbf{H} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \bar{W} \end{bmatrix}$$

dove  $W$  è la densità di energia del campo

$$(2.8) \quad 2W = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + (G_0^2 + \mathbf{G}^2)$$

invece

$$(2.9) \quad 2\bar{W} = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + (G_0^2 - \mathbf{G}^2).$$

$P_{jk}$  è il tensore maxwelliano generalizzato degli sforzi:

$$(2.10) \quad P_{jk} = \frac{1}{2} [(\mathbf{G}^2 - G_0^2) - (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)] \delta_{jk} + E_j E_k + H_j H_k - G_j G_k$$

$$(j, k = 1, 2, 3)$$

ed infine  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  sono i vettori di Poynting generalizzati:

$$(2.11) \quad \mathbf{X} = G_0 \mathbf{G} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \quad \mathbf{Y} = G_0 \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{G}.$$

Ci sembra utile osservare che nella teoria di relatività ristretta (nella quale occorre sopprimere la 5ª riga e la 5ª colonna), il tensore  $T_{jk}$  si spezza nella somma di due tensori: il noto tensore energetico del campo e. m.  $T_{jk}^{(e.m.)}$ , ed il tensore energetico del campo  $g_0 g$ :

$$(2.12) \quad T_{jk}^{(e.m.)} = \frac{1}{2} \delta_{jk} (\mathbf{G}^2 - G_0^2) - G_j G_k \quad (j, k = 0, 1, 2, 3)$$

dove si è posto:  $G_j \equiv (i G_0, \mathbf{G})$ .

Per fenomeni statici, avremo

$$(2.13) \quad T_{jk} = T_{jk}^{(e)} + T_{jk}^{(m)} + T_{jk}^{(g_0)} + T_{jk}^{(g)},$$

con

$$(2.14) \quad \begin{cases} T_{jk}^{(e)} = -\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathbf{E}^2 + E_j E_k & ; \quad T_{jk}^{(m)} = -\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathbf{H}^2 + H_j H_k \\ T_{jk}^{(g)} = \frac{1}{2} \delta_{jk} \mathbf{G}^2 - G_j G_k & ; \quad T_{jk}^{(g_0)} = -\frac{1}{2} G_0^2 \delta_{jk} . \end{cases}$$

Il tensore energetico del campo  $g_0$ , a differenza degli altri tre che sono dello stesso tipo, è un tensore isotropo. Se poniamo  $G_0 = \sqrt{2\varphi}$ , otteniamo che la densità di forza ponderomotrice, dovuta al campo  $g_0$ , sarà data da

$$f_j = \text{div } T_{jk}^{(g_0)} = -\text{div } (\varphi \delta_{jk}) = -\delta_{jk} \partial_k \varphi - \varphi \partial_k \delta_{jk}$$

cioè (4)

$$(2.15) \quad f_j = -\partial_j \varphi = -\text{grad } \varphi \quad (j = 1, 2, 3).$$

La (2.6) equivale poi alle 5 equazioni:

$$(2.16) \quad \begin{array}{l} \text{(XI)} \quad -f_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{X} - \frac{1}{R} \frac{\partial (\mathbf{G} \times \mathbf{H})}{\partial x_4} \\ \text{(XII)} \quad \mathbf{f} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \text{div } P_{jk} + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_4} \\ \text{(XIII)} \quad f_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{G} \times \mathbf{H})}{\partial t} + \text{div } \mathbf{Y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_4} \end{array}$$

La prima e l'ultima delle quali generalizzano la legge di conservazione dell'energia e la seconda la legge di conservazione dell'impulso. Le equazioni scritte ci descrivono, attraverso il tensore energetico  $T_{jk}$ , la interazione tra particelle ed il campo.

(4) È da osservare che queste equazioni (2.15) coincidono con quelle della Teoria newtoniana, qualora  $\varphi$  si interpreti come potenziale gravitazionale (per  $m = 1$ ).

3. LE EQUAZIONI DEI POTENZIALI. - Dalla seconda equazione di Maxwell generalizzata:  $\text{Rot } G_{ikl}^* = 0$ , segue la esistenza di un bivettore potenziale  $\varphi_{ik}$ , cioè di 10 potenziali del campo:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G_{ikl}^* &= \text{Rot } \varphi_{ik} = \\ &= \partial_i \varphi_{kl} + \partial_k \varphi_{li} + \\ &+ \partial_l \varphi_{ik} \end{aligned}$$

$$(XIV) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } a - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_4}$$

$$(XV) \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} - \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_4}$$

$$(XVI) \quad G_0 = \text{div } \mathbf{V}$$

$$(XVII) \quad \mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{U} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

Se allora ricordiamo che, dato un  $p$ -vettore  $w$  (con  $p > 1$ ), vale la identità <sup>(5)</sup>:

$$\nabla^2 w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \partial^j \partial_j w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \text{Div Rot } w + \text{Rot Div } w$$

sostituendo la  $G_{ikl}^* = \text{Rot } \varphi_{ik}$  nella 1<sup>a</sup> equazione di Maxwell generalizzata  $J_{ik} = \text{Div } G_{ikl}^*$ , otteniamo la equazione cui soddisfano i potenziali:

$$(3.2) \quad \boxed{\times} \varphi_{ik} - \text{Rot Div } \varphi_{ik} = J_{ik}.$$

4. LE EQUAZIONI DI MAXWELL GENERALIZZATE, DEDOTTE DA UN PRINCIPIO VARIAZIONALE. - Poniamoci dapprima nello  $S_4$ . Weyl <sup>(6)</sup> ha fatto vedere che le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$(4.1) \quad \text{Rot } F_{ik} = 0 \quad ; \quad \text{Div } F_{ik} = J_k$$

possono dedursi da un principio variazionale, nel seguente modo: Se poniamo  $F_{ik} = \text{Rot } A_i$ , dove  $A_i$  è il quadripotenziale, la prima equazione è identicamente soddisfatta. Consideriamo allora l'integrale invariante

$$(4.2) \quad L = \int_{\omega} \mathcal{L} d\omega \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} - A_i J^i$$

integrato su un certo dominio  $\omega$  dello  $S_{3+1}$ . Consideriamo una variazione arbitraria  $\delta A_i$  delle funzioni  $A_i$ , per la quale  $\delta A_i = 0$  sul contorno del dominio, mentre la  $J^i$  vien tenuta costante per tale variazione. Se ricordiamo che  $\delta \partial_k A_i = \partial_k \delta A_i$ , otteniamo.

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{\omega} \delta \mathcal{L} d\omega = \int_{\omega} \left[ \frac{1}{2} F^{ik} \delta (\partial_i A_k - \partial_k A_i) - J^i \delta A_i \right] d\omega = \\ &= \int_{\omega} \left[ \left( \frac{1}{2} F^{ik} \delta \partial_i A_k + \frac{1}{2} F^{ik} \delta \partial_i A_k \right) - J^i \delta A_i \right] d\omega = \int_{\omega} (F^{ik} \delta \partial_i A_k - J^i \delta A_i) d\omega \end{aligned}$$

(5) J. A. SCHOUTEN, *Tensor analysis for physicists*, Oxford, 1954, II ed.

(6) H. WEYL, *Raum-Zeit-Materie*, Berlin 1918, ovvero C. MÖLLER, *The Theory of relativity*, Oxford 1952, p. 157.

integrando per parti, e ricordando che sul contorno di  $\omega$  si ha  $\delta A_i = 0$ :

$$\delta L = \int_{\omega} (\partial_i F^{ik} - J^k) \delta A_k d\omega.$$

Se vogliamo che  $\delta L = 0$  per una variazione del tipo considerato, occorre che  $\partial_i F^{ik} = J^k$ , che è la 2ª equazione di Maxwell.

Lo stesso ragionamento può ripetersi per le equazioni del campo  $g_o g$ :

$$(4.3) \quad \text{Div } G_i = 0 \quad ; \quad \text{Rot } G_i = J_{ik}.$$

Se poniamo  $G_i = \text{Div } \varphi'_{ik} = \partial_k \varphi'_{ik}$ , la prima equazione è identicamente soddisfatta. Consideriamo allora l'integrale invariante:

$$(4.4) \quad L' = \int_{\omega} \mathcal{L}' d\omega \quad \text{con} \quad \mathcal{L}' = G_i G^i - J'_{ik} \varphi'^{ik}$$

in cui  $\omega$  è un certo dominio dello  $S_{3+1}$ . Per una variazione  $\delta \varphi'_{ik}$ , per la quale  $\delta \varphi'_{ik} = 0$  sul contorno del dominio  $\omega$ , mentre  $J'_{ik}$  rimane costante, avremo

$$\delta L' = \int_{\omega} \delta \mathcal{L}' d\omega = \int_{\omega} (2 G^i \delta G_i - J'_{ik} \delta \varphi'^{ik}) d\omega = \int_{\omega} (2 G_i \delta \partial_k \varphi'_{ik} - J'_{ik} \delta \varphi'^{ik}) d\omega.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} &= \int_{\omega} (2 \partial_k G_i \delta \varphi'^{ik} - J'_{ik} \delta \varphi'^{ik}) d\omega = \int_{\omega} (\partial_k G_i \delta \varphi'^{ik} + \partial_i G_k \delta \varphi'^{ki} - J'_{ik} \delta \varphi'^{ik}) d\omega \\ &= \int_{\omega} (\partial_k G_i - \partial_i G_k - J'_{ik}) \delta \varphi'^{ik} d\omega = \int_{\omega} (\text{Rot } G_i - J'_{ik}) \delta \varphi'^{ik} d\omega \end{aligned}$$

e, affinchè  $\delta L' = 0$  per variazioni del tipo considerato, occorre che  $\text{Rot } G_i = J'_{ik}$  c. v. d.

Dimostrato così che le equazioni del campo e. m. e quelle del campo  $g_o g$  (nella relatività ristretta) si possono dedurre da un principio variazionale, facciamo vedere che lo stesso può farsi per le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale:

$$(4.5) \quad \text{Rot } G_{ikl}^* = 0 \quad ; \quad \text{Div } G_{ikl}^* = J_{ik}.$$

Infatti, se poniamo  $G_{ikl}^* = \text{Rot } \varphi_{ik}$ , la 1ª equazione è identicamente soddisfatta. Consideriamo allora l'integrale invariante:

$$(4.6) \quad M = \int_{\Omega} \mathfrak{M} d\Omega \quad \text{con} \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{6} G_{ikl}^* G^{*ikl} - \varphi^{ik} J_{ik}$$

integrato su un certo dominio  $\Omega$  dello  $S_{4+1}$ . Consideriamo una variazione arbitraria  $\delta \varphi^{ik}$  tale che  $\delta \varphi^{ik} = 0$  sul contorno del dominio, mentre  $J_{ik}$  resta costante per tale variazione.

Allora si avrà:

$$\begin{aligned}\delta M &= \int_{\Omega} \delta \mathfrak{M} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{3} G^{*ikl} \delta (\partial_i \varphi_{kl} + \partial_k \varphi_{li} + \partial_l \varphi_{ik}) - J_{ik} \delta \varphi^{ik} \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{3} (G^{*ikl} \delta \partial_i \varphi_{kl} + G^{*ikl} \delta \partial_k \varphi_{li} + G^{*ikl} \delta \partial_l \varphi_{ik}) - J_{ik} \delta \varphi^{ik} \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (G^{*ikl} \delta \partial_i \varphi_{kl} - J_{ik} \delta \varphi^{ik}) d\Omega.\end{aligned}$$

Integrando per parti:

$$\delta M = \int_{\Omega} (\partial_l G_{ik}^{*l} - J_{ik}) \delta \varphi^{ik} d\Omega$$

ed affinché  $\delta M = 0$  per le variazioni del tipo considerato, occorre che si abbia  $\text{Div } G_{ik}^{*l} = J_{ik}$  c. v. d.

Così abbiamo completato il nostro studio sulle equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale.

Poichè la teoria qui esposta risulta evidentemente una « teoria unitaria » del campo  $e. m.$  e del campo  $g. g.$ , ci sembra che non risulti privo di interesse uno ulteriore studio del campo  $g. g.$ , allo scopo di vedere se e quale significato fisico ha questo nuovo campo che appare accanto al campo elettromagnetico.

**Chimica fisica.** — *Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua* (\*). Nota III di MASSIMO SIMONETTA e GIORGIO FAVINI, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Nella presente Nota vengono esposti e discussi i risultati da noi ottenuti a completamento della nostra indagine sul meccanismo della reazione tra 1-cloro, 2-nitroetano ed acqua.

Per la preparazione e la purificazione del composto e dei solventi e le modalità sperimentali adottate nel corso delle prove di cinetica rimandiamo alla Nota I (1).

Oltre a miscele acqua-diossano e acqua-acido formico abbiamo usato come solvente miscele acqua-acetone di varia concentrazione. L'acetone era purificato secondo il metodo di Conant e Kirner (2). I risultati sono raccolti nelle tabelle seguenti.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) M. SIMONETTA-G. FAVINI, questi « Rend. », vol. XIV, ser. VIII, fasc. 1, 119 (1953).

(2) CONANT-KIRNER, « J.A.C.S. », 46, 245 (1924).



TABELLA I.  
*Cinetiche in acqua-diossano.*

0,1	—	2 : 1	60	0,0073
0,1	—	2 : 1	70	0,0148
0,1	—	1 : 2	60	0,0021
0,1	0,1 HCl	1 : 2	60	0,0020
0,1	0,1 NaCl	1 : 2	60	0,0020
0,1	—	1 : 1,4	70	0,0059
0,1	—	1 : 11	70	0,00020
0,1	—	1 : 23	70	0,000053

TABELLA II.  
*Cinetiche in acqua-acetone.*

0,1	—	2 : 1	60	0,0071
0,1	—	1 : 1	60	0,0046
0,1	—	1 : 2	60	0,0023
0,1	—	1 : 5	60	0,00060
0,1	—	2 : 1	70	0,014
0,1	—	1 : 1	70	0,0090
0,1	—	1 : 2	70	0,0039
0,1	—	1 : 5	70	0,0012
0,1	—	1 : 11	70	0,00023
0,1	—	1 : 23	70	0,000043

Nelle precedenti tabelle sono indicati nelle varie colonne successivamente: la normalità dell'1-cloro, 2-nitroetano, la concentrazione di altre sostanze eventualmente presenti in soluzione, il rapporto in volume tra i componenti il solvente, la temperatura in gradi centigradi e la costante di velocità  $k_x$  in minuti<sup>-1</sup>.

In merito alla tabella III notiamo che in essa sono ripetute cinetiche già descritte nella Nota I e che i valori delle costanti sono sensibilmente diversi. Poichè ciò non si è verificato per le cinetiche in acqua-diossano la causa non è da attribuirsi al grado di purezza del composto in esame, ma probabilmente ad un errore commesso durante la diluizione delle soluzioni contenenti acido formico. La variazione dei valori di queste costanti peraltro non influisce sulle conclusioni in merito al meccanismo della reazione.

TABELLA III.

*Cinetiche in acqua-acido formico.*

0,1	—	1 : 5	60	0,00020
0,1	—	1 : 5	65	0,00031
0,1	—	1 : 5	70	0,00045
0,1	—	1 : 2	60	0,0015
0,1	—	1 : 2	65	0,0018
0,1	—	1 : 2	70	0,0028
0,1	—	1 : 1	60	0,0052
0,1	—	1 : 1	65	0,0074
0,1	—	1 : 1	70	0,013
0,1	—	2 : 1	60	0,017
0,1	—	2 : 1	65	0,026
0,1	—	2 : 1	70	0,033
0,1	—	1 : 1,4	70	0,0060
0,1	—	1 : 11	70	0,00015
0,1	—	1 : 23	70	0,000060
0,1	—	5 : 1	60	0,032
0,1	—	5 : 1	70	0,070
0,1	0,1 HCl	1 : 2	60	0,00070 *
0,1	0,1 HBr	1 : 2	60	0,00070 *
0,1	0,1 H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	1 : 2	60	0,00092 *
0,1	0,1 KCl	1 : 2	60	0,0020
0,1	0,1 KBr	1 : 2	60	0,0018

TABELLA IV.

*Cinetiche in soluzione 0,1 N in acqua-acido formico 1 : 5.*

$t$ in primi	$k_t$ in minuti <sup>-1</sup>		
	T = 60° C	T = 65° C	T = 70° C
90	0,000264	0,000374	0,000565
180	0,000224	0,000365	0,000550
270	0,000211	0,000322	0,000495
360	0,000200	0,000320	0,000468

Inoltre abbiamo potuto stabilire che nelle cinetiche in acido formico, escluse quelle contrassegnate con asterisco, il valore di  $k_1$  non rimane costante ma decresce progressivamente nel tempo; il valore riportato in tabella III è quello corrispondente ad una idrolisi del 20 % del cloroderivato presente.

In tabella IV sono riportate per esteso, a titolo di esempio, alcune delle cinetiche in acqua-acido formico dalle quali si può avere un'idea quantitativa del fenomeno.

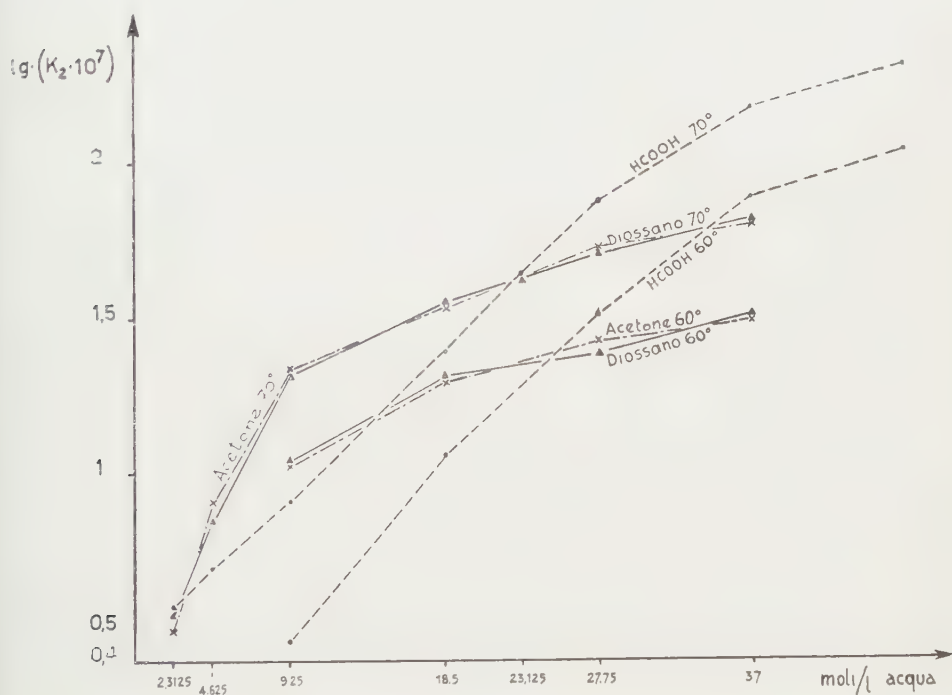


Fig. 1.

Un quadro generale si ottiene dall'esame della figura 1. Poichè la velocità di solvolisi dell'1-cloro, 2-nitroetano è decisamente superiore a quella del cloroetano, abbiamo attribuito alla reazione un meccanismo  $S_{N_2}$ ; pertanto sulle ordinate di fig. 1 sono riportati i valori di  $k_2$ , ottenuti dividendo i corrispondenti  $k_1$  per la concentrazione dell'acqua, costante durante la reazione, nei vari solventi;  $k_2$  risulta espresso in litri  $\text{moli}^{-1} \text{sec}^{-1}$ ; sulle ascisse sono riportate le concentrazioni dell'acqua in  $\text{moli/litro}$ .

È singolare l'analogia di comportamento delle soluzioni in acetone e diossano; in tutte le condizioni da noi sperimentate le costanti di velocità nei due solventi sono risultate eguali, nei limiti degli errori sperimentali. Ciò significa che la costante dielettrica del mezzo ha scarsa influenza sui valori delle costanti ed è una ulteriore conferma del fatto che la reazione avvenga con meccanismo  $S_{N_2}$ .

D'altro lato la reazione non si può definire bimolecolare in senso stretto in quanto i valori di  $k_2$  non restano costanti al variare della concentrazione di acqua nello stesso solvente organico, anche quando la variazione di costante dielettrica è molto inferiore a quella corrispondente a due solventi organici diversi con egual contenuto in acqua, come appare dall'esame della figura 2, nella quale  $k_2$  è riportato in funzione di  $1/D$  ( $D$  costante dielettrica del solvente misto alla temperatura della reazione).

L'interpretazione più semplice ci pare quella già da noi proposta (3), di un caso di reazione polimolecolare, con l'intervento di  $n$  molecole di acqua,

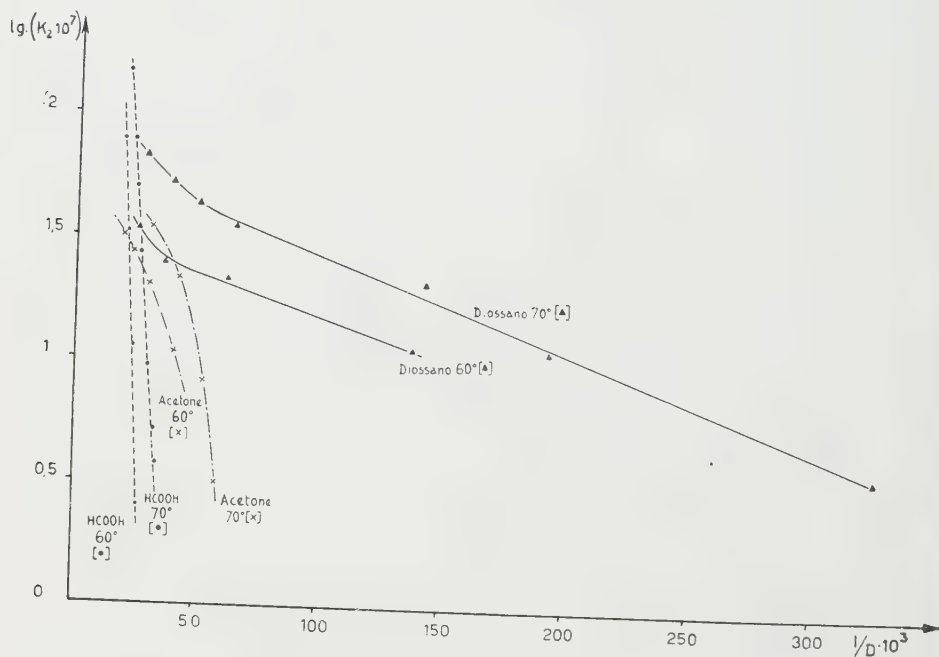


Fig. 2.

delle quali  $n-1$  polarizzano il legame C—Cl e una partecipa direttamente all'atto di sostituzione del cloro.

Una posizione particolare compete al solvente acqua-acido formico. Una prima possibilità per spiegare il progressivo decrescere dei valori delle costanti di velocità era l'ipotesi della formazione parallela di alcol e di formiato, e dell'influenza della costante di velocità inversa della seconda reazione. Questa ipotesi è stata abbandonata perchè non ci è riuscito di dimostrare la presenza di formiato di nitroetile nei prodotti di reazione, mentre è stato possibile isolare l'alcol nitroetile in quantità grossolanamente corrispondenti al cloroione formato. Poichè la « struttura » del solvente sembra avere importanza decisiva nel determinare la velocità di idrolisi e poichè tale struttura, nel caso dell'acido formico, viene modificata durante il corso della reazione

(3) M. SIMONETTA-G. FAVINI, questi « Rend. », vol. XIV, ser. VIII, fasc. 2, 268 (1953).

per progressiva formazione di acido cloridrico, abbiamo pensato che questa potesse essere la vera ragione del singolare comportamento di questo solvente. A dimostrazione di tale fatto abbiamo eseguito cinetiche in presenza di acidi, anche senza ioni in comune coi prodotti della reazione, e di sali, aventi anche ioni in comune coi prodotti della reazione. Mentre la presenza dei sali provoca sempre un aumento della velocità di reazione, come è prevedibile in conseguenza dell'aumento di forza ionica del mezzo, gli acidi provocano una sensibile riduzione di tale velocità: inoltre poichè la concentrazione di idrogenoioni non varia sensibilmente durante il corso della reazione, nelle prove condotte in presenza di acidi i valori di  $k_1$  rimangono costanti.

Naturalmente anche l'aggiunta di acqua provoca nelle soluzioni in acido formico modificazioni più profonde che non nel caso dei solventi non ionizzabili e a ciò si può ricondurre la ragione della netta differenza di comportamento di fronte alla variazione di concentrazione in acqua tra le soluzioni in diossano e acetone da un lato e quelle in acido formico dall'altro.

**Chimica inorganica.** — *Monotellururo e monossimonotellururo di torio* (\*). Nota di RICCARDO FERRO, presentata(\*\*) dal Socio L. ROLLA.

Dopo aver studiato i sistemi dell'uranio con alcuni elementi, ho ritenuto di un certo interesse iniziare l'esame degli analoghi sistemi col torio, in modo da avere a disposizione più dati sulla chimica di questi elementi pesanti.

Come per l'uranio anche in questi casi è stato ritenuto preferibile preparare i vari campioni a partire direttamente dal metallo, benché spesso siano possibili anche sistemi di sintesi non diretta dagli elementi.

Il torio usato è stato preparato per elettrolisi del fluotorato di potassio fuso in buon accordo col metodo di Driggs e Lilliendahl [1]; può avere un certo interesse un breve cenno a questa preparazione.

Secondo il sistema detto il fluotorato (precipitato da  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4$  con KF e seccato) viene sciolto a piccole porzioni in un grande eccesso di KCl, NaCl fusi in un crogiolo di carbone che funziona da anodo per l'elettrolisi. Nel bagno fuso viene poi introdotto il catodo formato da una sottile lamina di molibdeno e si fa passare la corrente per un tempo sicuramente sufficiente a spostare tutto il torio introdotto; poi si estrae la lamina sulla quale rimane aderente il torio sotto forma di polvere impastata con il sale, si riaggiunge al bagno un'altra porzione di  $\text{KThF}_5$  e si ricomincia l'elettrolisi con un altro catodo.

In pratica è necessario operare con precauzione specialmente per quanto riguarda la temperatura che è bene che sia di pochissimo superiore alla temperatura di fusione del bagno (in generale intorno a  $770^\circ$ – $780^\circ$ ) in modo che quando si estrae il catodo il miscuglio di sale e torio solidifichi rapida-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-Laboratorio Chimico-fisico dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.



mente sull'elettrodo stesso senza gocciolare nel bagno con conseguente caduta del torio sul fondo del crogiolo e sua perdita per carburazione. Il controllo termico diventa però più difficile man mano che l'elettrolisi procede ed il bagno si concentra in fluoruro.

Per questi motivi ho preferito usare un crogiolo di materiale refrattario sospendendo in esso un anodo di grafite ed il solito catodo di molibdeno, operando dapprima come descritto precedentemente (per le prime 3 o 4 porzioni di  $\text{KThF}_5$ ), elevando poi la temperatura (fin verso  $900^\circ$ ) e lasciando raccogliere il torio sul fondo del crogiolo; l'elettrolisi era spinta bene a fondo fino a notevole sviluppo di sodio. Cessata l'elettrolisi e tolti dal crogiolo gli elettrodi veniva decantato via il sale fuso dal torio sottostante (curando naturalmente che questo non venisse affatto a contatto con l'aria) aggiunto altro  $\text{NaCl}$ , che veniva nuovamente fuso, ecc. in modo da lavare via dal torio le ultime tracce di  $\text{ThF}_4$  ancora presenti.

In questo modo si può ricuperare tutto il torio che si forma nel processo elettrolitico e la resa diviene molto più alta che non nel caso precedente, la porzione che rimane sul fondo è però in generale un po' meno pura. Dal miscuglio di torio e sale il metallo è stato poi separato per lavaggio prima con acqua disareata, poi con acido nitrico, acqua, alcool, etere ed infine essiccamento sotto vuoto.

Il migliore torio ottenuto è sotto forma di polvere nera pesante non molto piroforico e di elevata purezza: l'unica impurezza presente è praticamente meno dello 0,3 % di ossigeno sotto forma di  $\text{ThO}_2$  meccanicamente mescolata al metallo. La sua costante reticolare è  $5,073 \text{ \AA}$  (il valore più probabile della letteratura è  $5,075 \text{ \AA}$ ).

Con questo metallo sono stati preparati i composti coll'arsenico [2]; antimonio e bismuto oltre a composti col tellurio.

In questa Nota riporto i risultati ottenuti relativamente ai composti  $\text{ThTe}$  e  $\text{ThOTe}$ .

*Composto ThTe.* - Il composto  $\text{ThTe}$  ( $\text{Th} \%$  64,53) è stato preparato per sintesi dagli elementi rinchiusi in ampolle di quarzo (chiuse in alto vuoto) scaldate intorno a  $800^\circ$ .

Esso si presenta come una polvere nera piroforica che reagisce vigorosamente coi reattivi chimici (con  $\text{HNO}_3$  incendiandosi), similmente a quanto fanno i tellururi di uranio precedentemente studiati [3].

L'esame roentgenografico (Radiazione  $\text{K}_\alpha\text{Cu}$ ,  $\lambda_{\alpha_1} = 1,53739 \text{ \AA}$ , metodo Debye) ha rivelato una struttura cubica tipo  $\text{CsCl}$  con  $a_0 = 3,820 \text{ \AA}$ , cui corrisponde  $\rho_x = 10,65 \text{ gr./cm}^3$ .

Nella tabella I sono riportate le costanti reticolari e le distanze interatomiche dei monocalcogenuri di uranio e torio tutti isostrutturali tra di loro e tutti con struttura tipo  $\text{NaCl}$  ad eccezione appunto del  $\text{ThTe}$ . Questo fatto può mettersi in relazione sia con le maggiori caratteristiche di composto intermetallico del tellururo sia con le evidenti maggiori dimensioni atomiche del torio.

TABELLA I.

*Costanti reticolari e distanze interatomiche nei monocalcogenuri di torio ed uranio.*

UX	$a_0$	U—X	ThX	$a_0$	Th—X
UO [4] . . . .	4,92	2,46	ThO [4] . . . .	5,24	2,62
US [5] . . . .	5,473	2,73	ThS [5] . . . .	5,671	2,88
USe [3] . . . .	5,739	2,82	ThSe [6] . . . .	5,863	2,93
UTe [3] . . . .	6,151	3,07	ThTe . . . . .	3,820	3,31

*Composto ThOTe.* — Il composto ThOTe (Th % 61,78; Te % 33,96), le cui caratteristiche chimiche sono simili a quelle del composto precedente si ottiene facilmente per cauta ossidazione per esempio di ThTe od anche per reazione del Te con opportuna miscela di Th e ThO<sub>2</sub>.

L'esame roentgenografico mostra per ThOTe una struttura tetragonale con i seguenti valori più probabili per le costanti:

$$a = 4,110 \text{ kX} \quad ; \quad c = 7,534 \text{ kX} \quad ; \quad c/a = 1,833.$$

La struttura è tipo PbFCl (EO<sub>1</sub> Strukturbericht) con le seguenti posizioni atomiche:

Gruppo D<sub>4h</sub><sup>7</sup> — P<sub>4</sub>/nmm, con 2 O in (a) 0, 0, 0 — 1/2, 1/2, 0  
 2 Th in (c) 0, 1/2,  $x$  — 1/2, 0,  $\bar{x}$  con  $x = 0,18$   
 2 Te in (c') 0, 1/2,  $y$  — 1/2, 0,  $\bar{y}$  con  $y = 0,63$

Il fattore di struttura calcolato per un'ottantina di coppie di valori di  $x$  ed  $y$  per varie righe porta infatti ad un buon accordo tra intensità calcolate ed osservate per i valori sopra indicati. Alle due molecole per cella corrisponde una densità  $X \rho_x = 9,74 \text{ gr/cm}^3$ . I valori delle distanze interatomiche e la coordinazione sono per ThOTe i seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Th} - 4 \text{O} \quad 2,45 \text{ kX} \\ \text{Th} - 1 \text{Te} \quad 3,39 \text{ kX} \\ \text{Th} - 4 \text{Te} \quad 3,24 \text{ kX} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{media} \\ \text{pesata} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Th} - 4 \text{O} \\ \text{Th} - 1 \text{Te} \\ \text{Th} - 4 \text{Te} \end{array}} \right\} \text{Th} - \text{Te} \quad 3,27 \text{ kX}.$$

Questo composto si aggiunge agli analoghi composti ossicalcogenati del torio ed uranio tutti isomorfi e le cui caratteristiche dimensionali sono riportate nella tabella II insieme a quelle dei biossidi.

TABELLA II.

*Distanze interatomiche negli ossicalcogenuri di torio ed uranio.*

UOX	U—O	U—X	ThOX	Th—O	Th—X
UO <sub>2</sub> . . . . .	2,37		ThO <sub>2</sub> . . . . .	2,42	
UOS [5] . . . . .	2,34	2,93	ThOS [5] . . . . .	2,39	3,00
UOSe [3] . . . . .	2,36	3,03	ThOSe [6] . . . . .	2,38	3,15
			ThOTe . . . . .	2,45	3,27

Si osservi l'andamento caratteristico delle distanze interatomiche in queste che potremmo chiamare serie poli-isomorfe e che è del resto analogo a quello che si verifica anche in altre serie dello stesso tipo come, per esempio, PbF<sub>2</sub> (isostrutturale con ThO<sub>2</sub> e UO<sub>2</sub>), PbFCl, PbFBr (isostrutturali cogli ossicalcogenuri detti).

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] Si veda in BRAUER G., *Handbuch der präparativen Chemie*, Stuttgart, 1954, 879.  
 [2] FERRO R., « Acta Cryst. », in corso di stampa (1955).  
 [3] FERRO R., « Z. anorg. allg. Chemie », 275, 320 (1954).  
 [4] Dati non pubblicati riportati da RUNDLE R., « Acta Cryst. », I, 180 (1948).  
 [5] ZACHARIASEN W., « Acta Cryst. », 2, 291 (1949).  
 [6] D'EYE R., SELLMAN P., MURRAY J., « J. Chem. Soc. », 2555 (1952).

**Chimica inorganica.** — *Su un nuovo metodo di preparazione del Samario metallico*<sup>(\*)</sup>. Nota di ALDO IANDELLI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. ROLLA.

Dei metalli delle terre rare attualmente conosciuti, il Samario è stato l'ultimo ad essere recentemente isolato, nonostante che si abbiano metodi assai efficaci per l'isolamento e la purificazione dei suoi sali. I due procedimenti che ne hanno permessa la preparazione sono stati quello della riduzione ad alta temperatura del bromuro col bario metallico <sup>(1)</sup>, e dell'ossido col Lantanio <sup>(2)</sup>. Il primo metodo presenta le difficoltà di un'operazione a 1700° con un metallo reattivo come il bario, il secondo l'inconveniente dell'uso di un'altra terra rara metallica.

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) E. I. ONSTOTT, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 75, 5128 (1953).

(2) A. H. DAANE, D. H. DENNISON, F. H. SPEDDING, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 75, 2272 (1953).

Dato che fra le proprietà del samario metallico si fa notare particolarmente la grandissima volatilità, assai maggiore di quella delle altre terre rare, ho voluto esaminarne la possibilità di preparazione per riduzione con alluminio e distillazione del metallo nel vuoto, metodo ben noto per gli alcalino terrosi.

L'alluminio usato aveva una purezza del 99,98 %, e l'ossido di samario proveniva dal frazionamento del prof. Rolla, ed aveva come unica impurezza una piccolissima quantità di neodimio. Desidero ringraziare sentitamente il prof. Rolla, per l'interesse con cui ha seguito il presente lavoro.

Una quarantina di prove hanno permesso di precisare le condizioni in cui si può ottenere un buon risultato, su piccola scala. Le esperienze sono state eseguite scaldando nel vuoto, a temperature variabili da 1400° a 1700°, miscugli di limatura di alluminio ed ossido di samario in rapporti diversi. Le due polveri venivano compresse fortemente in modo da formare delle pastiglie e poi scaldate in un crogiolo di molibdeno, posto a sua volta in un lungo crogiolo di Alsint, in cui veniva fatto il vuoto. Durante le prove questo è stato di  $10^{-3}$ – $10^{-4}$  mm Hg. Subito sopra alle pastiglie arrivava un tubo di ferro a circolazione d'acqua, sul quale poteva condensarsi il distillato. In quasi tutti i casi la quantità di alluminio è stata tenuta fissa ad 1 gr, mentre è stata variata quella dell'ossido di samario.

I prodotti ottenuti sono stati esaminati con l'analisi e con i raggi X. L'analisi è stata effettuata determinando il Sm come ossido, dopo separazione come ossalato, e per un certo numero di campioni è stata completata da quella spettrografica, che è stata eseguita nell'Istituto di Chimica analitica di Firenze dal prof. Cannieri, che ringrazio vivamente. Quest'ultima è stata importante per dimostrare che nei distillati non c'era nessuna altra impurezza, oltre l'alluminio. L'esame röntgenografico è stato fatto col metodo delle polveri, usando la radiazione K del ferro.

Una prima esperienza è stata effettuata con ossido di neodimio + alluminio, per vedere come si comportava un'altra terra rara vicina al samario nelle stesse condizioni. Con un'ora di riscaldamento a 1700°–1800° si ottiene un leggero sublimato, che non contiene però neodimio.

La differenza è nettissima sostituendo a quello di neodimio l'ossido di samario, che fornisce dopo un'ora a 1600°–1700° alcuni grammi di metallo, purtroppo fortemente impuro di alluminio. La quantità di alluminio nel distillato varia col rapporto Al:  $\text{Sm}_2\text{O}_3$ . Col rapporto 1 mole  $\text{Sm}_2\text{O}_3$ : 4 gr at. Al il distillato contiene in media 67–68 % Sm, con quello stechiometrico 1  $\text{Sm}_2\text{O}_3$ : 2 Al si arriva al 94–95 %; per percentuali intermedie si ottengono leghe a composizione intermedia. I prodotti che si ottengono in questo intervallo hanno l'aspetto di masse compatte, che dopo la distillazione sembra abbiano subito una parziale fusione; sono assai duri e si frantumano con difficoltà. L'esame con i raggi X ha, senza volere, dato un'idea delle fasi esistenti, dal 67 % Sm in là, nel sistema Sm–Al (4 fasi), una delle quali è identificabile come  $\text{SmAl}_2$ , (73,6 % Sm), cubica e isomorfa con  $\text{LaAl}_2$  e  $\text{CeAl}_2$ .

È curioso il fatto che questa fase pura si forma anche distillando da sola una lega al 67,5 % Sm.

L'aumento della temperatura influisce sulla purezza del prodotto finale, aumentandone la percentuale di alluminio; ma non in modo molto forte, e d'altra parte non può essere abbassata sotto a 1500°, perché altrimenti la reazione anche dopo un'ora e mezzo o due è ben lontana dall'essere completa.

Le rese in metallo compatto non sono grandi: fra il 40 ed il 60 %; e appaiono superiori per miscugli con maggiore quantità di alluminio.

Le prove successive sono state fatte tenendo costante la temperatura ed aumentando la quantità di ossido di samario, ma senza avere un risultato apprezzabilmente migliore. Anche con un rapporto 1 Al : 1 Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub> la purezza del metallo non supera il 95 %. È probabile che a complicare i risultati intervengano due fattori: la possibilità che l'Al formi il sottossido Al<sub>2</sub>O volatile <sup>(3)</sup>, e il fatto che il samario arrivi a condensarsi sul refrigerante dopo essersi formato in una massa sinterizzata di Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Al, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, che deve attraversare per diffusione.

A parte le possibili interpretazioni del meccanismo della reazione, si sono presentate a questo punto due possibilità per ottenere un prodotto puro: quella di ridistillare leghe col 94-95 % mescolate con altro ossido di samario, e l'altra di usare un miscuglio iniziale estremamente ricco di Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Col primo metodo (il rapporto Sm (95 %) : Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub> era di circa 1/3) si ottengono prodotti col 97,7-98,8 % Sm, e che si presentano in forma nettamente diversa dalle leghe fino al 95 % rammentate precedentemente. Il metallo condensato è infatti in forma di fibre lucenti, come quelle tipiche che si formano nella preparazione dei metalli alcalino terrosi, è duttile; e, principalmente, fornisce i fotogrammi tipici della struttura del Samario, determinata da Hellinger e Zachariasen <sup>(4)</sup>. La percentuale di Al rimane tuttavia ancora sensibile, e ad essa si aggiunge come impurezza nuova una piccola quantità di azoto, assai noiosa perché lo 0,1 % di azoto è presente nel metallo come l'1 % di azoturo.

La reazione fra alluminio e quantità di ossido di samario di 3-4,5 volte quella stechiometrica equivalente (per 1 gr Al 20-30 gr Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) fornisce direttamente prodotti col 98-98,5 % Sm, d'aspetto identico ai precedenti, ma non si rileva una apprezzabile differenza fra di loro nonostante la forte differenza nelle quantità di Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. La ragione di questo sta nel fatto che la primissima porzione del distillato contiene sempre una quantità di alluminio superiore alle successive, che può però essere eliminata frazionando l'operazione.

Le condizioni da tenere per la preparazione risultano in definitiva le seguenti. Il miscuglio di 1,2 gr Al + 20 gr Sm<sub>2</sub>O<sub>3</sub> viene scaldato nel vuoto

(3) M. HOCH, H. J. JONSTON, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 76, 2560 (1954).

(4) F. H. HELLINGER, W. H. ZACHARIASEN, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 75, 5650 (1953).

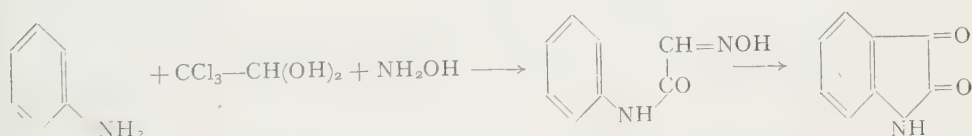


a 1550° per 15-20'; poi si raffredda, si apre il crogiolo e si toglie la porzione condensata; successivamente si distilla a 1550° per un'ora. I risultati ottenuti operando in questo modo sono buoni: il metallo è al 99,2-99,4%; ed in ogni esperienza se ne ottengono 3,5-4 grammi.

Questa quantità è attualmente limitata dalle piccole dimensioni del crogiolo di Alsint; prossimamente sarà possibile effettuarla su scala più grande, che probabilmente porterà a risultati migliori, sia per il rendimento che per la purezza. Il metallo verrà usato per studiare leghe e composti intermetallici del Samario, che sono ancora completamente sconosciuti.

**Chimica organica.** — *Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: ciclizzazione delle isonitrosoacetanilidi con acido polifosforico* (\*). Nota I di FRANCO PIOZZI e GIORGIO FAVINI, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

A seguito di prove eseguita da uno di noi, miranti alla sintesi dell'*acido xantoechinulinico* (acido isatin-5,7-dicarbossilico) prodotto di degradazione ossidativa dell'*idroechinulina* <sup>(1)</sup>, abbiamo intrapreso lo studio di alcuni aspetti della sintesi di Sandmeyer delle isatine tramite le isonitrosoacetanilidi:



Avendo notato che per la ciclizzazione delle isonitrosoacetanilidi non è mai stato usato alcun altro agente condensante diverso dall'acido solforico concentrato proposto da Sandmeyer <sup>(2)</sup>, abbiamo sperimentato l'azione del cosiddetto *acido polifosforico* <sup>(3)</sup>, reattivo largamente impiegato di recente in altre operazioni analoghe di ciclizzazione mediante disidratazione e capace inoltre di provocare la trasposizione di Beckmann su chetossime e

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R., e presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) Per la struttura dell'acido xantoechinulinico vedi A. QUILICO e C. CARDANI, « Gazz. Chim. It. », 83, 155 (1953) e A. QUILICO, C. CARDANI e F. PIOZZI, « Gazz. Chim. It. », 83, 179 (1953).

(2) T. SANDMEYER, « Helv. Chim. Acta », 2, 234 (1919).

(3) Col nome improprio di acido polifosforico o P.P.A. (poly-phosphoric acid) viene indicata come è noto una miscela di acidi fosforici, contenente in media l'82-84 % di anidride fosforica; sulla sua composizione vedi R. N. BELL, « Ind. Eng. Chem. », 40, 1464 (1948).

aldossime: anzi proprio quest'ultimo motivo ci ha spinti ad impiegarlo per la reazione <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup>.

Era lecito sperare che l'acido polifosforico si rivelasse un agente condensante anche per questa ciclizzazione e forse superiore allo stesso acido solforico concentrato sia come livello di rendimenti che come purezza delle isatine ottenute.

Alcuni saggi preliminari condotti su piccole quantità (0,5-1 g) di isonitrosoacetilderivati dell'anilina e della p. toluidina e riusciti abbastanza soddisfacenti ci hanno indotto ad estendere il campo delle prove, che sono state eseguite su una serie di isonitrosoacetanilidi sufficientemente rappresentativa dei diversi tipi di sostituenti all'anello benzenico. I risultati successivi però non sono stati sempre favorevoli con tutti gli isonitrosoacetilderivati sperimentati, e in molti casi decisamente deludenti. Di essi riferisce la presente Nota.

La isonitrosoacetanilide è stata sottoposta alla ciclizzazione in condizioni variabili di tempo e di temperatura di reazione: si è osservato che entro limiti abbastanza larghi (tra 65° e 100° e da 10 a 60 minuti) il rendimento in isatina è praticamente costante e dell'ordine del 50 % circa sul teorico, indipendentemente dalle tecniche per l'isolamento dell'isatina; il prodotto ottenuto ha un discreto grado di purezza <sup>(6)</sup>. La ciclizzazione a isatina avviene anche a temperature inferiori e superiori a quelle indicate (da 50° a 150°) ma le rese e soprattutto il grado di purezza peggiorano sensibilmente. Accanto all'isatina si formano piccole quantità di *fenilossammide*  $C_6H_5-NH-CO-CO-NH_2$  identificata al confronto col prodotto sintetico <sup>(7)</sup>, e la cui origine appare evidente.

(4) Le ragioni che ci hanno portato a mettere in relazione l'azione ciclizzante-disidratante dell'acido polifosforico sulle isonitrosoacetanilidi con, la trasposizione di Beckmann saranno esposte in una Nota successiva.

(5) L'acido polifosforico è stato introdotto in uso nella chimica organica da pochi anni, per la prima volta probabilmente da A. KOEBNER e R. ROBINSON, « Journ. Chem. Soc. », 1938, 1995, nella sintesi di sostanze dicheto-tetraidrociclopentan-fenantreniche. Essi naturalmente non parlarono di acido polifosforico ma di « miscela di acido e anidride fosforica ». Vedi anche A. J. BIRCH, R. JAEGER e R. ROBINSON, « Journ. Chem. Soc. », 1945, 582. In seguito è stato usato con ottimi risultati in molti casi; ricordiamo tra questi la sintesi diidroisochinolica di Bischler-Napieralski, la furanizzazione di 1,4-dichetoni, la sintesi di Fischer degli indoli, la sopracitata trasposizione di Beckmann e la preparazione di derivati dell'indene, indanone, tetralone, diidronaftalina, antrachinone, benzosuberone ed eptadienone: per una aggiornata bibliografia su queste reazioni vedi F. UHLIG, « Angew. Chem. », 66, 435 (1954); vedi anche una serie di Note di F. C. HORNING e collaboratori e di J. KOO, « Journ. Am. Chem. Soc. », 74, 2680, 5151, 5153 (1952), 73, 5826, 5828, 5830 (1951); 75, 720, 723, 1889, 1891, 2000 (1953); infine vedi E. R. WARD e T. M. COULSON, « Journ. Chem. Soc. », 1954, 4545 e una recente serie di lavori di H. R. SNYDER e collaboratori su « Journ. Am. Chem. Soc. », 75 (1953); 76 (1954) e 77 (1955).

(6) Non abbiamo potuto assumere a indice dell'andamento e delle condizioni della reazione le colorazioni scure indicate da alcuni Autori, a causa della colorazione rosso-violacea delle soluzioni di  $\beta$ -immide dell'isatina in acido polifosforico.

(7) Preparata secondo C. A. REISSERT, « Ber. », 37, 3716 (1904).

Si sono inoltre raccolte quantità molto variabili (talvolta considerevoli) di prodotti grigio-bruni solubili in alcali e non cristallizzabili, aventi punto di fusione altissimo o addirittura infusibili fino a 330°, che supponiamo essere prodotti di policondensazione dell'isonitrosoacetilderivato stesso<sup>(8)</sup>. Lo studio di queste sostanze altofondenti non è stato proseguito.

Risultati analoghi si sono ottenuti facendo reagire l'acido polifosforico su gli isonitrosoacetilderivati della o-toluidina, p-toluidina e 2,4-dimetilanilina: si sono isolate rispettivamente la 7-metilisatina, la 5-metilisatina e la 5,7-dimetilisatina, con rendimenti medi del 40 %, 60 % e 45 % rispettivamente in prodotto discretamente puro. Nel caso della p-toluidina si sono separate piccole quantità di 4-metil-fenilossammide (non ancora nota in letteratura), mentre per la o-toluidina e per la 2,4-dimetilanilina le rispettive fenilossammidi si sono probabilmente formate ma in quantità così scarse da non poter essere isolate. In tutti e tre i casi sono stati raccolti in notevoli proporzioni i prodotti altofondenti solubili in alcali riscontrati nella reazione sull'isonitrosoacetanilide.

La ciclizzazione è stata effettuata, sia pure con risultati più modesti, anche su gli isonitrosoacetilderivati della p-anisidina e o-anisidina; si sono ottenuti la 5-metossiisatina e la 7-metossiisatina con rese del 24 % e 11 % rispettivamente sul teorico. Accanto a forti quantità dei soliti prodotti altofondenti che sono stati trascurati, si sono però isolate 4-metossi-fenilossammide e 2-metossi-fenilossammide. La prima, presente in percentuale non indifferente (12-15 % sul peso di isonitrosoacetilderivato di partenza) e già nota nella letteratura<sup>(9)</sup>, è stata riconosciuta dalle caratteristiche fisiche e dall'analisi. Dalla seconda invece, isolata in scarsa quantità e non descritta nella letteratura, si è giunti all'identificazione del comportamento chimico e dall'analisi.

Risultati notevolmente diversi ha dato l'azione dell'acido polifosforico su gli isonitrosoacetilderivati delle cloro- e bromoaniline.

La p-cloro-isonitrosoacetanilide e la o-cloro-isonitrosoacetanilide hanno dato entrambe scarse quantità delle rispettive cloroisatine, ma così impure da renderne praticamente impossibile l'isolamento allo stato di prodotto unitario. Oltre ai prodotti altofondenti si sono ottenuti allo stato puro notevoli quantitativi (fino al 50 % sul peso dell'isonitrosoacetilderivato di partenza) di 4-cloro-fenilossammide e 2-cloro-fenilossammide: la prima, già descritta in letteratura, è stata identificata confrontandola col prodotto sintetico<sup>(10)</sup>, della seconda si è riconosciuta la formula dai risultati dell'analisi.

(8) Sostanze delle proprietà apparentemente analoghe sono state infatti da noi ottenute in alcune preparazioni di certi isonitrosoacetilderivati a partire dalle aniline, ad esempio nel caso della m-anisidina quanto si opera in assenza di solfato sodico.

(9) A. PIUTTI e R. PICCOLI, « Ber. », 31, 334 (1898); « Gazz. Chim. It. », 28, I, 292 (1898).

(10) Preparata secondo F. D. CHATTAWAY e W. H. LEWIS, « Journ. Chem. Soc. », 89, 158 (1906).

Analogamente la o-bromo-, p-bromo-, e m-bromo-isonitrosoacetanilide hanno dato modeste quantità rispettivamente di 7-bromoisatina, 5-bromoisatina e miscela di 4-bromoisatina e 6-bromoisatina, tutte molto grezze e non purificabili in alcun modo. Si sono isolate invece la 2-bromo-fenilossammide, la 4-bromo-fenilossammide, e la 3-bromo-fenilossammide, rispettivamente con rese del 45 %, 25 % e 5 % circa, che, non ancora descritte nella letteratura, sono state caratterizzate.

In genere si è notato che in tutte le ciclizzazioni sopra riportate la quantità di isatina e fenilossammide formatesi sono complementari.

Completamente infruttuosi sono stati invece tutti i tentativi di ciclizzazione con acido polifosforico operati sugli isonitrosoacetilderivati delle nitroaniline e degli acidi amminobenzoici. Per le prove si sono usati i derivati della p-nitroanilina, o-nitroanilina, acido p-amminobenzoico, acido m-amminobenzoico e acido antranilico. In nessuno di questi casi si è mai potuto osservare la formazione né di isatine (neppure mediante la reazione dell'indofenina) né delle rispettive fenilossammidi sostituite: le uniche sostanze raccolte sono state i soliti prodotti ignoti altotfondenti di alterazione degli isonitrosoacetilderivati di partenza <sup>(11)</sup>.

Dall'esame di questi risultati appare evidente che l'ottenimento delle isatine con rese apprezzabili si ha solo nel caso dell'isatina e di alcuni suoi omologhi semplici (metil, dimetil, metossi), mentre in altri la formazione di isatine è nulla o così scarsa da rendere impossibile un soddisfacente isolamento della sostanza.

Anche nei casi favorevoli, facendo il confronto con il prodotto ottenuto effettuando la ciclizzazione in acido solforico si nota che il grado di purezza è abbastanza simile ma le rese sono più o meno sensibilmente inferiori.

Lo svantaggio maggiore rispetto al metodo dell'acido solforico sta nella manualità dell'operazione, poiché la vischiosità dell'acido anche a caldo rende difficile il mescolamento, specie se con maggiori quantità si deve usare un agitatore meccanico (i rendimenti migliori si hanno con 1-2 g di sostanza): nessun vantaggio si ha diminuendo la concentrazione, perciò ci siamo attenuti alla proporzione consigliata da vari Autori di 10-15 g di acido per grammo di prodotto da ciclizzare. Pure la dissoluzione in acqua è difficile per la formazione di gomme che richiedono ore per disgregarsi: per isolare l'isatina si deve ricorrere all'estrazione eterea della sospensione, lasciando

(11) Come è noto, la ciclizzazione avviene facilmente con acido solforico concentrato nel caso dei derivati degli acidi amminobenzoici; invece per i derivati delle nitroaniline fu ritenuta impossibile (vedi W. BORSCHKE, H. WEUSSMANN e A. FRITSCHKE, « Ber. », 57, 1149 (1924) e H. RUPE e L. KERSTEN, « Helv. Chim. Acta », 9, 578 (1926) fino a pochi anni fa, quando E. R. BUCHNAN, C. M. McCLOSKEY e J. A. SENEKER, « Journ. Am. Chem. Soc. », 69, 380 (1947) ottennero con buona resa la 7-nitroisatina operando nelle consuete condizioni di reazione. A nostra volta nel corso di prove sull'isonitrosoacetilderivato della p-nitroanilina con acido solforico concentrato a 80°-90° abbiamo isolato qualche volta piccolissime quantità di 5-nitroisatina, riconosciuta dalle caratteristiche fisiche e chimiche.



dovi le sostanze altofondenti e frazionando l'isatina e la fenilossammide contenute nell'etere mediante lavaggio con idrato sodico dell'estratto.

È evidente che la ciclizzazione con acido solforico resta tuttora il metodo più agevole, economico e di più larga applicazione.

Il significato della formazione delle fenilossammidi nella reazione tra isonitroacetanilidi e acido polifosforico sarà oggetto di discussione in una successiva Nota.

Riferiremo inoltre prossimamente sull'esito di altre ricerche tuttora in corso sulla sintesi isatinica di Sandmeyer, riguardanti l'influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetanilidi e un possibile meccanismo di reazione nella ciclizzazione delle isonitrosoacetanilidi a isatine.

#### PARTE SPERIMENTALE.

I punti di fusione indicati sono tutti corretti e perciò più alti di alcuni gradi di quelli riportati nella letteratura.

1. *Preparazione dell'acido polifosforico.* — Si seguono le indicazioni di Uhlig <sup>(12)</sup>. A 100 cm<sup>3</sup> di acido fosforico di densità 1,71 (circa all'85 % di H<sub>3</sub>PO<sub>4</sub>) si aggiungono a porzioni sotto agitazione meccanica e raffreddando 200 g di anidride fosforica; la massa vischiosa e opaca viene scaldata per alcune ore su bagnomaria bollente finché diviene limpida. A caldo l'acido polifosforico è un liquido denso, a freddo uno sciroppo molto vischioso.

2. *Acido polifosforico e isonitrosoacetanilide.* — 30–35 g di acido polifosforico vengono scaldati a 80° e in essi si aggiungono a porzioni in breve tempo e mescolando energicamente 3,3 g di isonitrosoacetanilide (0,02 moli); la massa fluida si colora prima brevemente in violaceo poi oscurisce rapidamente assumendo una colorazione nerastra. Si mantiene ancora la temperatura a 80° per mezzora, poi si raffredda e si trasporta la massa in un bicchiere contenente 300–400 cm<sup>3</sup> di acqua ghiacciata, lasciando disgregare le gomme che si formano e impiegano anche qualche ora per sciogliersi dando un fine precipitato bruno-nero polverulento. La sospensione acquosa viene estratta ripetutamente con etere finché questo si colora solo debolmente (in media una diecina di estrazioni). L'etere viene a sua volta estratto 2–3 volte con idrato sodico diluito: dall'etere si ha per evaporazione la fenilossammide, che si purifica cristallizzandola da acido acetico o da alcool: aggetti duri, P. F. 231° anche in miscela con fenilossammide sintetica <sup>(7)</sup>. Le acque alcaline vengono acidificate con acido solforico al 50 % ed estratte ripetutamente con etere, che seccato e svaporato dà 1,48 g di isatina abbastanza pura, P. F. 200°–202, resa 50 % sul teorico di isonitrosoacetanilide di partenza. Un campione sublimato a 1 mmHg e 180° si presenta in splendidi cristalli rossi, P. F. 205°.

(12) F. UHLIG, « Angew. Chem. », 66, 435 (1954).



Il precipitato polveroso rimasto nelle acque fosforiche viene raccolto su filtro: ha un aspetto da grigio a nerastro a seconda delle preparazioni e anche il comportamento al riscaldamento è variabile da volta a volta, in quanto decompone tra 250° e 300° oppure carbonizza senza rammollire intorno a 300° oppure ancora resta apparentemente inalterato fino a 330°. È solubile in alcali caustici, da cui riprecipita mucillaginoso per acidificazione; è estremamente solubile in tutti i solventi organici eccetto l'etere e l'etere di petrolio in cui è praticamente insolubile; non sublima neppure col vuoto, ma decompone ad elevata temperatura svolgendo fumi.

3. *Acido polifosforico e 4-metil-isonitrosoacetanilide.* - La reazione e il successivo isolamento dei prodotti vengono condotti come indicato sopra per l'isonitrosoacetanilide, ma la temperatura viene mantenuta a 100° anziché a 80°. Buona parte della 5-metilisatina precipita acidificando l'estratto alcalino, il resto viene isolato estraendo con etere. Si ottengono in totale, da 3 g di isonitrosoacetilderivato della p-toluidina, 1,63 g di 5-metilisatina (resa 60 %) avente P. F. 181° e già abbastanza pura, che sublima a 180° e 1 mmHg in cristalli arancio-rosso, P. F. 190°.

Dalla soluzione eterea si ottengono 0,2 g circa di 4-metil-fenilossamide grezza (resa circa 6-7 %), che viene purificata per sublimazione nel vuoto cristallizzazione da acido acetico acquoso (I : I): polvere bianca P. F. 241°, insolubile in alcali, molto solubile in alcool e acido acetico glaciale. Microanalisi:

	trov. % : N	15,85
per $C_9H_{10}O_2N_2$	calc. % :	15,72

4. *Acido polifosforico e 2-metil-isonitrosoacetanilide.* - Si esegue la reazione in modo uguale a quella per l'isomero para. Da 2 g di isonitrosoacetilderivato della o-toluidina si ottengono 0,72 g di 7-metilisatina (resa 40 %) avente P. F. 265° circa. La sostanza sublima a 200° e 1 mmHg in cristalli rossi, P. F. 272°.

Dalla soluzione eterea si hanno solo tracce (pochi mg) di sostanze insolubili in idrato sodico, di cui è impossibile la purificazione.

5. *Acido polifosforico e 2,4-dimetil-isonitrosoacetanilide.* - Si esegue come le precedenti a 100°. Da 4 g di isonitrosoacetilderivato della 2,4-dimetil-anilina si ottengono 1,64 g di 5,7-dimetilisatina (resa 45 %) avente P. F. 235°. Sublima a 200° e 1 mmHg in splendidi cristalli rosso sangue, P. F. 249°-250°.

Dalla soluzione eterea, contenente l'eventuale fenilossammide, si ottiene solo una piccolissima quantità di una sostanza solida peciosa che non si riesce a purificare né per cristallizzazione né per sublimazione ripetuta.

6. *Acido polifosforico e 4-metossi-isonitrosoacetanilide.* - Eseguita con le consuete modalità a 100°, a partire da 3 g di isonitrosoacetilderivato della p-anisidina dà 0,66 g di 5-metossiisatina (resa 24 %) avente P. F. 192°; sublimata a 180° e 1 mmHg si presenta in cristalli arancione P. F. 204°. Dal-

l'estratto etero si ottengono 0,35–0,45 g di 4-metossi-fenilossammide (resa 12–15 %), che si purifica per sublimazione nel vuoto o per cristallizzazione da acido acetico acquoso (1 : 1): cristalli bianchi a P. F. 243°, in buon accordo con quanto indicato nella letteratura <sup>(9)</sup>.

7. *Acido polifosforico e 2-metossi-isonitrosoacetanilide.* – Eseguita come per l'isomero para, dà a partire da 2 g di isonitrosoacetilderivato della o-anisidina 0,2 g di 7-metossiisatina grezza (resa 11 %) avente P. F. 225°–230°. Sublimata a 200° e 1 mmHg forma cristalli arancione, P. F. 240°.

Dall'etere si ottengono 0,1 g di 2-metossi-fenilossammide (resa 5 %) che viene purificata per sublimazione nel vuoto e cristallizzazione da acido acetico acquoso (1 : 1) lunghi lamellari bianchi a ciuffi, P. F. 195°.

Microanalisi:

	trov. %:	N	14,05
per $C_9H_{10}O_3N_2$	calc. %:		14,43

8. *Acido polifosforico e 4-cloro-isonitrosoacetanilide.* – La reazione viene effettuata a 110°; si raccolgono piccole quantità di 5-cloro-isatina (riconosciuta alla reazione dell'indofenina) inquinata da abbondanti sostanze estranee da cui non è possibile purificarla in alcun modo.

Si isolano abbondanti percentuali (fino al 50 % di 4-cloro-fenilossammide, che si purifica per sublimazione nel vuoto e cristallizzazione da alcool o da acido acetico acquoso (1 : 1): cristallini bianchi, P. F. 244° anche in miscela col prodotto sintetico <sup>(10)</sup>.

9. *Acido polifosforico e 2-cloro-isonitrosoacetanilide.* – La reazione viene compiuta come per l'isomero para. La 7-cloroisatina raccolta è un po' meno scarsa ma egualmente impossibile da purificare. Dalla soluzione etera si ottengono forti quantità (40–50 % sul teorico) di 2-cloro-fenilossammide, che purificata per sublimazione nel vuoto si presenta come una polvere bianca cristallina, P. F. 184°; Microanalisi:

	trov. %:	N	14,18–13,96
per $C_8H_7O_2N_2Cl$	calc. %:		14,11

10. *Acido polifosforico e 4-bromo-isonitrosoacetanilide.* – Eseguita a 110° come per gli omologhi clorurati. Si hanno solo tracce di 5-bromo-isatina, appena riconoscibile alla reazione dell'indofenina e fortemente impura.

Si ottengono invece buone quantità di 4-bromo-fenilossammide (resa 25 %) che sublimata nel vuoto si presenta come polvere bianca P. F. 263°.

	trov. %:	N	11,64
per $C_8H_7O_2N_2Br$	calc. %:		11,53

11. *Acido polifosforico e 3-bromo-isonitrosoacetanilide.* – La ciclizzazione dell'isonitrosoacetilderivato della m-bromoanilina conduce ad una miscela di 4-bromoisatina e 6-bromoisatina: il prodotto ottenuto nel nostro

caso (resa circa 20 %) dopo sublimazione nel vuoto presenta P. F. 265°: è abbastanza esente da sostanze estranee ma non risolubile nei due isomeri.

Dall'etere si hanno piccole quantità (circa il 5 % sul peso dell'isonitrosoacetilderivato di partenza) di 3-bromo-fenilossammide, che si purifica per ripetute sublimazioni nel vuoto: P. F. 226°.

12. *Acido polifosforico e 2-bromo-isonitrosoacetanilide*. - Eseguita come per gli isomeri sopra descritti, dà discrete quantità di una frazione solubile in alcali e contenente della 7-bromoisatina, che però non si riesce a isolare come prodotto puro.

Si ottengono invece dall'estratto etero forti quantitativi (fino al 45 % di 2-bromo-fenilossammide, che dopo purificazione presenta P. F. 202°.

Microanalisi:

	trov. %:	N	11,66
per $C_8H_7O_2N_2Br$	calc. %:		11,53

13. *Acido polifosforico e isonitrosoacetilderivati delle nitroaniline e degli acidi amminobenzoici*. - Anche variando largamente i tempi e le temperature di reazione non si è mai avuta alcuna colorazione dell'acido polifosforico: decomponendo con acqua si sono sempre separati precipitati bianco-grigiastri, solubili in alcali, talvolta moderatamente solubili anche in etere, che decompongono ad alta temperatura (da 250° in poi): si può escludere che si tratti degli isonitrosoacetilderivati di partenza. Non si sono mai riscontrate né isatine né fenilossammidi.

**Zoologia.** — *Osservazioni fisico-chimiche sul sangue dei Coleotteri Tenebrionidi*. - I. *La pressione osmotica nel «Tenebrio molitor» L.*<sup>(\*)</sup>. Nota di GIORGIO MARCUZZI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Sembra che tra gli adattamenti alla vita terrestre sia particolarmente interessante il meccanismo dell'osmoregolazione, in quanto si sa che quest'ultima avviene in modi molto diversi a seconda che si tratti di animali terrestri o acquatici, e, tra questi, d'acqua dolce o marini. Mentre però per gli animali acquatici in generale e per i Vertebrati terrestri ci sono molte informazioni in merito, per gli Invertebrati terrestri manca praticamente qualsiasi dato, se si eccettua una recente nota di Zwicky<sup>(1)</sup> sull'osmoregolazione in *Drosophila melanogaster* e qualche notizia frammentaria su altri

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia Comparete della Università di Padova.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) K. T. ZWICKY, *Osmoregulatorische Reaktionen der Larve von «Drosophila melanogaster»*, «Z. vergl. Physiol.», 171 (1954).

gruppi, oltre alle vecchie ricerche della Monti <sup>(2)</sup> su varie specie di Invertebrati terrestri, tra cui anche Insetti.

Interessandomi da vari anni alle relazioni che passano tra distribuzione dei Coleotteri Tenebrionidi e ambiente (clima, essenzialmente) (cfr. Marcuzzi <sup>(3),(4)</sup>), mi sono orientato ultimamente verso il problema dell'osmoregolazione, al fine di indagare se c'è qualche relazione tra habitat dei Tenebrionidi stessi (xerofili, rispettivamente igrofilo) e pressione osmotica del sangue e relativa regolazione. Gli studi precedenti di Rouschal <sup>(5)</sup> starebbero infatti a dimostrare che negli Invertebrati terrestri c'è in linea di massima un rapporto tra habitat e pressione osmotica del sangue; anche negli Isopodi terrestri alcuni dati isolati della Parry <sup>(6)</sup> parlerebbero in favore di una relazione di questo tipo.

È precisamente mia intenzione vedere fino a qual punto vale questa relazione per i Coleotteri Tenebrionidi e se c'è qualche elemento nell'osmoregolazione che permetta di meglio comprendere l'adattamento di questi animali alla vita desertica ed eventualmente che possa portare un contributo all'interpretazione biochimica della filogenesi, intesa nel senso di Florkin <sup>(7)</sup>.

In attesa di ottenere risultati definitivi ed attendibili sull'argomento, sia nel *Tenebrio molitor* che in altre specie della famiglia, credo valga la pena comunicare i primi risultati ottenuti nello studio della pressione osmotica del sangue di *T. molitor* e delle sostanze responsabili di questa pressione (cloruri, aminoacidi e, secondariamente, zuccheri), in vista della mancanza quasi totale di osservazioni su questo animale, a differenza di tante altre specie di Insetti. È doveroso ricordare a questo punto l'aiuto che ho avuto nella impostazione sia teorica che tecnica di queste ricerche durante il mio soggiorno a Cambridge (Inghilterra), in primo luogo dal prof. V. B. Wigglesworth e quindi dal dott. J. A. Ramsay e dal sig. P. C. Croghan del Zoological Laboratory dell'Università, nonché dal dott. S. M. Partridge della Low Temperature Station for Research in Biochemistry and Biophysics. Il mio soggiorno in tale città è stato possibile grazie ad una borsa della Rockefeller Foundation.

TECNICHE USATE. — Per la pressione osmotica si determinò l'abbassamento del punto crioscopico del sangue *in toto* a mezzo di un apparato ideato

(2) R. MONTI, *La variabilità della pressione osmotica nelle diverse specie animali*, « Atti Soc. It. Sc. Nat. », 53, 391 (1914).

(3) G. MARCUZZI, *I Tenebrionidi come indicatori del clima*, « Riv. di Biologia », 43, 399 (1951).

(4) G. MARCUZZI, *Esperienze preliminari sull'igropreferenza nei Coleotteri Tenebrionidi*, « Boll. Zool. », 19, 129 (1952).

(5) W. ROUSCHAL, *Osmotische Werte wirbelloser Landtiere und ihre ökologische Bedeutung*, « Z. wiss. Zool. », 153, 196 (1940).

(6) G. PARRY, *Osmotic and ionic regulation in the Isopod Crustacean Ligia oceanica*, « J. exper. Biol. », 30, 567 (1953).

(7) M. FLORKIN, *L'évolution biochimique*, Paris, 1944.



recentemente (1954) dal dott. Ramsay, sul quale finora non ci sono dati pubblicati, ma che è basato sullo stesso principio esposto in Ramsay <sup>(8)</sup>.

Per il contenuto del sangue in cloruri si usa il metodo potenziometrico ideato da Sanderson <sup>(9)</sup> e modificato (micromodificazione) dal sig. P. C. Croghan del Zoological Laboratory di Cambridge, sulla quale modificazione non ci sono ancora dati pubblicati.

Per gli aminoacidi si usarono essenzialmente i seguenti metodi: 1° Determinazione del N aminico col metodo di Frame, Russel & Wilhelmi <sup>(10)</sup>, che è una modificazione del classico metodo di Folin, applicato su filtrato tungstico di sangue; 2° Determinazione dei singoli aminoacidi presenti per mezzo della cromatografia su carta. Per fare i cromatogrammi si usò sia sangue *in toto* che soluzione di aminoacidi in acqua distillata, preparata mediante precipitazione delle proteine con alcool a 95°, seguita da rimozione dell'alcool a mezzo evaporazione e successiva soluzione in acqua distillata. Per la determinazione qualitativa si usò la cromatografia bidimensionale, usando la soluzione acquosa degli aminoacidi, previa o no idrolisi. Inoltre si applicarono a cromatogrammi unidimensionali (di sangue *in toto* o di soluzione acquosa di aminoacidi) le seguenti reazioni specifiche: reazione di Sakaguchi per l'arginina e metodo per la tirosina all' $\alpha$  nitroso- $\beta$  naftolo, descritti da Acher & Crocker (1952); la reazione di Ehrlich per il triptofano e prodotti del suo metabolismo (chinurenina, ecc.), descritta da Tabone et al. (1950); il metodo di Mason & Berg (1951) per il triptofano e metaboliti (esame per fluorescenza); la reazione di Pauli per l'istidina, modificata da Sanger & Tuppy (1951); la reazione di Chargaff, Levine & Green (1948) per gli aminoacidi solforati; il metodo all'acido cloroplatinico per gli aminoacidi solforati descritto da Winegard, Toennies & Block (1948) e la reazione di Grassmann & von Arnim per la prolina (ed idrossiprolina), descritta da Acher, Fromageot & Jutisz (1950). Inoltre si usò il metodo non specifico al permanganato di K descritto da Dalglish (1950). Per i cromatogrammi unidimensionali furono usati i solventi adatti alle reazioni specifiche, oppure, quando non si richiedevano solventi particolari, il butanolo-acido acetico-acqua.

Per la determinazione quantitativa dei singoli aminoacidi si usò finora solo il metodo soggettivo della stima delle proporzioni relative dei singoli composti, posto pari ad 1 il valore dell'arginina.

La dimostrazione degli zuccheri fu fatta per mezzo della cromatografia su carta, usando carta Whatman N. 1 lavata secondo i suggerimenti di Isherwood (1954, inedito). Per la determinazione quantitativa si usarono strisce non trattate con il reattivo, alle quali si applicò l'eluizione a mezzo lavaggio con acqua di condensazione (metodo usato alla Low Temperature Station di

(8) J. A. RAMSAY, *A new method of freezing-point determination for small quantities*, « J. exper. Biol. », 26, 57 (1949).

(9) P. H. SANDERSON, *Potentiometric determination of chloride in biological fluids*, « Bioch. Journ. », 52, 502 (1952).

(10) E. G. FRAME, J. A. RUSSEL & A. E. WILHELMI, *The colorimetric estimation of aminonitrogen in blood*, « J. Biol. Chem. », 149, 255 (1943).



Cambridge); la determinazione fu fatta quindi col metodo di Somogyi (1945 e 52), usando il reattivo di rame descritto da questo autore nel 1952 e il reattivo cromogenico di Nelson descritto da questi nel 1944. Per tali metodi fu impiegata una soluzione di zuccheri ottenuta mediante allontanamento delle proteine con alcool a 80° e centrifugazione. Per la ricerca della glucosamina si usò la tecnica di Elson & Morgan descritta da Partridge (1948). Inoltre si determinò con il metodo di Somogyi la quantità totale di sostanze riducenti, previo allontanamento delle proteine a mezzo tecnica di Nelson (lavoro citato).

Il contenuto di acqua è stato determinato mediante pesata prima e dopo il disseccamento a peso costante (110°C).

Il peso specifico è stato determinato con la miscela di bromobenzene e petrolio, in cui si sfruttano le proprietà idrostatiche di liquidi di diverso peso specifico.

## RISULTATI.

*Pressione osmotica.* — Nella larva del *Tenebrio molitor* la p. o. è di 1,075–1,255°C, pari a una concentrazione di NaCl 1,85–2,20‰, o espressa in Atmosfere, 13,0–15,1, o ancora, espressa in m. equiv./l di NaCl, 318–379; nell'adulto c'è un  $\Delta$  pari a 1,185–1,225°C, pari a una soluzione di NaCl di 2,05–2,15‰, pari a 14,3–14,8 Atm., pari a m. equiv./l di NaCl 353–370.

*Cloruri* (espressi come NaCl). — Nella larva si ha un valore medio di 0,83 (grammi di NaCl‰); nell'adulto un valore di 0,77–1,02.

*Aminoacidi.* — *a*) N aminico: nella larva di *T. molitor* si ha una quantità di 50,3 mg per 100 cc di N aminico, pari a una quantità di aminoacidi liberi di 312,55 mg per 100; *b*) Aminoacidi presenti. I seguenti sono gli aminoacidi presenti nel sangue della larva di *T. molitor* (in proporzioni relative): prolina, valina (3,0); leucina, alanina, glutamina (2,0); arginina, lisina, istidina, metionina (1,0); treonina, glicina, serina (0,5); acido glutamico, acido aspartico,  $\beta$ -alanina (tracce minime). Inoltre si dimostra con cromatografia bidimensionale un aminoacido finora indeterminato, caratterizzato da una macchia bleu-violetto posta esattamente a sinistra della serina e ben separata da questa (fenolo-butanolo, ninidrina).

Di questi aminoacidi i seguenti sono stati dimostrati con i metodi specifici: istidina, arginina, prolina.

Le seguenti reazioni specifiche invece sono state negative: tirosina; triptofano (e prodotti del metabolismo); cistina-cisteina.

*Zuccheri* (o sostanze riducenti). — *a*) quantità presenti. Nel sangue della larva di *Tenebrio molitor* (esemplari normalmente alimentati, maturi, fuori dei periodi di muta) le sostanze riducenti determinate con il metodo di Somogyi sono in quantità media di 399,6 mg per 100 cc. La glicemia vera, cioè a dire la quantità libera di glucosio del sangue, corrisponde a 122 mg per 100. *b*) zuccheri presenti: glucosio e glucosamina. Quest'ultima è in quantità notevolmente superiore.

*Contenuto in acqua.* - I seguenti risultati sono stati ottenuti per diversi stadi del ciclo vitale di *T. molitor*. Larve appena mutate, 58 % del peso corporeo; larva normale, 57 %; pupa, 61 %; adulto, 56 % (valori medi). Come si vede lo stadio più idratato è quello di pupa, quello meno idratato l'adulto.

*Peso specifico.* - Il p. spec. del sangue della larva normalmente alimentata e tenuta a umidità ambiente è pari a 1,050-1,057.

#### DISCUSSIONE.

*Pressione osmotica.* - La pressione osmotica degli Insetti varia da un minimo di circa 0,39 (ninfe di Efemeridi) a un massimo di 1,95°C (crisalide di Ape). Per i Coleotteri abbiamo invece dei valori che vanno da un minimo di 0,49 (*Acilius sulcatus*, specie acquatica) ad un massimo di 1,72. Come si vede, il *T. molitor* ha un valore relativamente alto, ma meno di tanti altri Coleotteri. Un confronto coi dati della Letteratura ed altri inediti dell'autore in merito ad altre 7 specie di Tenebrionidi dimostra che in seno a questa famiglia di Coleotteri si trovano i valori più alti proprio in due specie tipicamente adattate a vivere a spese di sostanze tra le più secche, come sono i semi dei cereali e le farine, e precisamente nel *T. molitor* e ancor più nel *Gnathocerus cornutus*, che è considerato tra le specie più dannose alle derrate alimentari.

*Cloruri.* - Il valore dei cloruri presenti nel sangue degli Insetti (solo in piccola parte NaCl, spesso KCl) va da un minimo di 0,04 g per 100 cc (larva di *Cossus cossus*) a un massimo di 1,02 (valore notato da me in *T. molitor*). Nei Coleotteri i valori oscillano da 0,29, notato in *Hydrophilus piceus* (Quinton, in Vialli, 1925), a 1,02. Come si vede, i Coleotteri Tenebrionidi comprendono i massimi valori di clorimetria che si hanno, non solo nei Coleotteri, ma tra tutti gli Insetti finora indagati. Anche in questo caso, come per il  $\Delta$ , è una specie adattata ad un'alimentazione eccezionalmente secca (*T. molitor*) che ha il massimo contenuto di cloruri. Altro fatto degno di nota è che nei Tenebrionidi finora esaminati (dati inediti dell'autore) pare ci sia una stretta relazione (relazione lineare) tra il  $\Delta$  ed il valore della clorimetria, sì che, se così fosse in generale, i cloruri sarebbero responsabili costantemente di una data quota della pressione osmotica. Ciò può avere un interesse generale - anche dal punto di vista della evoluzione biochimica intesa nel senso di Florkin - poiché nei vari ordini di Insetti i cloruri sono responsabili di quote diverse della pressione osmotica: sec. i dati di Portier & Duval (1927), nel *Dytiscus* (un Coleottero) i cloruri (NaCl) rappresentano il 30 % del valore del  $\Delta$ , mentre nei Lepidotteri questa quota andrebbe da un minimo di 4,2 (*Cossus cossus*) a un massimo di 14 (larva di *Bombyx mori*).

*Aminoacidi.* - a) N aminico. L'N aminico trovato nel sangue degli Insetti oscilla da 37 mg per 100 cc (*Hydrophilus piceus*, Florkin 1937) a 336 (*Saturnia carpinii*, Nazari, in Maluf, 1939). Nei Coleotteri i valori variano da 37 a 187 (*Anobiüs simplex*, Pepper et al., in Florkin, 1944, loc. cit.). In

altre specie di Tenebrionidi (dati inediti) ottenni 35,0 mg in *Blaps pinguis* (larva), 35,0, rispettivamente 45,0, in larva, rispettivamente adulto, di *Akis spinosa*. Come si vede il valore trovato in *T. molitor* è un valore relativamente basso tra i Coleotteri, ma alto nella famiglia.

La discordanza dei dati dei diversi autori, anche nella stessa specie, può dipendere, oltre che da varie condizioni fisiologiche (età, stato di alimentazione, ecc.), da tecniche diverse. Ad esempio Babers (1938) determina l'N aminico sul sangue totale, mentre Florkin usa il filtrato tungstico del plasma: può darsi che le differenze siano attribuibili a questo fatto. (Come ho già detto in precedenza, io ho usato il metodo del filtrato tungstico raccomandato da Florkin, cui ho applicato poi la tecnica di Frame et al.).

b) aminoacidi presenti. Raper & Shaw (1948) trovano in ninfe di *Aeschna cyanea* glicina, alanina, valina e leucina (in massima concentrazione), prolina e tirosina (in moderate quantità), serina e lisina (in piccole quantità). Finlayson & Hamer (1949) in larva di *Calliphora erythrocephala* trovano i seguenti aminoacidi (proporzioni relative): alanina, 2,5; tirosina, 2; prolina e valina, 1,0; isoleucina, 0,7; istidina e fenilalanina, 0,5; glicina e leucina, 0,4; lisina e serina, 0,2; acido aspartico, 0,1. Ussing (1946) in larva di *Melolontha vulgaris* trova istidina (300 mg per 100 cc), triptofano (12,5 mg), tirosina (106 mg), leucina (131 mg), valina (88 mg); inoltre quantità non precisate di lisina, arginina e, probabilmente, anche idrossiprolina. Inoltre ci sono le amidi asparagina e glutamina. In *Oryctes* pare ci siano gli stessi aminoacidi, con eccezione forse della tirosina; delle amidi manca l'asparagina. In *Dytiscus marginalis* Florkin & Duchateau (1942) trovano istidina (31-35 mg) e tirosina (117-168 mg); sono assenti triptofano, arginina, fenilalanina e cistina (e cisteina). In *Dixippus morosus* Ramsay (1955) trova solo glicina e un aminoacido indeterminato, tutti gli altri aminoacidi essendo presenti sotto forma di peptidi. Del tutto recentemente (1955), Fukuda, Kirimuro, Matuda & Suzuki trovano in *Bombyx mori* (larva di 5° stadio) i seguenti aminoacidi: alanina, arginina, acido aspartico, ac. glutamico, glicina, istidina, iso-leucina, leucina, lisina, metionina, fenilalanina, prolina, serina, treonina, triptofano, tirosina, valina. (Gli Autori riportano pure la quantità di ciascuno, determinata col metodo microbiologico).

Come si vede, in *Tenebrio molitor* troviamo - dopo il *Bombyx mori* - il maggior numero di aminoacidi liberi (compresevi le amidi) conosciuti dal sangue degli Insetti. Tra questi, troviamo uno, la  $\beta$ -alanina, che non è mai stato trovato in sangue di Insetti. Nello stesso tempo è interessante la mancanza costante di tirosina, che è stata invece segnalata in quasi tutte le specie finora studiate.

Zuccheri. - I valori delle sostanze riducenti - che hanno solo scarso interesse ai nostri fini - oscillano nei diversi gruppi di Insetti indagati da 24 (larva normale e larva in metamorfosi di Ape: Kuwana, in Maluf loc. cit.) a 450 (*Cosmotriche*, Hemmingsen, in May 1935). Nei Coleotteri andrebbero da un minimo di 27 (*Hydrophilus piceus*, Florkin 1937), a un massimo di 399 mg per 100 (larva di *Tenebrio molitor*, come da me osservato).

Il valore, invece, degli zuccheri liberi (spesso calcolati come glucosio, ma solo raramente identificati veramente con il glucosio, o « glicemia vera ») va negli Insetti da 0 (*Bombyx mori*, larva in metamorfosi, secondo Kuwana, in Maluf) a 122 (larva di *Tenebrio molitor*). Il dato di Bishop, Briggs & Ronzoni (1925) ottenuto in larve a riposo di Ape (120-340 mg % di « sugar ») merita conferma, ma non è improbabile in considerazione del metabolismo carboidrato del tutto eccezionale di questa specie di Insetto. Del resto Levenbook (1947) nella larva di *Gastrophilus intestinalis* - altra specie a regime dietetico altamente specializzato - trova fruttosio nella quantità di 200 mg per 100 cc.

Nel *Tenebrio molitor*, come si è visto, abbiamo un valore della « glicemia vera » di 122 mg per 100.

*Quantità d'acqua.* - Da un esame dei dati di Robinson (1928) il contenuto di acqua degli Insetti va da un minimo di 46-47 % in *Sitophilus granarius*, rispettivamente 48-50 % in *Sitophilus oryzae*, a un massimo di 90-92 nella larva della *Telea polyphemus*. Il *Tenebrio molitor* (adulto) seguirebbe subito a *Sitophilus oryzae*, accanto all'adulto di *Cyllene robiniae*, con 56-60 % del peso corporeo. A *Tenebrio molitor* seguirebbe da vicino un altro Tenebrionide, *Edrotes ventricosus*, specie adattata alla vita desertica (61 %, Marcuzzi, inedito)<sup>(11)</sup>. Ci sarebbe quindi, ad un primo esame, una stretta relazione tra contenuto in acqua dei tessuti e genere di alimentazione, più che tra contenuto in acqua e umidità dell'atmosfera. Quindi, più che l'acqua dell'ambiente in cui vive un insetto, avrebbe importanza il genere di alimentazione.

In quanto alle differenze nella quantità d'acqua nei diversi stadi del ciclo vitale, si possono ricordare i dati di Dutto (in Polimanti 1915), secondo il quale in *Bombyx mori* si ha per la larva 81,58 %, per la pupa 64,33 %, e per l'adulto 73,15 %; interessante notare che, mentre in questa specie lo stadio di pupa è il meno idratato, in *T. molitor* la pupa rappresenta lo stadio in cui c'è maggior abbondanza di acqua.

Un altro soggetto strettamente legato al problema della pressione osmotica e della quantità d'acqua dei tessuti è quello della quantità o massa totale di sangue. Pur non essendomi occupato in particolare di questo argomento, anche perché finora non ci sono delle tecniche che diano abbastanza affidamento, desidero riferire i risultati di altri Autori in altre specie di Insetti e confrontarli con dei risultati ottenuti da me in *T. molitor* in determinazioni fatte a scopo di metodica<sup>(12)</sup>. Bishop (1923/24) nella larva di Ape

(11) Da notare che anche BUXTON (1932) trova per *T. molitor* (larva) un valore medio di 57 %, i valori però oscillando da 50,5 a 66 %: è molto degna di nota la concordanza perfetta tra il dato di BUXTON ed il mio (valore medio).

(12) A tale scopo ho usato le due tecniche di RICHARDSON, BURDETTE & EAGLESON. La tecnica di RAMSAY (1955), certamente più sicura di quelle di detti autori, non si presta allo studio del *T. molitor* causa la scarsità di sangue estraibile da questo animale (al massimo 10-12 mm<sup>3</sup> per una larva di massime dimensioni) e per il fatto che il sangue non presenta colorazioni come quello del *Dixippus* che permettano un apprezzamento utile di eventuali variazioni di concentrazione.



trova il 25-30% del peso corporeo; nel *Bombyx mori* autori recenti (Richardson et al., 1931), trovano il 50% del totale (larva matura). In larve di *Chironomus*, Leitch (in Maluf loc. cit.) trova il 50% di sangue; nella pupa di *Pieris brassicae*, Brecher (in Maluf) trova il 20%. Ramsay (1955) trova in *Dixippus morosus* il 15% del peso corporeo (♀ adulta). In *Tenebrio molitor* (larva) io ho avuto un valore medio di 12% del peso corporeo, valore che, anche se approssimativo, dimostra che nei Tenebrionidi, accanto ad una grande scarsità d'acqua nei tessuti, c'è pure una notevole scarsità di sangue, fatto che del resto era prevedibile dalla sola conoscenza della quantità d'acqua. Ma naturalmente l'esatta conoscenza dei due valori — quantità d'acqua e quantità di sangue — può aver importanza quando si tratta di studiare l'osmoregolazione e le sue sedi.

*Peso specifico.* — Pochissimi sono i dati esistenti in merito. Barrat & Arnold (in Maluf, loc. cit.) trovano per il *Dytiscus*, rispettivamente per l'*Hydrophilus piceus*, i valori di 1,025-1,027, rispettivamente 1,012. Polimanti (loc. cit.) per il *Bombyx mori* riferisce come peso specifico medio 1,037. Heller & Moklowska (1930), in *Deilephila euphorbiae* trovano il valore di 1,031; Bishop (loc. cit.) per l'Ape ci indica 1,045. Come si vede, il valore da me trovato per la larva del *Tenebrio molitor* (1,050-1,057) sarebbe il massimo tra quelli finora noti per gli Insetti.

#### CONCLUSIONI.

Da un confronto con i dati preesistenti sul sangue degli Insetti (in parte dati inediti dell'autore su altre specie di Coleotteri Tenebrionidi), si deduce quanto segue:

1° la pressione osmotica nel *T. molitor*, pur essendo inferiore a quella di altri Insetti, è superiore a quella degli altri Tenebrionidi con eccezione di *Gnathocerus cornutus*, altra specie adattata ad un regime dietetico specializzato.

2° La quantità dei cloruri del sangue larvale è superiore a qualsiasi altro insetto finora noto, ed inoltre pare che nei Col. Tenebrionidi i cloruri rappresentino costantemente la stessa quota del  $\Delta$  totale.

3° La quantità totale di N aminico nel sangue larvale è relativamente bassa, ma in compenso il numero degli aminoacidi liberi (compresevi alcune amidi) è il maggiore finora conosciuto per gli Insetti, eccezion fatta per il *Bombyx mori*; inoltre alcuni di essi non sono mai stati notati in precedenza nel sangue di Insetti. Caratteristica è pure la mancanza di tirosina.

4° Le sostanze riducenti del sangue larvale di *T. molitor* rappresentano il massimo conosciuto per gli Insetti. La glicemia vera è pure la massima conosciuta per gli Insetti.

5° Il *T. molitor* è, dopo le specie del gen. *Sitophilus* (o *Calandra*), l'insetto che ha la minor quantità d'acqua nei tessuti. Ciò è verosimilmente da mettersi in rapporto più al regime dietetico (alimenti poverissimi d'acqua)



che all'umidità dell'ambiente o alle condizioni climatiche dei paesi di origine. Parallelamente, la quantità di sangue risulta essere la più piccola di tutte le specie finora indagate.

6° L'emolinfa della larva di *T. molitor* ha il massimo peso specifico conosciuto per gli Insetti, da attribuirsi forse all'elevato contenuto in carboidrati - o sostanze riducenti in genere - che, pur contribuendo all'aumento del peso specifico, sono poco osmoattivi, trovandosi tipicamente allo stato molecolardisperso.

**Biologia.** — *Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare.* - IV. *Le fibre sinaptiche dei neuroni di Purkinje in differenziamento ed in degenerazione del gatto adulto.* Nota (\*) di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nel corso di uno studio sugli aspetti istochimici del nucleo nel ciclo vitale di cellule nervose di diversi Vertebrati, sono stato colpito da una serie di quadri, offerti dalle cellule di Purkinje del cervelletto di un Mammifero (*Felis domestica* G.), che ricordavano quelli da me precedentemente descritti durante la normale involuzione di un peculiare neurone (cellula di Mauthner) negli Anfibi anuri metamorfosati. In precedenti Note ho sommariamente riferito che la seriazione delle cellule di Purkinje del cervelletto di individui a diversa età, terminata la morfogenesi (da un mese a nove anni dalla nascita), presenta costantemente un susseguirsi di modificazioni nel nucleo e nel neuroplasma che culmina con evidenti processi di neuronofagia (Baffoni 1954<sup>(\*)</sup>); e poichè il numero degli elementi di Purkinje negli adulti resta costante, sono stato spinto ad un accurato esame che mi ha portato al rinvenimento di elementi cerebellari identici a quelli osservati nella istogenesi delle cellule di Purkinje durante lo sviluppo (Baffoni 1954<sup>(2)</sup>); da questi dati ho dedotto che i neuroni di Purkinje sono elementi nervosi a « ciclo vitale breve » (Stefanelli 1955<sup>(3)</sup>); essi cioè continuano a differenziarsi dopo il termine dalla morfogenesi da neuroblasti dello strato granulare in sostituzione di quegli elementi che via via degenerano (Baffoni 1954<sup>(4)</sup>).

Date queste premesse, era legittimo chiedersi cosa avvenisse degli apparati sinaptici nelle cellule di Purkinje che si differenziano ed in quelle che degenerano nell'adulto.

(\*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 17, p. 269 (1954).

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 17, p. 70 (1954).

(3) AL. STEFANELLI, « La Ricerca Scientifica », vol. 25 (1955; *in corso di stampa*).

(4) G. M. BAFFONI, « La Ricerca Scientifica », vol. 24, p. 1641 (1954).

È noto che le cellule di Purkinje sono in rapporto sinaptico con due tipiche formazioni: « le fibre rampicanti » (Cajal 1890<sup>(5)</sup>) ed i « canestri » (Cajal 1888<sup>(6)</sup>). Le *fibre rampicanti* provengono dal fascio midollare della lamina cerebellare, attraversano lo strato granulare, giungono alla base del pirenoforo di Purkinje, lo risalgono (Cajal 1890<sup>(5)</sup>), ne scavalcano la porzione superiore (Retzius 1892<sup>(7)</sup>) ed, emettendo via via esili collaterali discendenti, si dividono distribuendosi sulle due facce laterali dell'arborizzazione dendritica (Pensa 1931<sup>(8)</sup>) strisciando su di essa e ramificandosi con essa fino ai rami terziari (Lugaro 1894<sup>(9)</sup>), esaurendosi infine in terminazioni libere (Cajal 1911<sup>(10)</sup>).

Alla formazione dei *canestri* partecipano principalmente collaterali discendenti dei neuroni più profondi dello strato molecolare (« cellule dei canestri » o « basket cells ») (Golgi 1886<sup>(11)</sup>), ma anche collaterali ascendenti, emesse dai neuriti di altre cellule di Purkinje nel loro percorso entro lo strato granulare (Golgi 1886<sup>(11)</sup>), le sottili collaterali discendenti delle fibre rampicanti (Pensa 1931<sup>(8)</sup>) e le fibre del plesso sottocellulare (Moruzzi 1930<sup>(12)</sup>); tutto questo complesso di fibre avvolge strettamente il pirenoforo di Purkinje formando attorno ad esso un fitto intreccio, particolarmente ispessito alla base; il canestro si prolunga in basso con un pennello di fibre (detto « spazzola ») attorno alla porzione prossimale del neurite di Purkinje; esso non è costituito da fibre libere, ma tale è apparso a causa dell'improvviso cambiamento di direzione delle fibre provenienti dal plesso sottocellulare e che si dirigono verso il canestro (Moruzzi 1930<sup>(12)</sup>).

Osservando l'istogenesi cerebellare nel topo, Tello (1938<sup>(13)</sup>) riferisce che le fibre rampicanti sono visibili già al 3°-4° giorno dopo la nascita, quando inizia l'orientamento e l'appiattimento dell'albero dendritico della cellula di Purkinje; i canestri, invece, si formano più tardi: come abbozzi si osservano al 6° giorno dalla nascita e con l'aspetto definitivo 10 giorni più tardi.

Seguendo la normale istogenesi del cervelletto nel gatto, ho potuto confermare anche in questo animale la successione osservata da Tello: nel gatto neonato ho infatti visto l'arrivo di fibre dallo strato granulare attorno al pirenoforo di Purkinje; alcune di esse, giunte presso l'origine del neurite, proseguono strisciando su un fianco del pirenoforo, in genere lo scavalcano presso l'origine del dendrite e quindi, indivise o appena biforcate, si arrestano improvvisamente, senza clave terminali, giusto alla base del tronco dendri-

(5) S. RAMON Y CAJAL, « Internat. Monatschr. Anat. u. Physiol. », vol. 7, p. 12 (1890).

(6) S. RAMON Y CAJAL, « Rev. trimestr. Micograf. », vol. 1, p. 1 (1888).

(7) G. RETZIUS, « Biol. Untersuch. Retzius », vol. 3, p. 17 (1892).

(8) A. PENSA, « Mem. Real. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, vol. 5, p. 25 (1931).

(9) E. LUGARO (1894), cit. da: KAPPERS, HUBER & CROSBY, *The Comparative Anatomy of the Nervous System of Vertebrates including Man*, New York 1936.

(10) S. RAMON Y CAJAL, *Histologie du système nerveux de l'homme et des Vertébrés*, Paris 1909-1911.

(11) C. GOLGI, *Sulla fine anatomia degli organi centrali del sistema nervoso*, Milano 1886.

(12) G. MORUZZI, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », vol. 28, p. 238 (1931).

(13) J. F. TELLO, « Trav. Lab. Rech. Biol. Univ. Madrid », vol. 32, p. 1 (1938).

tico che a questo stadio è molto allungato e termina in 3-4 brevi e tozzi rami. Nel gatto neonato non appare traccia del canestro: lo strato molecolare è appena abbozzato (ved. Baffoni 1954<sup>(14)</sup>) ed i suoi elementi si presentano come neuroblasti bipolari orizzontali; solo qualche giorno dopo (a 5 giorni dalla nascita) appare formato il neurite delle cellule dei canestri e da esso si osserva l'emissione delle prime collaterali discendenti le quali, raggiunta la base del pirenoforo di Purkinje, formano gli abbozzi dei canestri.

Dopo 20 giorni dalla nascita, le fibre rampicanti ed i canestri nel cervelletto del gatto si presentano compiutamente differenziati e sviluppati.

Fatte queste osservazioni, mi sono domandato donde prendano origine le fibre rampicanti e quelle dei canestri nelle cellule di Purkinje che si differenziano negli individui adulti: se cioè tali fibre si formino *ex novo*, con le stesse modalità osservate durante la morfogenesi, o se, date le diverse condizioni di sviluppo, si comportino diversamente; mi sono chiesto inoltre quale destino sia riservato alle fibre che costituiscono le formazioni sinaptiche dei neuroni di Purkinje che degenerano.

Per tale esame mi sono valso di fette di circa 2 mm. di spessore, sezionate con un affilissimo bisturi nella regione mediale (verme) da cervelletti di gatti di 2, 5 e 9 anni di età. I pezzi sono stati fissati in Carnoy o in alcool ammoniacale; nel primo caso ho impregnato le sezioni seriali (5 e talora 10  $\mu$  di spessore) con argento colloidale, secondo il metodo di Bodian (15-20 ore in protargolo Bayer al 0,7 % a 37°C); nel secondo caso i pezzi sono stati impregnati secondo il metodo fotografico di Cajal (formula III<sup>o</sup>-incubazione in AgNO<sub>3</sub> al 2 % per 5 giorni a 38°C) e sezionati a 10-12  $\mu$  di spessore. In ogni caso i pezzi sono stati inclusi in celloidina-paraffina ed orientati per avere sezioni sagittali del verme; del lungo nastro delle sezioni seriali, è stata utilizzata solo la porzione centrale.

Le immagini ottenute con i due metodi di impregnazione coincidono; però per la documentazione ho scelto le fotografie da preparati ottenuti con il metodo di Cajal per le cellule di Purkinje in differenziamento e quelle da preparati impregnati in protargolo per gli aspetti delle fibre sinaptiche delle cellule di Purkinje in degenerazione: ciò anzitutto perchè l'impregnazione con il protargolo è più delicata (e pertanto si presta meglio all'esame dei dettagli), e anche perchè ho eseguito con questo metodo sezioni più sottili (di 5  $\mu$ ) dalle quali trasparivano con maggior evidenza la forma cellulare e l'aspetto dei nuclei degli elementi di Purkinje in involuzione, che restano altrimenti confusi o addirittura invisibili nelle fotografie di preparati trattati con il metodo di Cajal, data l'intensa argirofilia neuroplasmatica delle cellule di Purkinje in degenerazione (Baffoni<sup>(1)</sup>).

Ai limiti dello strato granulare, subito sotto alle cellule di Purkinje, dove giungono i neuroblasti all'inizio del loro differenziamento, ho osservato piccoli elementi, ancora argirofobi, in cui appaiono i primi abbozzi delle formazioni sinaptiche. Alla base del pirenoforo, infatti, discendono dai canestri vicini 2 o 3 sottili fibre nervose che prendono contatto col corpo cellulare e risalgono su di esso; una analisi più minuziosa ed attenta ha messo in evidenza che una di queste fibre proviene da una di quelle numerose collaterali delle fibre rampicanti, descritte da Pensa<sup>(8)</sup>, che vengono emesse prima che queste si impegnino nel dendrite di Purkinje (ved. fig. 1);

(14) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 16, p. 798 (1954).

tale fibra, in elementi poco più voluminosi, aumenta di spessore e risale sul pirenoforo, girando attorno alla sua porzione superiore ed impegnandosi nel tronco dendritico (fig. 2).

Un successivo stadio di sviluppo può essere rappresentato dalla fig. 3: in tale elemento le fibre provenienti dai canestri adiacenti sono più numerose ed ispessite; esse si avvolgono attorno al pirenoforo in spire più ravvicinate verso la base; altre fibre, più sottili (giungenti dal plesso sottocellulare) e più esterne, si dirigono dal basso verso l'alto, si aggiungono ad altre collaterali provenienti dall'alto direttamente da neuriti di cellule dei canestri, formando, insieme a quelle spiralate, le prime maglie del canestro; a questo stadio la fibra proveniente dalla collaterale della fibra rampicante di una delle cellule di Purkinje vicine, risale sul tronco dendritico ed inizia a dividersi. In elementi maggiormente sviluppati, l'aspetto delle formazioni sinaptiche, per quanto meno intricato (fig. 4), appare fondamentalmente simile a quello delle cellule di Purkinje compiutamente differenziate (fig. 5); va notato che le fibre osservate attorno agli elementi di Purkinje in differenziamento, si presentano sempre strettamente aderenti al corpo cellulare, mancando affatto attorno a questo cavità di retrazione o parziali scolamenti, quali di frequente si osservano in cellule di Purkinje differenziate, anche apparentemente normali (fig. 5); ho altresì notato che la reattività dei sali di argento delle fibre dei canestri appena formati è diversa da quella delle fibre dei canestri di elementi a termine di sviluppo; queste infatti si colorano intensamente, presentano un decorso discontinuo e sono tanto spesse che è praticamente impossibile seguirne il singolo comportamento; quelle, invece, si impregnano meno, sono più sottili e hanno un decorso quasi rettilineo, sì che offrono un maggior dettaglio di particolari e conservano la loro individualità.

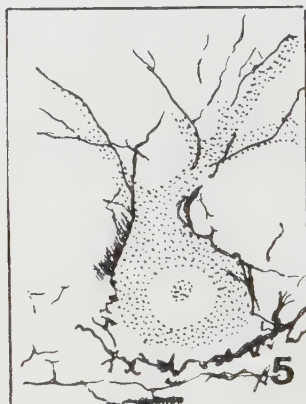
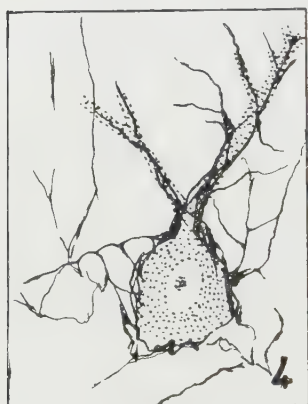
Aspetti quali quelli descritti or ora, si presentano in tutti i cervelletti dei gatti esaminati; essi sono meno rari nei giovani (da 1 mese a 2 anni).

Per brevità ho descritto solo quattro fasi del processo, ma scorrendo i preparati ne ho osservato tutte le tappe intermedie, in un quadro continuo di crescente complessità in stretto rapporto con l'aumento dimensionale delle cellule di Purkinje in differenziamento.

Completando le osservazioni da me compiute nel gatto durante l'istogenesi delle cellule di Purkinje nella morfogenesi con quelle di Tello (1938<sup>(13)</sup>) in topo, posso affermare che attorno alle cellule di Purkinje che si differenziano nell'adulto, le fibre, una volta pervenute dai canestri vicini sul pirenoforo dell'elemento in differenziamento, proseguono poi il loro sviluppo mantenendo la stessa cronologia (desunta dalle dimensioni della cellula) e le stesse modalità che si osservano durante la morfogenesi cerebellare: così i canestri presentano un progressivo crescendo di complicazioni e le fibre rampicanti risalgono il tronco dendritico solo quando è iniziato l'orientamento e l'appiattimento dell'arborizzazione dendritica.

Da queste osservazioni si può pertanto concludere che nelle cellule di Purkinje che si differenziano nell'adulto, lo sviluppo diversifica in quanto





Disegni ripresi dalle microfotografie della Tavola a fianco per l'identificazione delle fibre degli apparati sinaptici delle cellule di Purkinje (*punteggiate*) nei processi del differenziamento (1-4) e della degenerazione (5-9) che si verificano nel cervelletto di gatti adulti.



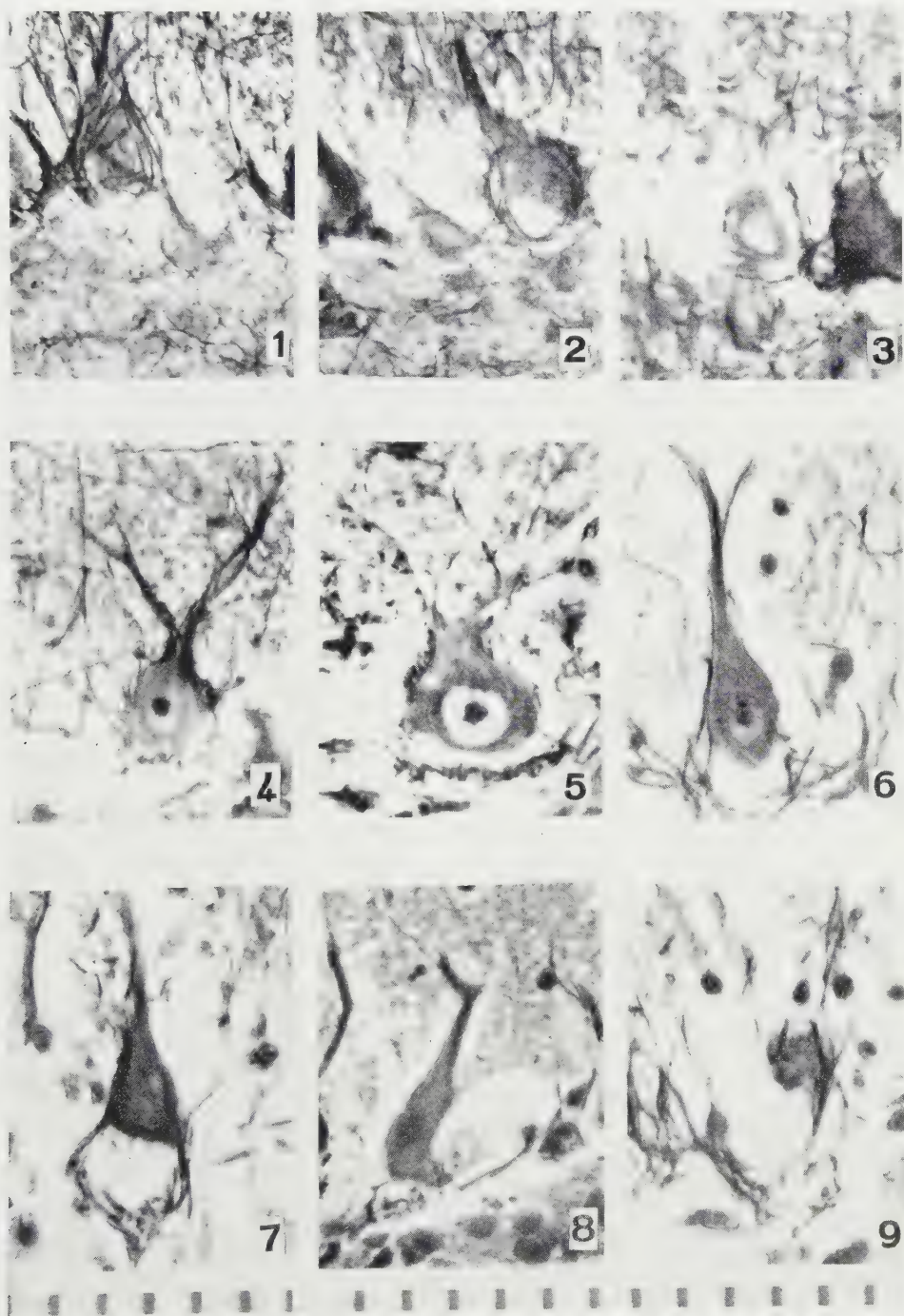


Fig. 1-4. - Cellule di Purkinje di gatto adulto (di 5 anni) in differenziamento (Metodo di Cajal;  $\times 464$ ).

Fig. 5-9. - Cellule di Purkinje di gatto adulto (di 5 anni) a vari stadi del processo involutivo (Metodo di Bodian;  $\times 464$ ).

(Ogni intervallo delle scale in calce =  $10\mu$ ).



non si conserva la successione di arrivo delle fibre che costituiranno i futuri apparati sinaptici (rispettivamente fibre rampicanti e dei canestri); ciò è dovuto al fatto che nell'adulto le fibre sono già *in situ* e quindi rispondono simultaneamente agli stimoli provenienti dal corpo cellulare in differenziamento.

Tra le cellule di Purkinje differenziate, ho osservato tutta un'altra serie di modificazioni delle fibre sinaptiche in stretto rapporto con le dimensioni decrescenti del corpo cellulare; in una Nota precedente <sup>(1)</sup> ho già descritto i vari aspetti del nucleo (picnosi) e del neuroplasma (cromofilia ed argirofilia diffusa) che si associano alla notevole atrofia cellulare che si verifica nel processo della degenerazione. In stretto rapporto con l'inizio dell'atrofia e delle alterazioni irreversibili del nucleo (modificazioni di forma e di aspetto della cromatina), anche con i metodi argenticci ho osservato la presenza di cavità di retrazione attorno al pirenoforo: il fenomeno inizia con la comparsa di uno scollamento della base del pirenoforo dal canestro (fig. 5); tale scollamento diviene progressivamente più ampio così da provocare la formazione di una cavità (fig. 6); nonostante che la somma dei volumi del pirenoforo e di questa divenga via via minore, la cavità di retrazione si estende dal basso verso l'alto man mano che prosegue l'atrofia del pirenoforo di Purkinje (fig. 7); anche negli elementi più atrofici, però, il pirenoforo di Purkinje resta sempre aderente ad un settore del canestro per tutta la sua lunghezza, di modo che, visto di profilo, esso assume un aspetto falciforme (fig. 8); ciò spiega perchè nel cervelletto di gatti adulti non è raro imbattersi in sezioni di canestri vuoti; l'unione del pirenoforo al canestro dura fino al termine del processo involutivo ed è evidente anche quando del corpo cellulare non resta che una massa informe di neuroplasma in preda a processi di neuronofagia (fig. 9).

All'inizio del processo degenerativo della cellula di Purkinje, quando l'atrofia è già accentuata ed il nucleo si modifica di forma, le fibre del canestro perdono la loro compattezza, divengono più lasse e formano delle anse all'esterno (fig. 6); alcune di esse si districano del tutto dal canestro e lo abbandonano (figg. 6 e 7); col progredire dell'atrofia del pirenoforo di Purkinje, le pareti del canestro appaiono più assottigliate e sembrano riacquistare la primitiva compattezza, ma risultano costituite da un feltro più sottile di fibre (fig. 8); poichè nel frattempo altre fibre continuano a distaccarsi dal canestro, appare evidente che l'assottigliamento delle pareti del canestro non è dovuto ad un più intimo accollarsi delle fibre, bensì alla loro rarefazione; quando il processo di atrofia è avanzato, attorno al pirenoforo non resta che una rete a larghe maglie di fibre spesse ed intensamente argirofile (fig. 8). In poche parole: nel processo d'involuzione del neurone di Purkinje, le fibre del canestro progressivamente si sbrigliano da questo e lo abbandonano man mano che prosegue l'atrofia del pirenoforo.

Le fibre rampicanti, a differenza di quelle del canestro, conservano più a lungo inalterate le loro connessioni sinaptiche; in proposito va osservato che l'atrofia del dendrite inizia più tardivamente rispetto a quella del pire-

noforo e si manifesta evidente solo verso il termine del processo involutivo, quando il corpo cellulare ha assunto l'aspetto falciforme; durante l'atrofia dell'arborizzazione dendritica, le fibre rampicanti divengono più spesse, perdono il loro decorso sinuoso e, accompagnandosi alle modificazioni dell'albero dendritico, assumono l'andamento di una spezzata, con gomiti angolosi e, tra gomito e gomito, a decorso rettilineo; le fibre rampicanti restano ancora visibili anche quando i processi degenerativi del neuroplasma sono molto avanzati ed è affatto scomparsa ogni traccia del dendrite: esse infatti si osservano sormontare quei lassi canestri entro cui resta solo una massa amorfa di neuroplasma più o meno erosa dai macrofagi (fig. 9). L'aumento in spessore delle fibre rampicanti, come di quelle dei canestri, è verosimilmente dovuta, più che a modificazioni del neuroplasma, al rilasciamento e quindi all'accorciamento delle fibre provocati dall'atrofia del pirenoforo delle cellule di Purkinje.

Scomparso il corpo cellulare dell'elemento di Purkinje, *presto* si obliterano le cavità e quindi scompaiono i resti del canestro; ciò lo desumo dalla rara occorrenza dei residui di tali formazioni.

Per quanto riguarda le fibre sinaptiche, esse, non appena abbandonato il canestro, si assottigliano ed assumono un decorso capriccioso; analoghe modificazioni si osservano nelle fibre rampicanti dopo la scomparsa dell'albero dendritico. È molto difficile seguire l'ulteriore destino di queste fibre; ho talora notato un piccolo e lasso groviglio costituito da una grossa fibra di aspetto discontinuo o moniliforme in corrispondenza della base del canestro, ma queste immagini appartengono con tutta probabilità alla porzione prossimale del neurite, il quale, come è stato stabilito dalle osservazioni di Stefanelli (cellule di Mauthner di certi Teleostei<sup>(15)</sup>) e di Levi e Mayer (esperienze in culture *in vitro*<sup>(16)</sup>), degenera più tardi del pirenoforo e dei dendriti della cellula nervosa; ricordo in proposito che fibre normalmente in degenerazione provenienti dalla corteccia, sono state costantemente osservate dagli Autori che hanno applicato il metodo di Marchi al cervelletto di Mammiferi (Allen 1924<sup>(17)</sup>, Down 1938<sup>(18)</sup>).

A parte quanto sopra, nello strato grigio della corteccia cerebellare di gatti di 2 e 5 anni non ho ravvisato evidenti processi degenerativi a carico di fibre. Pertanto il destino ultimo delle fibre sinaptiche delle cellule di Purkinje degenerate, sfugge all'osservazione dei miei preparati. In attesa di nuovi dati dall'impiego di metodi più appropriati, per il momento presumo che le fibre rampicanti e quelle del canestro in breve tempo scompaiono poichè il plesso dello strato molecolare e quello sottocellulare non si complicano notevolmente in rapporto con l'età; dall'osservazione dei preparati sarei portato ad ammettere che le fibre sinaptiche degli elementi di Pur-

(15) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 14, p. 550 (1953); « *Experientia* », vol. 2, p. 277 (1953).

(16) G. LEVI e H. MAYER, « *Journ. Experim. Zool.* », vol. 99, p. 141 (1945).

(17) W. F. ALLEN, « *Journ. Comp. Neurol.* », vol. 36, p. 399 (1924).

(18) R. S. DOWN, « *Journ. Comp. Neurol.* », vol. 68, p. 296 (1938).



kinje degenerati si aggregano a quelle di elementi di Purkinje circostanti già differenziati o in differenziamento: in effetti ho notato, con sempre maggior frequenza in rapporto all'età degli adulti, rispetto agli animali al termine della morfogenesi (di 20-30 giorni dalla nascita), che le fibre rampicanti di un singolo elemento di Purkinje divengono più di una e che le fibre che attraversano lo strato delle cellule di Purkinje in prossimità dei canestri, ma senza contrarre intimi rapporti con questi, appaiono più numerose (ved. anche fig. 9).

*In conclusione:* queste osservazioni, oltre a confermare quanto da me descritto sul breve ciclo vitale dei neuroni di Purkinje del cervelletto, dimostrano che le fibre sinaptiche, che si formano attorno agli elementi che si differenziano nel gatto adulto, originano *in situ* da fibre provenienti dai canestri vicini; queste giungono simultaneamente sul pirenoforo in differenziamento, e pertanto non si verifica la successione di arrivo che si osserva durante la morfogenesi, ove giungono prima le fibre rampicanti e in un secondo momento le fibre del canestro. Le fibre che costituiscono i rapporti sinaptici attorno alle cellule di Purkinje che si involgono nell'adulto, si modificano: le fibre dei canestri si rilasciano, si ispessiscono e quindi il canestro si dissolve man mano che procede l'atrofia della cellule di Purkinje; le fibre rampicanti, invece, si mantengono più a lungo in sede, divenendo più spesse ed angolose. Dopo la scomparsa del pirenoforo del neurone di Purkinje, tutte le fibre sinaptiche si assottigliano, i canestri si dissolvono e le fibre rampicanti si semplificano; in attesa di ulteriori dati, si presume che le fibre in questione vengano ad associarsi ai sistemi sinaptici di circostanti elementi differenziati o in differenziamento.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il saluto della Classe e suo personale al prof. Matthias Matschinski del «Centre National de la Recherche Scientifique», che assiste alla seduta.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il prof. Giordani presenta il volume «Cinquant'anni di relatività 1905-1955», con prefazione di Albert Einstein e una introduzione generale a cura di Mario Pantaleo, Direttore Generale al Ministero della Pubblica Istruzione. Il volume è diviso in tre parti: la prima, dedicata a «Le teorie della relatività», contiene scritti dei Soci Polvani, Finzi e del prof. Straneo, mentre nella parte seconda, «Interpretazioni, verifiche e applicazioni della relatività», figurano scritti dei Soci Severi, Armellini, Caldirola e Aliotta. La parte terza, infine, contiene le Memorie fondamentali di Albert Einstein, tradotte a cura dei proff. Pratelli, Radicati di Bròzolo e Straneo.



Il Presidente dà quindi lettura di una lettera ricevuta da parte del Direttore della citata opera, prof. Pantaleo, con la quale viene chiesto all'Accademia di concedere all'opera stessa i suoi auspici, unitamente a quelli della Società Italiana per il Progresso delle Scienze e del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La Classe, ad unanimità, dà mandato al Presidente di ringraziare il dott. ing. Pantaleo e di comunicargli che l'Accademia è lieta di aderire alla sua richiesta.

Il Socio Sansone presenta, per conto dell'Unione Matematica Italiana, il 3° volume delle Opere di Luigi Bianchi sui «Sistemi tripli ortogonali» e lo illustra ampiamente.

Il Socio Puntoni presenta il V volume degli Atti del VI Congresso Internazionale di Microbiologia, svoltosi a Roma dal 6 al 12 settembre 1953, che contiene le seguenti Sezioni:

Sezione XIII - Spirochete

» XIV - Miceti

» XV - Protozoa

» XVI - Artropodi trasmettitori di microrganismi.

Il Socio d'Ancona presenta il 1° fascicolo del volume X dell'«Archivio di Oceanografia e Limnologia», pubblicato dal Centro di Studi Talassografici del Consiglio Nazionale delle Ricerche con sede a Venezia, che si propone di promuovere e coordinare ricerche talassografiche, campo di attività questo che non può rientrare nel quadro universitario e necessita della collaborazione tra studiosi specialisti di diverse scienze, sia in campo nazionale che internazionale.

Il Presidente Giordani ringrazia i Soci che hanno offerto opere in omaggio all'Accademia.

Il Socio Crocco presenta il fascicolo maggio-giugno 1955 di «Civiltà delle Macchine», contenente un suo studio dal titolo: «Anticipazioni di nautica interplanetaria», da considerarsi come volgarizzazione della Nota di Meccanica presentata in questa stessa seduta. Presenta poi in omaggio i fascicoli della stessa rivista, del luglio e del novembre 1953 e del gennaio 1955, nei quali figurano importanti articoli di sintesi scientifica del Collega Krall, rispettivamente su «Tullio Levi-Civita nella meccanica del suo tempo», «Tullio Levi-Civita e la relatività» e «Vito Volterra - La matematica e la scienza del suo tempo».

Il Socio Crocco comunica poi che la redazione di «Civiltà delle Macchine» ha offerto in omaggio all'Accademia l'intera collezione dei numeri sinora editi e propone che la Presidenza invii un cenno di accoglimento.

Il Presidente ringrazia il Socio Crocco e assicura che provvederà a fare pervenire alla predetta redazione i ringraziamenti dell'Accademia.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Giuseppe Levi informa la Classe che il 16 del corrente mese ricorrerà l'85° compleanno del Collega Warren Harmon Lewis, Socio Straniero della Categoria V e biologo di grandissimo valore. Il Lewis, infatti, oltre ad essere stato un precursore della scoperta del fenomeno dell'induzione, ebbe il merito di sapere utilizzare, per indagini citologiche, il metodo delle colture dei tessuti, scoperto alcuni anni prima da Harrison. Le sue ricerche sulla minuta struttura delle cellule viventi in coltura e sulle trasformazioni alle quali vanno soggette, nelle varie fasi della loro vita, sono ormai divenute classiche.

Il Socio G. Levi propone pertanto che l'Accademia invii all'illustre Collega americano un messaggio di augurio e il Presidente è ben lieto di associarsi, unitamente all'intera Classe, a tale proposta,

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci Sansone, Segre, Solaini, Bianchi, a nome del Collega G. B. Dal Piaz, Majorana, Cotronei, Rolla, Cambi, d'Ancona, Fantappiè, Sergi, Mineo, Picone, Onorato e Crocco.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CROCCO G. A. – Formulazioni di Meccanica Astronautica.

FAVINI G. e PIOZZI F. – Sulle sintesi isatinica di Sandmeyer: influenza dei sostituenti all'anello benzenico sulla formazione delle isonitrosoacetinidi (pres. dal Socio L. CAMBI).

IANDELLI A. – Sui composti intermetallici  $\text{SrGa}_2$  e  $\text{BaGa}_2$  (pres. dal Socio L. ROLLA).

LAUWERIER H. A. – Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord (pres. dal Socio M. PICONE).

MALARODA R. – Contributo alle conoscenze paleontologiche del Pliocene dei dintorni di Strongoli, nel Cretonese (Catanzaro) (pres. dal Corrisp. GB. DAL PIAZ).

MATSCHINSKI M. – Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota I (pres. dal Socio E. ONORATO).

MATSCHINSKI M. – Deux hypothèses sur les causes de la formation de la bifeuille de Popoff. Nota II (pres. dal Socio E. ONORATO).

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Clementi, anche a nome dei Colleghi Beccari, Pupilli e Carrelli, legge la relazione della Commissione per l'esame della Memoria « Il volo cieco dei pipistrelli e le pieghe ari-epiglottiche quale organo produttore

degli ultrasuoni». Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

Il Socio Picone, anche a nome del Collega Vallauri, legge la relazione della Commissione per l'esame della Memoria del dott. Marino, dal titolo « Sulla risposta delle strutture elettriche filtranti ideali a forme d'onda rappresentabili con la trasformata da Fourier ». Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

Il Socio Meneghetti, anche a nome dei Colleghi Pupilli e Vernoni, legge la relazione della Commissione per l'esame della Memoria dei dott. P. Benigno, P. Visentini e V. Franceschini, dal titolo: « Influenza dell'ossitetraclina sul metabolismo proteico dell'*E. Coli* in stasi riproduttiva e di sviluppo ». Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

## CONGRESSI

Il Presidente comunica alla Classe che l'Accademia è stata invitata al Congresso Geologico Internazionale che avrà luogo dal 4 all'11 settembre 1956 al Messico e al 3° Congresso Internazionale di Biochimica che si svolgerà a Bruxelles dal 1° al 6 agosto p. v.

Il prof. Giordani prega quei Soci che eventualmente intendessero prender parte alle citate manifestazioni, di informarne la Presidenza affinché possa essere loro affidata la rappresentanza dell'Accademia.

I Soci G. Levi e Beccari comunicano che avrà luogo a Parigi, il 25 luglio p. v., il Congresso Internazionale Federativo di Anatomia, al quale prenderanno parte entrambi.

Il Presidente Giordani prega i Colleghi G. Levi e Beccari di voler rappresentare, in tale occasione, l'Accademia e i due predetti Soci accettano.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 13 giugno 1955*

*Archivio di Oceanografia e di Limnologia.*  
Vol. X, fasc. 1-2.

BIANCHI Luigi. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Volume III: *Sistemi tripli ortogonali.* Roma, Edizioni Cremonese, 1955. Pp. 850, in-8°.

BIBLIOTECA COMUNALE. MILANO. — *Catalogo della raccolta di Alimentazione e Panificazione Arnaldo Luraschi.* Milano, Associazione Panificatori, 1955. Pp. 124, in-8°.

*Cinquant'anni di relatività. 1905-1955.* Prefazione di Albert Einstein. Firenze, Editrice Universitaria, 1955. Pagine XLIX-634, in-4°, con tavv.

CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. ROMA, 6-12 SETTEMBRE 1953. — *Atti.* Vol. V, sezioni XIII-XVI, n. 1-145. Roma, Staderini, 1955. Pp. 578, in-8°, con figg.

CROCCO G. Arturo. — *Anticipazioni di Nautica Interplanetaria.* Estr. da «Civiltà delle Macchine», a. III, 1955, n. 3.

D'ERASMO Geremia. — Vedi: *Relazione preliminare sul rilevamento del F° 175-Cerignola.*

EINSTEIN Albert. — Vedi: *Cinquant'anni di relatività.*

HEDVALL J. A. — *Principal results about the reactivity of solids.* Rio de Janeiro, Academia Brasileira de Ciências, 1954. Pp. 11, in-8°

ISAAKIDES C. A. — *La lutte biologique contre la mouche des olives en Grèce.* Estr. da «Pragmateiai tēs Akadēmias Athēnōn», t. XXII, arithm. 1.

KRALL Giulio. — *Tullio Levi Civita e la relatività.* Estr. da «Civiltà delle Macchine», a. I, 1953, n. 6.

— *Tullio Levi-Civita nella meccanica del suo tempo.* Estr. da «Civiltà delle Macchine», a. I, 1953, n. 4.

KRALL Giulio. — *Vito Volterra. La matematica e la scienza del suo tempo e Volterra e le istituzioni scientifiche italiane.* Estr. da «Civiltà delle Macchine», a. III, 1955, n. 1 e a. III, 1955, n. 3.

LARDÉ DE VENTURINO Alice. — *La electricidad: alma mater universal. Fenómenos cosmológicos y biopsicológicos.* Tomo I. Barcelona, Cervantes, 1954. Pp. 126, in-8°.

— *La electricidad en los fenómenos bio y psicológicos.* II parte. Barcelona, Cervantes, 1954. Pp. 258, in-8°.

MARKOVIČ A. — Vedi: NEŠIČ Č. P. i MARKOVIČ A.

NEŠIČ Č. P. i MARKOVIČ A. — *Očne Bolesti.* Beograd, Srpska Akademija Nauka, 1955. Pp. XV-362, in-8°, con figg. e tavv.

OCAMPO Sixto. — *La causa de la rotación del perihelio de Mercurio.* Estr. da «Dyna», a. XXVII, 1952, n. 11.

PIERACCINI Gaetano. — *Le portatrici di pesi sulla testa.* Confronto con altri sistemi di trasporto di carichi. Il lavoro, differenziato sessualmente, in età remota. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1955. Pp. 155, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 29).

PRZYPKOWSKI Tadeusz. — *Dzieje Myśli Kopernikowskiej.* Warszawa, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, 1954. Pp. 114, in-16.

*Relazione preliminare sul rilevamento del F° 175-Cerignola* (Quadrante II, Lavello, ed aree adiacenti). Estr. da «Bollettino del Servizio Geologico d'Italia», vol. LXXVI, 1955, n. 2.

ŠAHOVIĆ K. — *Razmatranja o etiologiji i patogenezi endemične strume.* Estr. da «Odeleženje za eksperimentalnu i kliničku patologiju», 1954.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

## ERRATA CORRIGE

Pag. 262, riga 33, invece di 15' leggasi 15".





## INDICI DEL VOLUME



## INDICE PER AUTORI

## A

- AGOSTINI O., vedi MAZZI V.  
 AMICI A., vedi FAMIANI V.  
 ARCIDIACONO G., Sull'importanza del «gruppo base» nel problema della unificazione dei campi fisici, 386.  
 — Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di Relatività finale, 515.  
 — Sul campo elettromagnetico generalizzato, 631.  
 ARMELLINI G., Sopra le bande e la rotazione di Venere, 140.  
 ARRIGONI O., Azione del flavin-mono-nucleotide e del flavin-adenin-dinucleotide sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in frazioni enzimatiche parzialmente purificate, 94.  
 — Vedi MARRÈ E.

## B

- BAFFONI G. M., Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. — IV. Le fibre sinaptiche dei neuroni di Purkinje in differenziamento ed in degenerazione del gatto adulto, 662.  
 BALLARIO M. C., Gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci e l'effetto di longitudine, 284.  
 BARSOTTI I., Un teorema di struttura per le varietà gruppali, 43.  
 BATTAGLIA B. e PULZE E., Adattamento e incipiente isolamento intraspecifico in un Copepode Harpacticoide della laguna veneta, 424.  
 BENAZZI M., L'evoluzione della poliploidia nelle planarie appartenenti alla super-specie «*Dugesia gonocephala*», 527.  
 BENEDICTY M., Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane, 602.  
 BOAGA G., Sugli schiacciamenti delle superficie isopicnotiche nell'interno della Terra, 247.  
 BOCCIARELLI D. S., TENTORI L. e VIVALDI G., Osservazioni al microscopio elettronico di sezioni di leucociti umani, 229.  
 BURLINI G., vedi D'ANCONA U.

## C

- CAFIERO M., vedi LENTI C.  
 CALOI P. e SPADEA M. C., Relazioni fra lente variazioni d'inclinazione e moti sismici in zona ad elevata sismicità, 250.  
 CAMBI L., Suscettività magnetica dei complessi  $\text{Co}^{\text{II}}$ — $\text{Co}^{\text{III}}$ , 581.  
 — CANONICA L., e DE LEONE R., Complessi di  $\text{Ni}^{\text{II}}$  e  $\text{Pd}^{\text{II}}$  con le immidi, 467.  
 — CANONICA L. e SIRONI C., Complessi triazolici di Cobalto<sup>II</sup> e Cobalto<sup>III</sup>, 583.  
 CANESTRARI R., CREPAX P. e MACHNE X., Effetti della stricninizazione del «lobulus ansiformis» sull'attività elettrica della corteccia cerebrale, 332.  
 — e INFANTELLINA F., Effetti della polarizzazione del midollo spinale di Rana sulla eccitabilità del N. ischiatico, 476.  
 CANETTA P., Sulla esistenza di una curva piana algebrica di ordine 8 con 14 cuspidi e 2 nodi, 478.  
 CANONICA L. e FIECCHI A., Su la struttura delle quassine. Nota I, 192.  
 — — e VALCAVI U., Trasposizioni degli acidi  $\gamma$ -fenossicrotonici, 520.  
 — Vedi CAMBI L.  
 CAPUTO M., Sulla legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi dovuti all'imperfetto allineamento delle spranghe, 510.  
 CATTANEO L., Considerazioni sul braccio temporale della commessura bianca anteriore dell'encefalo, 98.  
 CAVALLINI D., DE MARCO C., MONDOVÌ B. e STIRPE F., Sintesi dell'ipotaurina, 552.  
 CHISINI O., Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche. Nota III, 8.  
 CICCARONE P., vedi ROSSI-FANELLI A.  
 CIMINO M., FORTINI T. e GIANNUZZI M. A., Contributo al problema della luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare nell'eclisse totale di Luna del 18-19 gennaio 1954, 173.  
 CITA M. B., Il Daniano in Italia, 201.  
 — Vedi DESIO A.  
 CLAUSER E., Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallele di spazi non riemanniani, 495.

- COLOMBO G., Riduzione alle quadrature di un notevole problema di stereodinamica, 168.
- CORRADINI P., vedi NATTA G.
- CREPAX P. e POMPEIANO O., Attività elettrica spontanea dei lobi ottici del Piccione mesencefalico, 409.
- Vedi CANESTRARI R.
- CROCCO G. A., Passaggio apparente della Terra sul Sole in una escursione Terra-Marte. Nota preliminare, 245.
- CURTI R. e LOCCHI S., Ulteriori ricerche sulla riduzione di N-ossidi del gruppo delle azine. Nota III, 179.
- CURTI R., LOCCHI S. e LANDINI U., Studio di N-ossidi di benzofenazine clorosostituite. Nota II, 78.

## D

- DALLA VOLTA V., Varietà totalmente geometriche nello spazio delle matrici simmetriche, 619.
- D'AMATO F., Azione protettiva della cisteina contro l'inibizione della germinazione e della crescita prodotte dalle trietilene-melamina (TEM) nel Grano 222.
- D'ANCONA U., SABBADIN A. e BURLINI G., Azione femminizzante di uova di Teleostei, 265.
- DE CESARIS COROMALDI L., vedi URBANI E.
- DE LEONE R., vedi CAMBI L.
- DE MARCO C., vedi CAVALLINI D.
- DEMARIA D. C., Sulla definizione di corpo, 268.
- DE SIMONI F., Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria, 297.
- DESIO A. e CITA M. B., Nuovi ritrovamenti di calcari fossiliferi del Paleozoico superiore nel bacino del Baltoro (Himalaya-Karakorum), 587.
- DUMIO F., Su una generalizzazione della dinamica relativistica della particella, 75.

## F

- FAMIANI V. e AMICI A., Sul comportamento di animali alimentati con dieta deficiente in sostanze minerali, 325.
- FANTAPPIÈ L., Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota I, 361.
- Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota II, 458.

FAVINI G., vedi PIOZZI F.

— Vedi SIMONETTA M.

FENOGLIO M. e RIGAUT G., Ricerche spettrografiche sulla scheelite di Traversella, 260.

FERASIN F., Il Cretaceo nei dintorni di Cimalais (Udine), 208.

FERRARI I., Multipoli e onde di Schelkunoff dissimetriche, 304.

— Multipoli e onde di Schelkunoff. Il caso generale, 623.

FERRO R., Monotellururo e monossimonotellururo di torio, 641.

FIECCHI A., vedi CANONICA L.

FILOGAMO G. e VIGLIONE F., Caratteri citologici e numero dei neuroni esterocettivi nei gangli spinali destinati all'innervazione dell'arto anteriore, nel cane, 226.

FINZI L., Principio della minima energia elastica differenziale, 274.

FORTINI T., Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 15-16 luglio 1954 e luminescenza del suolo lunare, 65.

— Sopra la BM Orionis, 505.

— Vedi CIMINO M.

## G

GAETA F., Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker e sulle forme puntuali associate alle varietà algebriche, 148.

GARAVELLI C. L., Un nuovo minerale tra i prodotti secondari del giacimento di Capo Calamita (Isola d'Elba), 392.

GEROLA F. M. e GILARDI E., L'azione del berillio sull'assorbimento del fosforo e sull'aumento in peso di apici radicali, 533.

GIACOMETTI G., Relazioni tra costanti polarografiche e costituzione delle molecole organiche. - III. Alcune considerazioni sui composti carbonilici aromatici, 185.

GIANNUZZI M. A., Variazioni stagionali apparenti del raggio solare, dedotte dalle osservazioni di Greenwich, 62.

— Orbita della stella binaria A.D.S. 10188. Nota I, 280.

— Orbita della stella binaria A.D.S. 10188. Nota II, 501.

GIANNUZZI M. A., vedi CIMINO M.

GILARDI E., vedi GEROLA F. M.

GIRLANDA A., Studio di un movimento sismico del basso Tirreno originante alla profondità di 265 km., 288.

GODINA G., Espansioni membraniformi e fenomeni di pinocitosi negli assoni embrionali che crescono «in vitro», 104.

GORTANI M., Commemorazione del Corrispondente Egidio Feruglio, 233.

GRILLO M. A., vedi LENTI C.

GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., Modificazioni dei riflessi spinali nell'uomo in seguito a somministrazione di una dose moderata di caffeina per bocca, 16.

## I

IANDELLI A., Su un nuovo metodo di preparazione del Samario metallico, 644.

INFANTELLINA F. e LA GRUTTA G., La regolazione dei riflessi in muscoli simmetrici degli arti della Rana sottoposta a sezioni del nevrasso a diversi livelli, 412.

— Vedi CANESTRARI R.

## K

KÄHLER E., Tensori razionali di 1<sup>a</sup> specie sopra una varietà algebrica, 151.

## L

LA GRUTTA G., vedi INFANTELLINA F.

LANDINI U., vedi CURTI R.

LAUDI G., vedi MARRÈ E.

LENTI C., CAFIERO M. e GRILLO M. A., Effetto dell'alta montagna sulla succinicodeidrogenasi del fegato, del rene e del cuore, 85.

LOCCHI S., vedi CURTI R.

LOINGER A., Sull'elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme, 309.

LOMBARDO-RADICE L., Sui piani finiti a configurazione di Fano universale 154.

— A proposito di un teorema sui piani finiti sopra un quasicorpo, 599.

LONGO C., Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine di  $S_7$ , 614.

## M

MACHNE X., vedi CANESTRARI R.

MAJORANA Q., Sulla cinematica relativistica, 462.

— Radio-onde emesse dal pianeta Giove ed un'ipotesi cosmogonica, 577.

MARCHIONNA TIBILETTI C., La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante, 480.

MARCUZZI G., Osservazioni fisico-chimiche sul sangue dei Coleotteri Tenebrionidi.

— I. La pressione osmotica nel «Tenebrio molitor» L., 654.

MARGARIA R., vedi GUALTIEROTTI T.

MARRÈ E., Dimostrazione spettrofotometrica della formazione di complessi auxinproteici a livello dei gruppi sulfidrilici in preparati enzimatici vegetali, 88.

— e ARRIGONI O., Ulteriori ricerche sull'azione inibente dell'auxina nei confronti dell'ossidasi dell'acido ascorbico, 539.

— e LAUDI G., Ricerche sulla fisionomia enzimatica della fotosintesi — I. Trasporto di idrogeno all'ossigeno, tramite il sistema trifosfopiridinnucleotide-glutazione-ascorbico, in cloroplasti isolati esposti alla luce, 402.

— e SERVETTAZ O., Sul parallelismo tra azione di stimolo sulla crescita e azione sull'attività deidrogenasica «in vitro» di alcuni inibitori dei gruppi sulfidrilici a concentrazioni subinibenti, 546.

MATSCHINSKI M., I fenomeni di fluttuazione in geofisica. — Loro descrizione matematica e loro applicazione dal punto di vista pratico, 378.

MAZZI V. e AGOSTINI O., Prime osservazioni citologiche e istochimiche sulla pseudobranchia spiracolare di «Cyprinus carpio», 100.

MINEO C., Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche, 569.

MONDOVÌ B., vedi CAVALLINI D.

MORPURGO G. e MORPURGO-CHITI L., Su un nuovo ceppo di *Drosophila* «podoptera» ad alta penetranza, 110.

— NICOLETTI B. e SOLIMA A., Eterozigosi e rapporto sessi in «*Drosophila melanogaster*», 347.

MORPURGO-CHITI L., vedi MORPURGO G.



MORUZZI G. e POMPEIANO O., Influenze cerebellari crociate sul tono posturale, 420.

## N

NARDINI R., Osservazioni su una relazione energetica della magneto-idrodinamica, 376.

NATTA G., Commemorazione del Socio Giacomo Mario Levi, 427.

— e CORRADINI P., Sulla struttura cristallina del polistirolo isotattico, 19.

NICOLETTI B., vedi MORPURGO G.

NOCILLA S., Sopra una classe di soluzioni singolari della equazione di Tomotika e Tamada per lo studio dei moti transonici, 55.

## O

OSTROWSKI A., Un'applicazione dell'integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane, 373.

## P

PIOZZI F. e FAVINI G., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: ciclizzazione delle isonitrosoacetanilidi con acido polifosforico. Nota I, 647.

POLVANI G., Commemorazione del Corrispondente Giorgio Valle, 113.

POMPEIANO O., vedi CREPAX P.

— vedi MORUZZI G.

PROFUMO P., Azione dell'acido indolacetico sugli equilibri glucidici di coleptili d'Avena, 319.

PROSPERI G. M., Sulle equazioni relativistiche del moto di una particella soggetta a forze derivanti da potenziale scalare, 69.

PUCCI C., Sui problemi di Cauchy non « ben posti », 473.

PULZE E., vedi BATTAGLIA B.

## Q

QUERCIOLO E., Struttura molecolare e azione citogenetica e citofisiologica di sostanze del gruppo delle cumarine, 313.

## R

RICCI G., Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti, 27.

— Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze, 609.

RIGAULT G., vedi FENOGLIO M.

RIGGIO BEVILACQUA L., Ulteriore contributo alla fisiologia enzimatica della germinazione. Comportamento differenziale tra Leguminose e Graminacee nei confronti dei coenzimi piridinici, 214.

ROSSI A., Sviluppo dell'arto nei trapianti xenoplastici tra Anfibi Anuri e Urodeli. — Correlazioni fra arto e cinto, 336.

ROSSI-FANELLI A., SILIPRANDI N., SILIPRANDI D. e CICCARONE P., Trifosfotiamina cristallizzata, 257.

RUSSO A., Sterilizzazione dei tessuti ed immunità. La scoperta di Edoardo Jenner. Vaiuolo e tumori maligni. Nota II, 14.

## S

SABAN G., Su due invarianti integrali della teoria metrica delle superficie rigate, 50.

SABBADIN A., vedi D'ANCONA U.

SCE M., Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali, 32.

SERVETTAZ O., vedi MARRÈ E.

SEVERI F., Sugli antigeni d'una varietà algebrica, 131.

— Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche, 357.

— Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali, 443.

SILIPRANDI D., vedi ROSSI-FANELLI A.

SILIPRANDI N., vedi ROSSI-FANELLI A.

SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua. Nota III, 636.

SINISCALCO M., Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota III, 556.

SIRONI C., vedi CAMBI L.

SOLIMA A., vedi MORPURGO G.

SPADEA M. C. vedi CALOI P.

STIRPE F. vedi CAVALLINI D.

STORCHI E., Condizioni caratteristiche per la validità dei principî di Hamilton e di Hölder, 162.

## T

- TALLINI G., Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei, 367.  
TENTORI L., vedi BOCCIARELLI D. S.,  
TRICOMI F. G., Sull'inversione dell'ordine di integrali « principali » nel senso di Cauchy, 3.

## U

- URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « *Bufo vulgaris* », 341.

## V

- VALCAVI U., vedi CANONICA L.  
VESENTINI E., Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza, 38.  
— Sui punti stazionari di forme differenziali meromorfe sopra una varietà complessa compatta, 486.  
VIGLIONE F., vedi FILOGAMO G.  
VIOLA T., Funzioni quasi continue in spazi astratti, 145.  
VIVALDI G., vedi BOCCIARELLI D. S.

## Z

- ZAGAR F., Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana, 452.

## INDICE PER MATERIE

### A

- Algebra.** — Sulla definizione di corpo. DEMARIA D. C., 268.
- Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei. TALLINI G., 367.
- Analisi matematica.** — Sui problemi di Cauchy non « ben posti ». PUCCI C., 473.
- Sull'inversione dell'ordine di integrali « principali » nel senso di Cauchy. TRICOMI F. G., 3.
- Anatomia.** — Considerazioni sul braccio temporale della commessura bianca anteriore dell'encefalo. CATTANEO L., 98.
- Astrofisica.** — Radio-onde emesse dal pianeta Giove ed un'ipotesi cosmogonica. MAJORANA Q., 577.
- Astronomia.** — Sopra le bande e la rotazione di Venere. ARMELLINI G., 140.
- Gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci e l'effetto di longitudine. BALLARIO M. C., 284.
- Contributo al problema della luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare nell'eclisse totale di Luna del 18-19 gennaio 1954. CIMINO M., FORTINI T. e GIANNUZZI M. A., 173.
- Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 15-16 luglio 1954 e luminescenza del suolo lunare. FORTINI T., 65.
- Sopra la BM Orionis. FORTINI T., 505.
- Variazioni stagionali apparenti del raggio solare, dedotte dalle osservazioni di Greenwich. GIANNUZZI M. A., 62.
- Orbita della stella binaria A.D.S. 10188. Nota I. GIANNUZZI M. A., 280.
- Orbita della stella binaria A.D.S. 10188. Nota II. GIANNUZZI M. A., 501.

### B

- Biologia.** — Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. — IV. Le fibre sinaptiche dei neuroni di Purkinje in differenziamento

ed in degenerazione del gatto adulto. BAFFONI G. M., 662.

- Osservazioni al microscopio elettronico di sezioni di leucociti umani. BOCCIARELLI D. S., TENTORI L. e VIVALDI G., 229.
- Sintesi dell'ipotaurina. CAVALLINI D., DE MARCO C., MONDOVÌ B. e STIRPE F., 552.
- Azione femminizzante di uova di Teleostei. D'ANCONA U., SABBADIN A. e BURLINI G., 265.
- Espansioni membraniformi e fenomeni di pinocitosi negli assoni embrionali che crescono « in vitro ». GODINA G., 104.
- Prime osservazioni citologiche e istochimiche sulla pseudobranchia spiracolare di « Cyprinus carpio ». MAZZI V. e AGOSTINI O., 100.
- Sviluppo dell'arto nei trapianti xenoplastici tra Anfibi Anuri e Urodeli. — Correlazioni fra arto e cinto. ROSSI A., 336.
- Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris », URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., 341.

### C

- Chimica.** — Effetto dell'alta montagna sulla succinicodeidrogenasi del fegato, del rene e del cuore, LENTI C., CACIERO M. e GRILLO M. A., 85.
- Sulla struttura cristallina del polistirolo isotattico. NATTA G. e CORRADINI P., 19.
- Chimica biologica.** — Trifosfotiamina cristallizzata. ROSSI-FANELLI A., SILIPRANDI N., SILIPRANDI D. e CICCARONE P., 257.
- Chimica fisica.** — Ulteriori ricerche sulla riduzione di N-ossidi del gruppo delle azine. Nota III. CURTI R. e LOCCHI S., 179.
- Studio di N-ossidi di benzofenazine clorosostituite. Nota II. CURTI R., LOCCHI S. e LANDINI U., 78.
- Relazioni tra costanti polarografiche e costituzione delle molecole organiche. —

- III. Alcune considerazioni sui composti carbonilici aromatici. GIACOMETTI G., 185.
- Sulla cinetica della reazione tra I-cloro-2-nitroetano ed acqua. Nota III. SIMONETTA M. e FAVINI G., 636.
- Chimica inorganica.** — Suscettività magnetica dei complessi  $\text{Co}^{\text{II}}\text{--Co}^{\text{III}}$ . CAMBI L., 581.
- Complessi di  $\text{Ni}^{\text{II}}$  e  $\text{Pd}^{\text{II}}$  con le immidi. CAMBI L., CANONICA L. e DE LEONE R., 467.
- Complessi triazolici di Cobalto<sup>II</sup> e Cobalto<sup>III</sup>. CAMBI L., CANONICA L. e SIRONI C., 583.
- Monotellururo e monossimonotellururo di torio. FERRO R., 641.
- Su un nuovo metodo di preparazione del Samario metallico. IANDELLI A., 644.
- Chimica organica.** — Su la struttura delle quassine. Nota I. CANONICA L. e FIECCHI A., 192.
- Trasposizioni degli acidi  $\gamma$ -fenossicrotonici. CANONICA L., FIECCHI A. e VALCAVI U., 520.
- Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: ciclizzazione delle isonitrosoacetanilidi con acido polifosforico. Nota I. PIOZZI F. e FAVINI G., 647.
- Citogenetica vegetale.** — Struttura molecolare e azione citogenetica e citofisiologica di sostanze del gruppo delle cumarine. QUERCIOLE E., 313.
- Citologia.** — L'evoluzione della poliploidia nelle planarie appartenenti alla superspecie «*Dugesia gonocephala*». BENAZZI M., 527.
- Commemorazioni.** — Commemorazione del Corrispondente Giorgio Valle. POLVANI G., 113.
- Commemorazione del Corrispondente Egidio Feruglio. GORTANI M., 233.
- Commemorazione del Socio Giacomo Mario Levi. NATTA G., 427.
- Comunicazioni varie,** 242, 352, 563, 669.
- Congressi,** 122, 672.
- Cosmologia.** — Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. ZAGAR F., 452.
- F**
- Fisica.** — Sulla cinematica relativistica. MAJORANA Q., 462.
- Fisica matematica.** — Sull'importanza del «gruppo base» nel problema della unificazione dei campi fisici. ARCIDIACONO G., 386.
- Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di Relatività finale. ARCIDIACONO G., 515.
- Sul campo elettromagnetico generalizzato. ARCIDIACONO G., 631.
- Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria. DE SIMONI F., 297.
- Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota I. FANTAPPIÈ L., 361.
- Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota II. FANTAPPIÈ L., 458.
- Multipoli e onde di Schelkunoff dissimetriche. FERRARI I., 304.
- Multipoli e onde di Schelkunoff. Il caso generale. FERRARI I., 623.
- Fisica teorica.** — Su una generalizzazione della dinamica relativistica della particella. DUIMIO F., 75.
- Sull'elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme. LOINGER A., 309.
- Sulle equazioni relativistiche del moto di una particella soggetta a forze derivanti da potenziale scalare. PROSPERI G. M., 69.
- Fisiologia.** — Effetti della stricnizzazione del «lobulus ansiformis» sull'attività elettrica della corteccia cerebrale. CANESTRARI R., CREPAX P. e MACHNE X., 332.
- Effetti della polarizzazione del midollo spinale di Rana sulla eccitabilità del N. ischiatico. CANESTRARI R. e INFANTELLINA F., 416.
- Attività elettrica spontanea dei lobi ottici del Piccione mesencefalico. CREPAX P. e POMPEIANO O., 409.
- Sul comportamento di animali alimentati con dieta deficiente in sostanze minerali. FAMIANI V. e AMICI A., 325.
- Modificazioni dei riflessi spinali nell'uomo in seguito a somministrazione di una dose moderata di caffeina per bocca. GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., 16.
- La regolazione dei riflessi in muscoli simmetrici degli arti della Rana sottoposta a sezioni del nevrasso a diversi livelli. INFANTELLINA F. e LA GRUTTA G., 412.
- Influenze cerebellari crociate sul tono posturale. MORUZZI G. e POMPEIANO O., 420.

**Fisiologia vegetale.** — Azione del flavin-mono-nucleotide e del flavin-adenin-di-nucleotide sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in frazioni enzimatiche parzialmente purificate. ARRIGONI O., 94.

— Azione protettiva della cisteina contro l'inibizione della germinazione e della crescita prodotta dalla trietilene-melamina (TEM) nel Grano. D'AMATO F., 222.

— L'azione del berillio sull'assorbimento del fosforo e sull'aumento in peso di apici radicali. GEROLA F. M. e GILARDI E., 533.

— Dimostrazione spettrofotometrica della formazione di complessi auxin-proteici a livello dei gruppi sulfidrilici in preparati enzimatici vegetali. MARRÈ E., 88.

— Ulteriori ricerche sull'azione inibente dell'auxina nei confronti dell'ossidasi dello acido ascorbico. — MARRÈ E. e ARRIGONI O., 539.

— Ricerche sulla fisiologia enzimatica della fotosintesi. — I. Trasporto di idrogeno all'ossigeno, tramite il sistema trifosfopiridinnucleotide-glutazione-ascorbico, in cloroplasti isolati esposti alla luce. MARRÈ E. e LAUDI G., 402.

— Sul parallelismo tra azione di stimolo sulla crescita e azione sull'attività deidrogenasica «in vitro» di alcuni inibitori dei gruppi sulfidrilici a concentrazioni subinibenti. MARRÈ E. e SERVETTAZ O., 546.

— Azione dell'acido indolacetico sugli equilibri glucidici di coleoptili d'Avena. PROFUMO P., 319.

— Ulteriore contributo alla fisiologia enzimatica della germinazione. Comportamento differenziale tra Leguminose e Graminacee nei confronti dei coenzimi piridinici. RIGGIO BEVILACQUA L., 214.

## G

**Gas-dinamica transonica.** — Sopra una classe di soluzioni singolari della equazione di Tomotika e Tamada per lo studio dei moti transonici. NOCILLA S., 55.

**Genetica.** — Adattamento e incipiente isolamento intraspecifico in un Copepode Harpacticoida della laguna veneta. BATTAGLIA B. e PULZE E., 424.

— Su un nuovo ceppo di *Drosophila* «podoptera» ad alta penetranza. MORPURGO G. e MORPURGO-CHITI L., 110.

— Eterozigosi e rapporto sessi in «*Drosophila melanogaster*». MORPURGO G., NICOLETTI B. e SOLIMA A., 347.

— Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota III. SINISCALCO M., 556.

**Geodesia.** — Sulla legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi dovuti all'imperfetto allineamento delle spranghe. CAPUTO M., 510.

— Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche. MINO C., 569.

**Geofisica.** — Sugli schiacciamenti delle superficie isopieumatiche nell'interno della Terra. BOAGA G., 247.

— Relazioni fra lente variazioni d'inclinazione e moti sismici in zona ad elevata sismicità. CALOI P. e SPADEA M. C., 250.

— Studio di un movimento sismico del basso Tirreno originante alla profondità di 265 km. GIRLANDA A., 288.

**Geofisica matematica.** — I fenomeni di fluttuazione in geofisica. — Loro descrizione matematica e loro applicazione dal punto di vista pratico. MATSCHINSKI M., 378.

**Geologia.** — Il Daniano in Italia. CITA M. B., 201.

— Nuovi ritrovamenti di calcari fossiliferi del Paleozoico superiore nel bacino del Baltoro (Himalaya-Karakorum). DESIO A. e CITA M. B., 587.

— Il Cretaceo nei dintorni di Cimolais (Udine). FERASIN F., 208.

**Geometria.** — Un teorema di struttura per le varietà gruppal. BARSOTTI I., 43.

— Il teorema d'esistenza delle trece algebriche. Nota III. CHISINI O., 8.

— Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche. DALLA VOLTA V., 619.

— Sui piani finiti a configurazione di Fano universale. LOMBARDO-RADICE L., 154.

— Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine di  $S_7$ . LONGO C., 614.

— La irregolarità di un piano multiplo condotta dalla treccia diramante. MARCHIONNA TIBILETTI C., 480.

— Su due invarianti integrali della teoria metrica delle superficie rigate. SABAN G., 50.

— Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza. VESENTINI E., 38.



— Sui punti stazionari di forme differenziali meromorfe sopra una varietà complessa compatta. VESENTINI E., 486.

**Geometria algebrica.** — Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker e sulle forme puntuali associate alle varietà algebriche. GAETA F., 148.

— Tensori razionali di 1<sup>a</sup> specie sopra una varietà algebrica. KÄHLER E., 151.

— Sugli antigheneri d'una varietà algebrica. SEVERI F., 131.

— Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche. SEVERI F., 357.

— Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali. SEVERI F., 443.

**Geometria differenziale.** — Un'applicazione dell'integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane. OSTROWSKI A., 373.

## I

**Istofisiologia.** — Caratteri citologici e numero dei neuroni esterocettivi nei gangli spinali destinati all'innervazione dell'arto anteriore, nel cane. FILOGAMO G. e VIGLIONE F., 226.

## M

**Magneto-idrodinamica.** — Osservazioni su una relazione energetica della magneto-idrodinamica. NARDINI R., 376.

**Matematica.** — Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane. BENEDICTY M., 602.

— Sulla esistenza di una curva piana algebrica di ordine 8 con 14 cuspidi e 2 nodi. CANETTA P., 478.

— A proposito di un teorema sui piani finiti sopra un quasi corpo. LOMBARDI-RADICE L., 599.

— Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali. SCE M., 32.

— Funzioni quasi continue in spazi astratti. VIOLA T., 145.

**Meccanica.** — Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallele di spazi non riemanniani. CLAUSER E., 495.

— Riduzione alle quadrature di un notevole problema di stereodinamica. COLOMBO G., 168.

— Passaggio apparente della Terra sul Sole in una escursione Terra-Marte. Nota preliminare. CROCCO G. A., 245.

— Condizioni caratteristiche per la validità dei principî di Hamilton e di Hölder. STORCHI E., 162.

**Mineralogia.** — Ricerche spettrografiche sulla scheelite di Traversella. FENOGLIO M. e RIGAULT G., 260.

— Un nuovo minerale tra i prodotti secondari del giacimento di Capo Calamita (Isola d'Elba). GARAVELLI C. L., 392.

## O

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** 128, 243, 355, 441, 567, 673.

## P

**Patologia comparata.** — Sterilizzazione dei tessuti ed immunità. La scoperta di Edoardo Jenner. Vaiuolo e tumori maligni. Nota II. RUSSO A., 14.

**Personale accademico,** 124, 238, 352, 438, 561, 671.

**Plichi suggellati,** 352.

**Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei,** 564.

**Presentazione di libri,** 124, 238, 353, 438, 561, 669.

**Presentazione di Note e Memorie,** 127, 241, 354, 440, 563, 671.

## R

**Relazioni di Commissioni,** 564, 671.

## S

**Scienza delle costruzioni.** — Principio della minima energia elastica differenziale. FINZI L., 274.

## T

**Teoria delle funzioni analitiche.** — Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti. RICCI G., 27.

— Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze. RICCI G., 609.

## Z

**Zologia.** — Osservazioni fisico-chimiche sul sangue dei Coleotteri Tenebrionidi. — I. La pressione osmotica nel «Tenebrio molitor». MARCUZZI G., 654.

## INDICI DEI EASCICOLI

## FASCICOLO I.

GENNAIO 1955.

## NOTE DI SOCI

TRICOMI F. G., Sull'inversione dell'ordine di integrali « principali » nel senso di Cauchy . . . . .	Pag.	3
CHISINI O., Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche. Nota III . . . . .		8
RUSSO A., Sterilizzazione dei tessuti ed immunità. La scoperta di Edoardo Jenner. Vaiuolo e tumori maligni. Nota II . . . . .		14
GUALTIEROTTI T. e MARGARIA R., Modificazioni dei riflessi spinali nell'uomo in seguito a somministrazione di una dose moderata di caffeina per bocca (pres. dal Socio R. Margaria) . . . . .		16
NATTA G. e CORRADINI P., Sulla struttura cristallina del polistirolo isotattico (pres. dal Socio G. Natta) . . . . .		19

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

RICCI G., Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti (pres. dal Socio G. Sansone) . . . . .	Pag.	27
SCE M., Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .		32
VESENTINI E., Un'osservazione sul teorema dell'appartenenza (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .		38
BARSOTTI I., Un teorema di struttura per le varietà gruppalì (pres. dal Socio E. Bompiani) . . . . .		43
SABAN G., Su due invarianti integrali della teoria metrica delle superficie rigate (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .		50
NOCILLA S., Sopra una classe di soluzioni singolari della equazione di Tomotika e Tamada per lo studio dei moti transonici (pres. dal Corrisp. C. Ferrari) . . . . .		55
GIANNUZZI M. A., Variazioni stagionali apparenti del raggio solare, dedotte dalle osservazioni di Greenwich (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . .		62
FORTINI T., Fotometria fotografica della penombra durante l'eclisse di luna del 15-16 luglio 1954 e luminescenza del suolo lunare (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . .		65
PROSPERI G. M., Sulle equazioni relativistiche del moto di una particella soggetta a forze derivanti da potenziale scalare (pres. dal Corrisp. P. Caldirola) . . . . .		69
DUMIO F., Su una generalizzazione della dinamica relativistica della particella (pres. dal Corrisp. P. Caldirola) . . . . .		75
CURTI R., LOCCHI S. e LANDINI U., Studio di N-ossidi di benzofenazine clorosostituite. Nota II (pres. dal Corrisp. G. Semeraro) . . . . .		78
LENTI C., CAFIERO M. e GRILLO M. A., Effetto dell'alta montagna sulla succinicodeidrogenasi del fegato, del rene e del cuore (pres. dal Socio G. Levi) . . . . .		85
MARRÈ E., Dimostrazione spettrofotometrica della formazione di complessi auxin-proteici a livello dei gruppi sulfidrilici in preparati enzimatici vegetali (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .		88

ARRIGONI O., Azione del flavin-mono-nucleotide e del flavin-adenin-dinucleotide sull'ossidazione del glucosio-6-fosfato in frazioni enzimatiche parzialmente purificate (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	Pag. 94
CATTAXEO L., Considerazioni sul braccio temporale della commessura bianca anteriore dell'encefalo (pres. dal Socio <i>A. Pensa</i> ) . . . . .	98
MAZZI V. e AGOSTINI O., Prime osservazioni citologiche e istochimiche sulla pseudo-branchia spiracolare di « <i>Cyprinus carpio</i> » (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i> ) . .	100
GODINA G., Espansioni membraniformi e fenomeni di pinocitosi negli assoni embrionali che crescono «in vitro» (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	104
MORPURGO G. e MORPURGO-CHITI L., Su un nuovo ceppo di <i>Drosophila</i> «podoptera» ad alta penetranza (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	110

## COMMEMORAZIONI

POLVANI G., Commemorazione del Corrispondente Giorgio Valle . . . . .	Pag. 113
Congressi . . . . .	122
Personale accademico . . . . .	124
Presentazione di libri . . . . .	124
Presentazione di Note e Memorie. . . . .	127
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 15 gennaio 1955	128

## FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1955.

## NOTE DI SOCI

SEVERI F., Sugli antigeni d'una varietà algebrica . . . . .	Pag. 131
ARMELLINI G., Sopra le bande e la rotazione di Venere . . . . .	140

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

VIOLA T., Funzioni quasi continue in spazi astratti (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	Pag. 145
GAETA F., Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker e sulle forme puntuali associate alle varietà algebriche (pres. dal Socio <i>F. Severi</i> ) . . . . .	148
KÄHLER E., Tensori razionali di 1 <sup>a</sup> specie sopra una varietà algebrica (pres. dal Socio <i>F. Severi</i> ) . . . . .	151
LOMBARDO-RADICE L., Sui piani finiti a configurazione di Fano universale (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	154
STORCHI E., Condizioni caratteristiche per la validità dei principi di Hamilton e di Hölder (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	162
COLOMBO G., Riduzione alle quadrature di un notevole problema di stereodinamica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	168
CIMINO M., FORTINI T. e GIANNUZZI M. A., Contributo al problema della luminescenza del suolo lunare per la radiazione ultravioletta solare nell'eclisse totale di Luna del 18-19 gennaio 1954 (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	173
CURTI R. e LOCCHI S., Ulteriori ricerche sulla riduzione di N-ossidi del gruppo delle azine. Nota III (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i> ) . . . . .	179

GIACOMETTI G., Relazioni tra costanti polarografiche e costituzione delle molecole organiche. - III. Alcune considerazioni sui composti carbonilici aromatici (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i> ) . . . . .	Pag. 185
CANONICA L. e FIECCHI A., Su la struttura delle quassine. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	192
CITA M. B., Il Daniano in Italia (pres. dal Socio <i>A. Desio</i> ) . . . . .	201
FERASIN F., Il Cretaceo nei dintorni di Cimolais (Udine) (pres. dal Corrisp. <i>Gb. Dal Piaz</i> ) . . . . .	208
RIGGIO BEVILACQUA L., Ulteriore contributo alla fisiologia enzimatica della germinazione. Comportamento differenziale tra Leguminose e Graminacee nei confronti dei coenzimi piridinici (pres. dal Corrisp. <i>E. Remotti</i> ) . . . . .	214
D'AMATO F., Azione protettiva della cisteina contro l'inibizione della germinazione e della crescita prodotte dalla trietilene-melamina (TEM) nel Grano (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	222
FILOGAMO G. e VIGLIONE F., Caratteri citologici e numero dei neuroni esterocettivi nei gangli spinali destinati all'innervazione dell'arto anteriore, nel cane (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	226
BOCCIARELLI D. S., TENTORI L. e VIVALDI G., Osservazioni al microscopio elettronico di sezioni di leucociti umani (pres. dal Socio <i>G. C. Trabacchi</i> ) . . . . .	229

### COMMEMORAZIONI

GORTANI M., Commemorazione del Corrispondente Egidio Feruglio . . . . .	Pag. 233
Personale Accademico . . . . .	238
Presentazione di libri . . . . .	238
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	241
Comunicazioni varie . . . . .	242
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 febbraio 1955	243

### FASCICOLO 3.

MARZO 1955.

### NOTE DI SOCI

CROCCO G. A., Passaggio apparente della Terra sul Sole in una escursione Terra-Marte. Nota preliminare . . . . .	Pag. 245
BOAGA G., Sugli schiacciamenti delle superficie isopie notiche nell'interno della Terra	247
CALOI P. e SPADEA M. C., Relazioni fra lente variazioni d'inclinazione e moti sismici in zona ad elevata sismicità (pres. dal Corrisp. <i>P. Caloi</i> ) . . . . .	250
ROSSI-FANELLI A., SILIPRANDI N., SILIPRANDI D. e CICCAREONE P., Trifosfotiamina cristallizzata (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i> ) . . . . .	257
FENOGLIO M. e RIGAULT G., Ricerche spettrografiche sulla scheelite di Traversella (pres. dal Corrisp. <i>M. Fenoglio</i> ) . . . . .	260
D'ANCONA U., SABBADIN A. e BURLINI G., Azione femminizzante di uova di Teleostei (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i> ) . . . . .	265

### NOTE PRESENTATE DA SOCI

DEMARIA D. C., Sulla definizione di corpo (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 268
FINZI L., Principio della minima energia elastica differenziale (pres. dal Socio <i>G. Krall</i> )	274
GIANNUZZI M. A., Orbita della stella binaria A.D.S. 10188. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	280



BALLARIO M. C., Gli elementi orbitali galattici delle stelle veloci e l'effetto di longitudine (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i> ) . . . . .	Pag. 284
GIRLANDA A., Studio di un movimento sismico del basso Tirreno originante alla profondità di 265 km. (pres. dal Corrisp. <i>P. Caloi</i> ) . . . . .	288
DE SIMONI F., Sulle equazioni di campo della teoria relativistica unitaria (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	297
FERRARI I., Multipli e onde di Schelkunoff dissimetriche (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	304
LOINGER A., Sull'elettrodinamica classica dell'elettrone puntiforme (pres. dal Corrisp. <i>P. Caldirola</i> ) . . . . .	309
QUERCIOLI E., Struttura molecolare e azione citogenetica e citofisiologica di sostanze del gruppo delle cumarine (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	313
PROFUMO P., Azione dell'acido indolacetico sugli equilibri glucidici di coleottili d'Avena (pres. dal Corrisp. <i>E. Remotti</i> ) . . . . .	319
FAMIANI V. e AMICI A., Sul comportamento di animali alimentati con dieta deficiente in sostanze minerali (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	325
CANESTRARI R., CREPAX P. e MACHNE X., Effetti della stricninizzazione del « lobulus ansiformis » sull'attività elettrica della corteccia cerebrale (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	332
ROSSI A., Sviluppo dell'arto nei trapianti xenoplastici tra Anfibi Anuri e Urodeli. - Correlazioni fra arto e cinto (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	336
URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., Studio delle proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	341
MORPURGO G., NICOLETTI B. e SOLIMA A., Eterozigosi e rapporto sessi in « Drosophila melanogaster » (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	347
Personale Accademico . . . . .	352
Plichi suggerati . . . . .	352
Comunicazioni varie . . . . .	352
Presentazione di libri . . . . .	353
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	354
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 marzo 1955 . . . . .	355

## FASCICOLO 4.

APRILE 1955.

## NOTE DI SOCI

SEVERI F., Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze algebriche . . . . .	Pag. 357
FANTAPPIÈ L., Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota I . . . . .	361

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

TALLINI G., Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 367
OSTROWSKI A., Un'applicazione dell'integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane (pres. dal Socio <i>F. Severi</i> ) . . . . .	373
NARDINI R., Osservazioni su una relazione energetica della magneto-idrodinamica (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	376



MATSCHINSKI M., I fenomeni di fluttuazione in geofisica. - Loro descrizione matematica e loro applicazione dal punto di vista pratico (pres. dal Corrisp. <i>L. Solaini</i> )	Pag. 378
ARCIDIACONO G., Sull'importanza del « gruppo base » nel problema della unificazione dei campi fisici (pres. dal Corrisp. <i>L. Fantappiè</i> )	386
GARAVELLI C. L., Un nuovo minerale tra i prodotti secondari del giacimento di Capo Calamita (Isola d'Elba) (pres. dal Socio <i>G. Carobbi</i> )	392
MARRÈ E. e LAUDI G., Ricerche sulla fisionomia enzimatica della fotosintesi - I. Trasporto di idrogeno all'ossigeno, tramite il sistema trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico, in cloroplasti isolati esposti alla luce (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> )	402
CREPAX P. e POMPEIANO O., Attività elettrica spontanea dei lobi ottici del Piccione mesencefalico (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> )	409
INFANTELLINA F. e LA GRUTTA G., La regolazione dei riflessi in muscoli simmetrici degli arti della Rana sottoposta a sezioni del nevrasso a diversi livelli (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> )	412
CANESTRARI R. e INFANTELLINA F., Effetti della polarizzazione del midollo spinale di Rana sulla eccitabilità del N. ischiatico (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> )	416
MORUZZI G. e POMPEIANO O., Influenze cerebellari crociate sul tono posturale (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> )	420
BATTAGLIA B. e PULZE E., Adattamento e incipiente isolamento intraspecifico in un Copepode Harpacticoide della laguna veneta (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i> )	424

### COMMEMORAZIONI

NATTA G., Commemorazione del Socio Giacomo Mario Levi	Pag. 427
Personale Accademico	438
Presentazione di libri	438
Presentazione di Note e Memorie	440
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 16 aprile 1955	441

### FASCICOLO 5.

MAGGIO 1955.

### NOTE DI SOCI

SEVERI F., Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali	Pag. 443
ZAGAR F., Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana	452
FANTAPPIÈ L., Deduzione della legge di gravitazione di Newton dalle proprietà del gruppo di Galilei. Nota II	458
MAJORANA Q., Sulla cinematica relativistica	462
CAMBI L., CANONICA L. e DE LEONE R., Complessi di $Ni^{II}$ e $Pd^{II}$ con le immidi (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> )	467

### NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Sui problemi di Cauchy non « ben posti » (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )	Pag. 473
CANETTA P., Sulla esistenza di una curva piana algebrica di ordine 8 con 14 cuspidi e 2 nodi (pres. dal Socio <i>O. Chisini</i> )	478
MARCHIONNA TIBILETTI C., La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante (pres. dal Socio <i>O. Chisini</i> )	480

VESENTINI E., Sui punti stazionari di forme differenziali meromorfe sopra una varietà complessa compatta (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 486
CLAUSER E., Equazioni dinamiche rappresentate da autoparallele di spazi non riemanniani (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	495
GIANNUZZI M. A., Orbita della stella binaria A. D. S. 10188. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	501
FORTINI T., Sopra la BM Orionis (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	505
CAPUTO M., Sulla legge di distribuzione degli errori nella misura delle basi dovuti all'imperfetto allineamento delle spranghe (pres. dal Socio <i>G. Cassinis</i> ) . . . . .	510
ARCIDIACONO G., Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di Relatività finale (pres. dal Corrisp. <i>L. Fantappiè</i> ) . . . . .	515
CANONICA L., FIECCHI A. e VALCAVI U., Trasposizioni degli acidi $\gamma$ -fenossicrotonici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	520
BENAZZI M., L'evoluzione della poliploidia nelle planarie appartenenti alla superspecie « <i>Dugesia gonocephala</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	527
GEROLA F. M. e GILARDI E., L'azione del berillio sull'assorbimento del fosforo e sull'aumento in peso di apici radicali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	533
MARRÈ E. e ARRIGONI O., Ulteriori ricerche sull'azione inibente dell'auxina nei confronti dell'ossidasi dell'acido ascorbico (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	539
MARRÈ E. e SERVETTAZ O., Sul parallelismo tra azione di stimolo sulla crescita e azione sull'attività deidrogenasica «in vitro» di alcuni inibitori dei gruppi sulfidrilici a concentrazioni subinibenti (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	546
CAVALLINI D., DE MARCO C., MONDOVÌ B. e STIRPE F., Sintesi dell'ipotaurina (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i> ) . . . . .	552
SINISCALCO M., Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota III (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	556
Personale accademico . . . . .	561
Presentazione di libri . . . . .	561
Comunicazioni varie . . . . .	563
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	563
Relazioni di Commissioni . . . . .	564
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei . . . . .	564
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 maggio 1955 . . . . .	567

## FASCICOLO 6.

GIUGNO 1955.

## NOTE DEI SOCI

MINEO C., Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche . . . . .	Pag. 569
MAJORANA Q., Radio-onde emesse dal pianeta Giove ed un'ipotesi cosmogonica . . . . .	577
CAMBI L., Suscettività magnetica dei complessi $\text{Co}^{\text{II}}-\text{Co}^{\text{III}}$ . . . . .	581
CAMBI L., CANONICA L. e SIRONI C., Complessi triazolici di Cobalto <sup>II</sup> e Cobalto <sup>III</sup> (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	583
DE IO A. e CITA M. B., Nuovi ritrovamenti di calcari fossiliferi del Paleozoico superiore nel bacino del Baltoro (Himalaya-Karakorum) (pres. dal Corrisp. <i>A. Desio</i> ) . . . . .	587



## NOTE PRESENTATE DA SOCI

LOMBARDO-RADICE L., A proposito di un teorema sui piani finiti sopra un quasicorpo (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 599
BENEDICTY M., Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	602
RICCI G., Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	609
LONGO C., Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine di $S_r$ (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	614
DALLA VOLTA V., Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	619
FERRARI I., Multipoli e onde di Schelkunoff. Il caso generale (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	623
ARCIDIACONO G., Sul campo elettromagnetico generalizzato (pres. dal Corrisp. <i>L. Fan- tappiè</i> ) . . . . .	631
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua. Nota III (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	636
FERRO R., Monotelururo e monossimonotelururo di torio (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> ) . . . . .	641
IANDELLI A., Su un nuovo metodo di preparazione del Samario metallico (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> ) . . . . .	644
PIOZZI F. e FAVINI G., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer: ciclizzazione delle isoni- troacetanilidi con acido polifosforico. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	647
MARCUZZI G., Osservazioni fisico-chimiche sul sangue dei Coleotteri Tenebrionidi. - I. La pressione osmotica nel «Tenebrio molitor» L. (pres. dal Corrisp. <i>U. D'An- cona</i> ) . . . . .	654
BAFFONI G. M., Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. - IV. Le fibre sinaptiche dei neuroni di Purkinje in differenziamento ed in degenerazione del gatto adulto (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	662
Comunicazioni varie . . . . .	669
Presentazione di libri . . . . .	669
Personale accademico . . . . .	671
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	671
Relazioni di Commissioni . . . . .	671
Congressi . . . . .	672
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 giugno 1955 . . . . .	673
Indice per Autori . . . . .	677
Indice per materie . . . . .	682
Indici dei fascicoli . . . . .	686